Blatt 1 10.04.2018

Übungen zur Vorlesung

Homogenisierungstheorie

Sommeremester 2018

Dr. A. Lamacz

1) Lemma ohne Namen.

Seien $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Banachraum X und $u \in X$ mit folgender Eigenschaft: Für jede Teilfolge $(u_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert eine weitere Teilfolge $(u_{k_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $u_{k_{i_j}} \to u$ für $j \to \infty$.

Zeigen Sie: $u_k \to u$ in X für $k \to \infty$.

Bemerkung: Das obige Lemma gilt auch für schwache Konvergenz.

2) Abgeschlossenheit schwacher Nullrandwerte.

Sei $H_0^1(\Omega)$ der Raum der H^1-Funktionen mit schwachen Nullrandwerten,

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \,|\, \exists (f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega) \text{ mit } \|u - f_j\|_{H^1(\Omega)} \overset{j\to\infty}{\to} 0\} \subseteq H^1(\Omega).$$

Zeigen Sie: Der Raum $H_0^1(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $H^1(\Omega)$ (ohne den Spursatz zu verwenden).

Bemerkung: Da stark abgeschlossene konvexe Teilmengen von $H^1(\Omega)$ auch schwach abgeschlossen sind, gilt sogar die schwache Abgeschlossenheit von $H_0^1(\Omega)$.

3) Schwache Konvergenz oszillierender Funktionen.

Seien $\Omega := (0,1)$ und $p \in (1,\infty)$. Wir betrachten die Folge $u^\varepsilon(x) := \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.
Zeigen Sie, ohne Lemma 2.7 aus der Vorlesung zu benutzen, dass

$$u^\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Die Folge u^ε konvergiert jedoch nicht stark in $L^p(\Omega)$.

4) Schwache Konvergenz in $W^{1,p}$.

Sei $1 \leq p < \infty$ und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $W^{1,p}(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad u_k \rightharpoonup u \text{ in } L^p(\Omega) \text{ und } \nabla u_k \rightharpoonup \nabla u \text{ in } (L^p(\Omega))^n.$$

Hinweis: Für "$\Leftarrow$" identifizieren Sie den Raum $W^{1,p}(\Omega)$ mit einem Teilraum von $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^n$ via

$$W^{1,p}(\Omega) \cong U_p(\Omega) := \{(u, U) \in L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^n \,|\, U = \nabla u\}.$$

Verwenden Sie den Satz von Hahn-Banach, um eine stetige Linearform auf $U_p(\Omega)$ normgleich zu einer stetigen Linearform auf $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^n$ fortzusetzen. Identifizieren Sie diese mit einem Element in $L^{p'}(\Omega) \times (L^{p'}(\Omega))^n$, wobei p' der duale Exponent mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ist.

Abgabe am 17.04.2018 in der Vorlesung.