Blatt 2 17.04.2019

Übungen zur Vorlesung

Maßtheorie für PDE

Sommersemester 2019

Dr. A. Lamacz

1) Limeseigenschaft von Maßen.

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_k \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i) Falls $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

ii) Falls $A_k \supset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\mu(A_1) < \infty$, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Hinweis zu ii): Betrachten Sie $\mu(A_1) - \lim_k \mu(A_k)$ und verwenden Sie i).

2) Diskrete Maße.

i) Sei $X \neq \emptyset$ eine höchstens abzählbare Menge und $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$. Weiterhin sei $p : X \to [0, \infty]$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$,

$$\mu(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ definiert.

ii) Wir betrachten $X := \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{M} := \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\}$. Sei μ_1 das *Zählmaß* auf $\mathcal{P}(X)$, also $\mu_1(A) = |A|$ für $A \in \mathcal{P}(X)$. Geben Sie ein von μ_1 verschiedenes Maß μ_2 auf $\mathcal{P}(X)$ an, welches auf $\mathcal{M}$ mit μ_1 übereinstimmt.

3) Bonferroni-Ungleichung.

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgende Ungleichung:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{i<j\leq n} \mu(A_i \cap A_j).$$