SS 2019 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Übung Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Blatt 10

Aufgabe 1
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte und messbare Menge. Für welche Räume $L^q(\Omega)$ ist der Nemytzki-Operator $\Phi : y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$ Fréchet-differenzierbar von $L^2(\Omega)$ nach $L^q(\Omega)$? In welchen Raum $L^r(\Omega)$ bildet der Ableitungsoperator Φ' den $L^2(\Omega)$ ab?
Hinweis: Benutzen Sie für die Restgliedeigenschaft der Fréchet-Differenzierbarkeit die integrale Darstellung des Restgliedes aus der Talorentwicklung.

Aufgabe 2
Wir betrachten in $C[0,1]$ den Nemytzki-Operator $\Phi(y(\cdot)) = y(\cdot)^n$. Zeigen Sie, dass dieser stetig Fréchet-differenzierbar in $C[0,1]$ ist.

Aufgabe 3
Wir diskutieren die Aufgabe der Supraleitung:

$$\begin{aligned} \min J(y,u) := \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ -\Delta y + y + y^3 = u \qquad \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y = 0 \qquad \text{auf } \Gamma \\ -2 \le u(x) \le 2 \quad \text{f.ü. in } \Omega. \end{aligned}$$

Setzen wir $y_d \in L^\infty(\Omega)$ voraus, dann sind alle Voraussetzungen für die Existenz mindestens einer optimalen Lösung $\bar{u}$ erfüllt.

(a) Ausserdem sind die Voraussetzungen für die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung erfüllt. Stellen Sie das Optimalitätssystem mit Hilfe der formalen Lagrangetechnik auf.

(b) Zeigen Sie, dass $\bar{u} \equiv 2$ für $\lambda = 1$ und $y_d = 9$ die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung erfüllt. Sind hinreichende Optimalitätsbedingungen erfüllt?

Homepage der Veranstaltung ist:

http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_ramazanova1920.php

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-N-U-4.03	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-N-U-4.03	
Ü	Fr	10-12	WSC-N-U-4.03	Aysel Ramazanova