

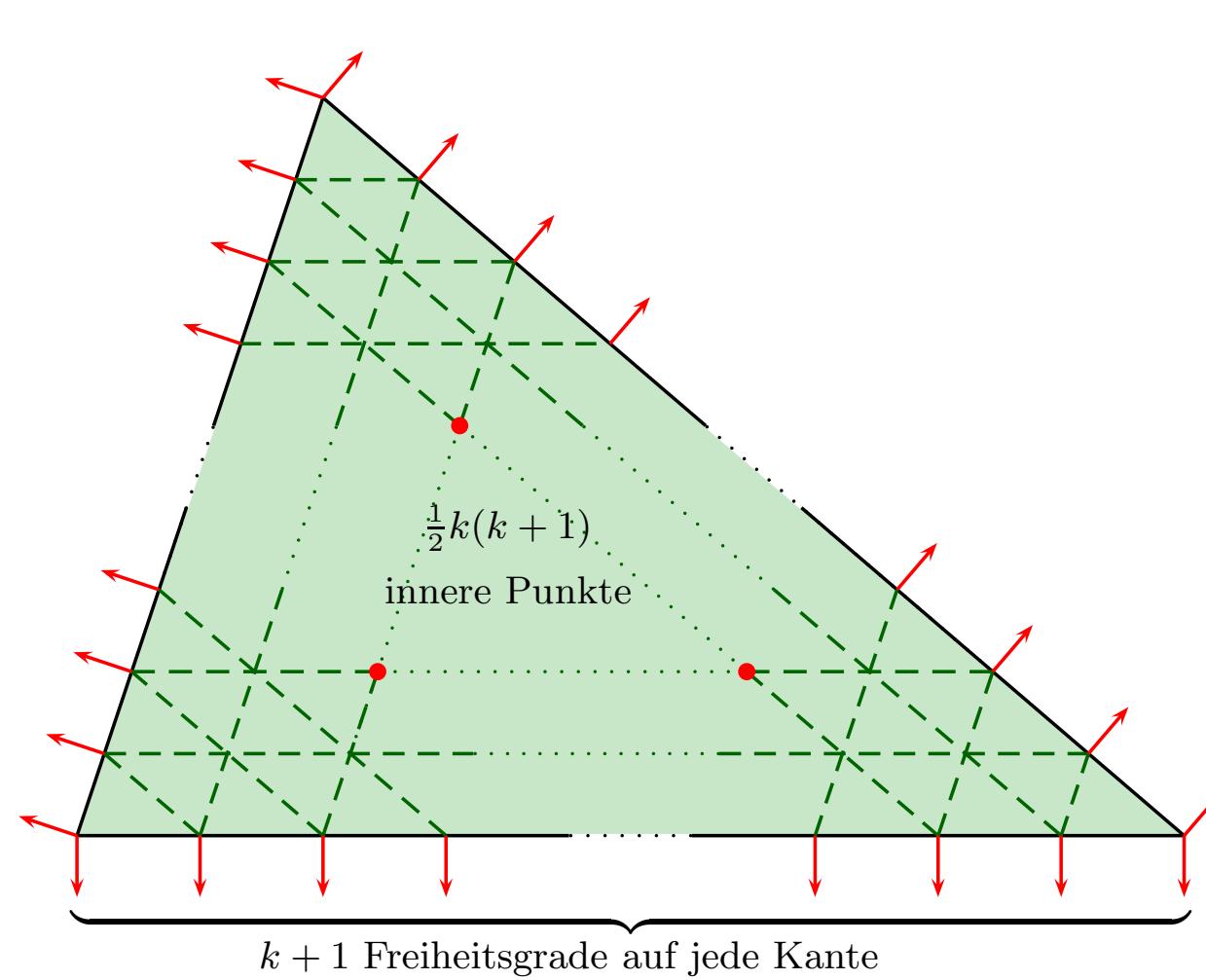
# Spannungsbasierte Approximationen für die Modellierung von Eisflächen

## Herausforderungen

- Eis und Schnee bedeckte Flächen haben die Fähigkeit mehr als die Hälfte der einfallenden Sonneneinstrahlung zu reflektieren und spielen deshalb eine wichtige Rolle für das Klima.
- Das Verhältnis von rückgestrahlte zu einfallenden Licht wird als Albedo bezeichnet. Zum Vergleich: Wüste 0.30, Rasen: 0.20, Asphalt 0.15.
- Klimamodelle gehören zu den komplexesten und rechenaufwendigsten Berechnungsmodellen, die je entwickelt wurden.
- Übliche Modellvariablen : Geschwindigkeit  $\mathbf{v} \in H_{P_d}^1(\Omega)$   
Bedeckungsgrad  $A \in H^1(\Omega)$   
Eishöhe  $H \in H^1(\Omega)$

## Spannungen

Insbesondere weil sie als Quellterm in die anderen Gleichungen der Klimamodelle eingehen, stellen die Spannungen eine weitere wichtige Größe in der Eismodellierung dar. Um einen Approximationsverlust zu vermeiden kann ein direkter Ansatz für den Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  gewählt werden, so dass die Spannungen gleichzeitig mit den anderen Variablen approximiert werden. Geeignete Finite Element Räume basierend auf einer Triangulierung  $\mathcal{T}$  bilden hierfür die  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ -konformen Räume, wie zum Beispiel die Raviart-Thomas Elemente:



$RT_k = \{\mathbf{v}_h \in H(\operatorname{div}, \Omega) : \mathbf{v}_h|_T \in RT_k(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}$  mit  $RT_k(T) = (\mathcal{P}_k(T))^d + \mathbf{x}\mathcal{P}_k(T)$ , wobei  $\mathcal{P}_k$  die Menge der Polynome vom Grad  $k$  bildet. Diese Elemente sind vektorwertige Elemente, bei denen einige Freiheitsgrade durch den Wert der Normalkomponente an der Elementgrenze gegeben sind. Mit den Spannungen kann die Impulsbilanz explizit geschrieben werden. Es gilt

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho_{eis} H \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + f_c \mathbf{e}_r \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_o) \right) - \mathbf{f} \quad (1)$$

mit  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_o + \mathbf{f}_a$  wobei  $\rho_{eis}$  die Dichte des Eises,  $f_c$  die Corioliskraft,  $\mathbf{f}_o$  die Krafteinwirkung vom Ozean und  $\mathbf{f}_a$  die Krafteinwirkung der Atmosphäre sind. Die Krafteinwirkung ist mit den jeweiligen Flüssen  $\mathbf{v}_a$  und  $\mathbf{v}_o$  verknüpft:

$$\mathbf{f}_a = \rho_a C_a \|\mathbf{v}_a\|_2 \mathbf{v}_a, \quad \mathbf{f}_o = \rho_o C_o \|\mathbf{v}_o - \mathbf{v}\|_2 (\mathbf{v}_o - \mathbf{v}),$$

wobei  $\rho_a$  und  $\rho_o$  die jeweiligen Dichten von Atmosphäre und Ozean sind, und  $C_a$  und  $C_o$  die Strömungswiderstandskoeffizienten beschreiben.

## Meereis Rheologie



Meereis wird als viskoses kompressibles Fluid modelliert. Dies bedeutet, dass sowohl der spurfreie Anteil  $\operatorname{dev} \boldsymbol{\sigma}$  als auch die Spur vom Spannungstensor des Deformationsgradienten  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  abhängen:

$$\begin{aligned} \operatorname{dev} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{2} \zeta \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \\ \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{3}{2} \zeta \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) - 2P \end{aligned} \quad (2)$$

wobei die Viskosität  $\zeta = \frac{P}{2A(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))}$  vom statischen Druck  $P$  abhängt, der selbst linear von der Meereisdicke  $H$  und exponentiell vom Bedeckungsgrad  $A$  abhängt.

$$P = \frac{1}{2} P_0 H e^{-(C(1-A))}$$

$P_0$  und  $C$  werden Bruchparameter genannt, weil das Eis bis zu der Bruchgrenze  $P$  einer Deformation widersteht. Insbesondere die empirische Bestimmung dieser Parameter war Ziel des Expeditions der SA Agulhas zur Antarktis vom 25.06.2017 bis zum 16.07.2017, an der Fleurianne Bertrand und Marcel Moldenhauer teilgenommen haben.

## Least-Squares Methode

Bei der Least-Squares Methode werden die Residuen der Gleichungen in (1) und (2) sowie Kontinuitätsgleichungen, in der  $L^2(\Omega)$ -Norm, im Funktional

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}, A, H) = & \left\| \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho_{eis} H \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + f_c \mathbf{e}_r \times \mathbf{v} \right) - \mathbf{f} \right\|_0^2 + \left\| \operatorname{dev} \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2} \zeta \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right\|_0^2 \\ & + \left\| \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} - \frac{3}{2} \zeta \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + 2P \right\|_0^2 + \left\| \frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} A) \right\|_0^2 + \left\| \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} H) \right\|_0^2 \end{aligned}$$

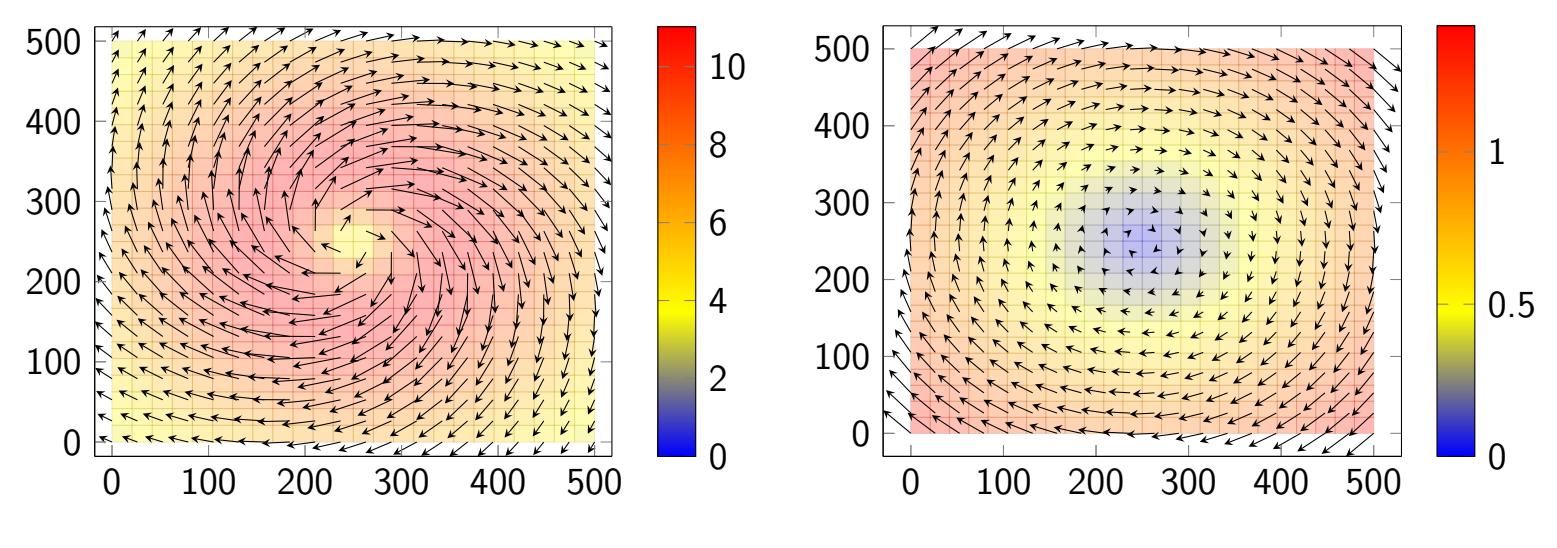
zusammengefasst. Die diskrete Approximation  $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{v}_h, A_h, H_h)$  wird durch die Minimierung von  $\mathcal{F}$  in dem Raum  $(RT_k)^2 \times (\mathcal{P}_k)^4$ , welcher durch Randbedingungen eingeschränkt wird, gewonnen. Hierbei bezeichnet  $\mathcal{P}_k$  den  $H^1$ -konformen Raum der stückweise Polynome vom Grad  $k$ . Wird das Energiegleichgewicht

$$\|(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}, A, H)\|^2 \approx \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}, A, H) \quad (3)$$

bewiesen, so liefert die Least-Squares Methode sowohl optimale a priori Fehlerabschätzungen als auch einen effizienten und zuverlässigen a posteriori Fehlerschätzer.

Ein beliebtes Beispiel ist ein durch das quadratische Gebiet  $\Omega = [0, 500] \times [0, 500]$  über einen Zeitraum  $[0, t_{max}]$  mit  $t_{max} = 8$  Tage, wandernder Zyklon. Der Mittelpunkt des Zyklons ist gegeben durch

$$\mathbf{x}_m = (450 + (\operatorname{sgn}(t-4)(200 - 50t))) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

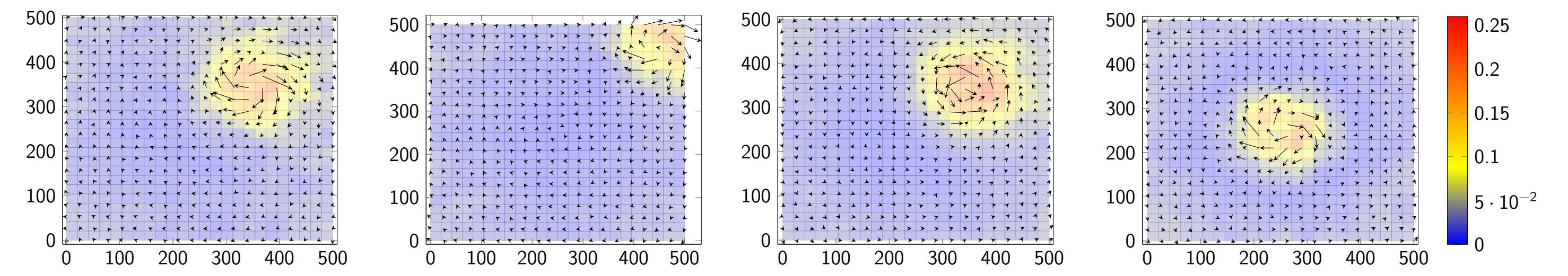


Die Geschwindigkeit des Zyklons ist so gewählt, dass sie größer in der Nähe des Auges ist,

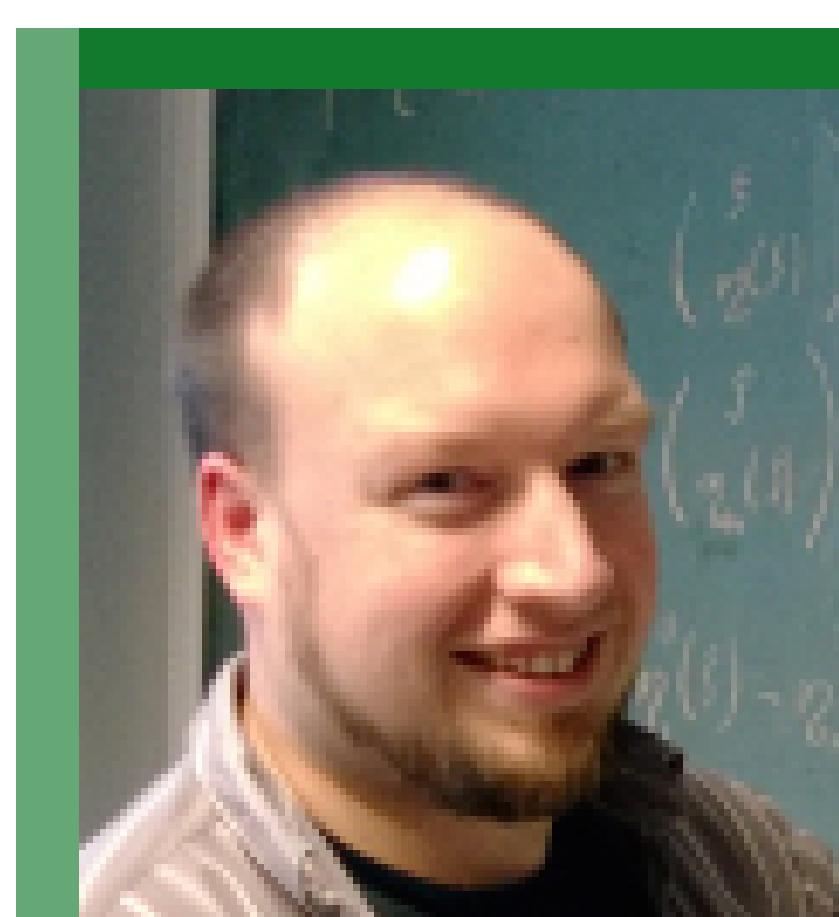
$$\mathbf{v}_{atm}(t) = (t-4)(8 - |t-4|)R_{90^\circ - 90^\circ \operatorname{sgn}(t-4)+3}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) \frac{e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_m|}{100}}}{50}$$

während die Krafteinwirkung des Ozeans nicht von der Zeit abhängt:

$$\mathbf{v}_{ocean}(x, y) = 0.01 \left( \frac{2y}{500} - 1 \right) \left( 1 - \frac{2x}{500} \right).$$



Eisgeschwindigkeit zu  $t = 2, 4, 6, 8$



Dr. Steffen Münzenmaier

Zusammenarbeit  
an der Universität  
Duisburg-Essen



Marcel Moldenhauer



Fleurianne Bertrand

- Scientific Vita
- PostDoc at University Duisburg-Essen
- PhD from Leibniz University Hannover
- Research interests
- Mixed and Least Squares Finite Element Method
- Treatment of Curved Boundaries
- Applications: e.g. Two-Phase Flows, Elasticity, Sea-ice.