SS 2019 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Übung Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Blatt 8

Aufgabe 1
Wenn der Regularisierungsparameter λ vor $\|u\|^2$ verschwindet, ergeben sich unter gewissen Voraussetzungen Bang-Bang-Steuerungen, d.h. die Steuerungen nehmen fast überall nur Werte auf dem Rand der zulässigen Menge an. Eine solche Lösung soll nun konstruiert werden. Wir betrachten das Problem

$$\min J(y,u) := \frac{1}{2}\int_\Omega (y-y_d)^2 dx$$

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u + e_\Omega && \text{in } \Omega \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma \\ -1 \leq & u(x) \leq 1 && \text{f. ü. in } \Omega \end{aligned}$$

($\Omega := (0,1)^2$).

(i) Stellen Sie das Optimalitätssystem auf.

(ii) Konstuieren Sie eine optimale Lösung des Problems so, dass die optimale Steuerung eine Schachbrettfunktion darstellt. Hinweis: Wählen Sie zunächst einen geeigneten adjungierten Zustand. Nutzen Sie dazu die Eigenschaften der Sinusfunktion.

Aufgabe 2
Wir betrachten nun eine Aufgabe mit homogener Neumann-Randbedingung:

$$\min J(y,u) := \frac{1}{2}\int_\Omega (y-y_d)^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx$$

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= u + e_\Omega && \text{in } \Omega \\ \partial_n y &= 0 && \text{auf } \Gamma \\ u_a \leq & u(x) \leq u_b && \text{f. ü. in } \Omega \end{aligned}$$

($\Omega := (0,1)^2$). Konstruieren Sie erneut eine analytische Lösung für das Problem, indem Sie die festen Funktionen y_d, e_Ω sowie die Schranken u_a, u_b geeignet anpassen. Weiterhin sollte die optimale Steuerung auch aktiv auf Teilgebieten von Ω sein.

Aufgabe 3
Man zeige: Die Funktion

$$y(x,t) = \frac{e^t}{\sqrt{x}}$$

gehört dem Raum $C([0,T], L^1(0,1))$. Berechnen Sie die Norm in diesem Raum. In welchen Räumen $L^p(0,T;L^q(0,1))$ liegt diese Funktion?

Aufgabe 4
Warum gehört die Funktion $y : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$y(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \le t \\ 0 & \text{für } x > t \end{cases}$$

zu $L^p(0,1;L^p(0,1))$ für beliebiges $p < \infty$ aber nicht zu $L^\infty(0,1;L^\infty(0,1))$?

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_ramazanova1920.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-N-U-4.03	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-N-U-4.03	
Ü	Fr	10-12	WSC-N-U-4.03	Aysel Ramazanova