Übung Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Blatt 2

Aufgabe 1
Wir betrachten noch einmal die Aufgabe

$$\min\ J(y,u), \quad Ay = Bu, \quad u \in U_{ad}$$

aus Aufgabe 3 des letzten Blattes, diesmal mit $U_{ad} = \{u \in \mathbb{R}^m : u_a \leq u \leq u_b\}$, $u_a, u_b \in \mathbb{R}$, $u_a \leq u_b$. Rechnen Sie nach, dass die Variationsungleichung

$$\left\langle B^T p + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}), v - \bar{u} \right\rangle \geq 0 \quad \text{für alle } u \in U_{ad}$$

mit $\mu_a := [B^T p + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u})]^+$ und $\mu_b := [B^T p + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u})]^-$ äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} \mu_a \geq 0, \quad u_a - \bar{u} \leq 0, \quad \langle u_a - \bar{u}, \mu_a \rangle = 0, \\ \mu_b \geq 0, \quad \bar{u} - u_b \geq 0, \quad \langle \bar{u} - u_b, \mu_b \rangle = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2
Leiten Sie die schwache Formulierung zu folgenden Randwertproblemen her und zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Satzes von Lax/Milgram erfüllt sind:

(i)

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= f(x) && \text{in } \Omega \\ u(x) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + bu(x) &= f(x) && \text{in } \Omega \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \nu_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Dabei seien $a_{ij} = a_{ji}$ und b positive Konstanten so, dass $A = (a_{ij})$ positiv definit ist, $f \in L^2(\Omega)$ und $\nu_j(x)$ die j-te Komponente des äußeren normierten Normalenvektors in x.

Aufgabe 3
In welchem Raum $H^m(-1,1)$ (m positiv und ganzzahlig) liegen folgende Funktionen?

(i) $f(x) = |x|$,

(ii) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$,

(iii) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\pi x)$.

Aufgabe 4
Geben Sie eine Funktion an, die

(i) in $L^1(\Omega)$, nicht aber in $L^2(\Omega)$ liegt;

(ii) in $H^1(\Omega)$ liegt, aber nicht stetig ist und nicht in $L^\infty(\Omega)$ liegt.

Wählen Sie dabei Ω jeweils als beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$.
Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_ramazanova1920.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-N-U-4.03	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-N-U-4.03	
Ü	Fr	10-12	WSC-N-U-4.03	Aysel Ramazanova