Kapitel 1

Einleitung

Mehrskalenprobleme

In der Physik, der Hydrologie, den Ingenieurwissenschaften und auch vielen andern Forschungsbereichen treffen wir auf so genannte *Mehrskalenprobleme*. Bei dieser Art von Problemen sind typischerweise zwei oder mehr 'Skalen' involviert. Wir unterscheiden zwischen Makroskala, Mikroskala und dazwischenliegenden Mesoskalen. Typischerweise beschreibt eine Makroskala eine Größenordnung, auf der sich das globale (bzw. gemittelte) Verhalten eine physikalischen Größe beobachten lässt. Auf einer Mikroskala finden dagegen beispielsweise Prozesse statt, die sehr schnellen Änderungen unterworfen sind und die man 'mikroskopisch genau' untersuchen muss, um sie zu erfassen. Im Folgenden betrachten wir verschiedene Beispiele für *Mehrskalenprobleme*.

Anwendungsbeispiele

Beispiel 1 (Salzwasserintrusion)**.**
Grundwasser ist eine wichtige Trinkwasserquelle. Wird mehr Grundwasser gefördert, als wie auf natürlichem Wege nachfließen kann, so ändern sich die Druckverhältnisse im Grundwasserleiter. In küstennahen Region bedeutet das häufig, dass es es zu einem Druckausgleich kommt, indem Meerwasser in die Schichten des Erdreichs vordringt, die zuvor mit Süßwasser gefüllt waren. Diese Art der Verunreinigung von Grundwasser mit Salzwasser wird als *Salzwasserintrusion* bezeichnet. Um nun das genaue Ausmaß der Verunreinigung bestimmen zu können (d.h. die *globale* Ausbreitung der Salzwasserkonzentration) müssen kleine ('mikroskopische') Änderungen in den Gesteinsformationen und Erdschichten berücksichtigt werden. Teilweise bis hinunter zur Porengröße eines Bodentyps.

Beispiel 2 (Schadstofftransport im Grundwasser)**.**
Eine zweites Beispiel, welches dem ersten sehr ähnlich ist, bezieht sich auf die Ausbreitung und den Abbau von Schadstoffen im Erdreich. Hierbei stellen wir uns auch wieder vor, dass Grundwasser verunreinigt wurde. Diesmal beispielsweise durch landwirtschaftliche Rückstände oder industrielle Abwasser. Der Schadstoff ist dann häufig im Grundwasser gelöst und bewegt sich mit dem normalen Grundwasserfluß mit. Um nun die Ausbreitung verfolgen zu können, müssen erneut sehr lokale Effekte, wie Kapillardrücke oder Änderungen der Bodenparameter, berücksichtigt werden. Je nach Struktur des Erdreichs lassen sich hier neben einer Makroskala auch mehrere Mesoskalen unterscheiden.

Beispiel 3 (Faserverstärkte Verbundmaterialien)**.**
Auch in technischen Prozessen tauchen Mehrskalenprobleme auf. Ein Beispiel hierfür sind *faserverstärkte Verbundmaterialien*. Derartige Werkstoffe bestehen aus einem Hauptmaterial (der Matrix), welches durch eine Vielzahl feiner Fasern verstärkt wird. Dabei dient die Matrix als 'Kleber', um die Fasern einerseits in der gewünschten Form und Dichte zusammen zuführen und anderseits um Spannungskräfte zwischen den Fasern zu übertragen. Auf diese Art können neue Materialien mit vorgegebenen Stabilitäts- und Elastitzitätseigenschaften konstruiert und gefertigt werden. In manchen Fällen dient eine solche Konstruktion auch dem Hintergrund ein Material leichter zu machen oder aber einfach nur um Produktionskosten oder den Produktionsaufwand zu senken. Anwendungen finden faserverstärkte Verbundmaterialien unter anderem in der Entwicklung von Sportartikeln oder auch in der Luft- und Raumfahrttechnik. Als Beispiel lassen sich glasfaserverstärkte Kunststoffe nennen, bei denen im Allgemeinen eine Harz-Basis mit Glasfasern versetzt wird, um ein hochgradig belastbares Material zu konstruieren, welches beispielsweise zum Verstärken von Bootsrümpfen eingesetzt wird. Als Makroskala hätten wir hier das 'fertige Material' mit dessen effektiv messbaren Eigenschaften, während wir auf der Mikroskala die Matrix und die einzelnen Fasern unterscheiden.

Motivation für neue Lösungsverfahren

Stellen wir uns nun vor, dass wir explizit an der Lösung eines Mehrskalenproblems interessiert wären und dass die zugrunde liegenden (Mehrskalen-)Gleichungen bereits zur Verfügung stehen. Dann stellt sich nun die Frage nach geeigneten Lösungsverfahren. Zunächst könnte man sich überlegen Standard-Verfahren zu verwenden, wie die Finite Elemente Methode oder Finite Volumen Verfahren. Derartige Methoden setzen aber voraus, dass man das zugrundeliegende Rechengitter so fein macht, dass die Eigenschaften der Datenfunktionen (z.B. der Diffusionskoeffizient) genau genug approximiert werden können. Stellen wir uns zum Beispiel ein

Raumdimension die Gleichung $-(a(x)u'(x))' = f(x)$ vor. Wenn nun zum Beispiel für festes ϵ gilt $|a(x) - a(x+\epsilon)| \gg 0$ (also a ändert sehr schnell seine Eigenschaften), dann ist klar, dass die Gittergröße in jeden Fall unterhalb von ϵ liegen muss, um sinnvolle Approximationen zu erhalten. Ganz allgemein können wir sagen, dass Standard-Verfahren die Mikrostruktur durch ein sehr feines Rechengitter auflösen müssen. Das impliziert jedoch ein sehr großes zu lösendes Gleichungssystem und damit einen erheblichen Rechenaufwand. In vielen Anwendungen wird der Rechenaufwand sogar so groß, dass er selbst durch die schnellsten Computer der Welt nicht mehr zu bewältigen wäre. Man könnte nun annehmen, dass man einfach über die Mikro-Eigenschaften mitteln kann, um am Ende nur ein grobskaliges Problem zu lösen. Schließlich sind wir in vielen Fällen auch nur am grobskaligen Verhalten interessiert. Leider führt auch dieser Ansatz zu falschen Ergebnissen, wie wir in den folgenden Kapiteln noch sehen werden. Wir benötigen also alternative Lösungsstrategien zur Behandlung von Mehrskalenproblemen. Als analytische Ansatz präsentieren wir das Werkzeug der *Homogenisierung*, während wir uns bei den numerischen Methoden vor allem auf die Heterogene Mehrskalenmethode (HMM) konzentrieren.

Das Setting

Im Folgenden verwenden wir den Parameter ϵ als charakteristische Größe für die feinste Skala im betrachteten Problem. Gehen wir zum Beispiel davon aus, dass die Datenfunktion sehr schnell periodisch oszillieren, so wäre ϵ gerade die Wellenlänge (d.h. die Länge einer Periode). Haben wir es dagegen mit einer heterogenen, nicht-periodischen Struktur zu tun, so sollte ϵ als uneindeutige Größe angesehen werden. Wenn wir signalisieren wollen, dass eine Funktion oder ein Operator Mikroskalen-Eigenschaften besitzt, so wird er im Folgenden mit dem Index ϵ versehen. Typischerweise betrachten wir dann Probleme wie:

$$\text{finde } u^\epsilon \in X \text{ mit } L^\epsilon u^\epsilon = f. \tag{1.4.1}$$

Hier beschreibt $f \in X'$ einen rein makroskopischen Quellterm, während L^ϵ einen Mehrskalen-Operator mit schnellen Oszillationen bezeichnet. Die Lösung u^ϵ hat selbst auch wieder Mehrskalen-Eigenschaften. X ist ein geeigneter Lösungsraum mit Dualraum X'. Bei der Verwendung von ϵ gehen wir immer davon aus, dass ϵ sehr klein ist, im Vergleich zur Ausdehnung des eigentlichen Rechengebiets Ω.

Ziel der Vorlesung ist es nun eine Übersicht an analytischen und numerischen Verfahren zu geben, mit deren Hilfe Gleichungen vom Typ (1.4.1) gelöst werden können. Wir schränken uns dabei zunächst auf elliptische Probleme ein und kommen danach eventuell noch auf parabolische Probleme zu sprechen.