SS 2019 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Übung Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Blatt 5

Aufgabe 1
Weisen Sie nach, dass die folgenden Funktionale Fréchet-differenzierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitungen:

(i) $f : H \to \mathbb{R}$, $f(u) := \|u\|_H^2$ (H Hilbertraum);

(ii) $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(u) := \sin(u(1))$.

Aufgabe 2

(i) Berechnen Sie den adjungierten Operator zu $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$,

$$(Au)(t) = \int_0^t e^{t-s} u(s)ds;$$

(ii) Bestimmen Sie für $p > 2$ den adjungierten Operator zum Einbettungsoperator $E : L^p(0,1) \to L^2(0,1)$;

Aufgabe 3

(i) Seien U ein reeler Banachraum, $C \subset U$ konvex und $f : U \to \mathbb{R}$ Gâteaux-differenzierbar. Zeigen Sie, dass für eine Lösung $\bar{u} \in C$ der Aufgabe

$$\min_{u \in C} f(u)$$

die notwendige Bedingung

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq 0 \quad \text{für alle } u \in C$$

erfüllt ist.

(ii) Sei nun zusätzlich f konvex. Zeigen Sie, dass dann jedes $\bar{u} \in C$, welches die Optimalitätsbedingung erfüllt, die Optimierungsaufgabe löst.

Aufgabe 4
Leiten Sie für $\lambda > 0$ und $C \subset \Omega$ notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen für folgende Aufgabe her:

$$\min \quad J(y,u) := \int_C y(x)dx + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{in } \Omega \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma \\ u_a \leq u(x) &\leq u_b && \text{f.ü. in } \Omega. \end{aligned}$$

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_ramazanova1920.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-N-U-4.03	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-N-U-4.03	
Ü	Fr	10-12	WSC-N-U-4.03	Aysel Ramazanova