Blatt 1 10.04.2019

Übungen zur Vorlesung

Maßtheorie für PDE

Sommersemester 2019

Dr. A. Lamacz

1) Maße und äußere Maße.

Sei X eine nichtleere Menge und μ ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie: Dann ist μ ein äußeres Maß.

Hinweis: Betrachten Sie zum Nachweis der σ-Subadditivität die Mengen F_n mit $F_1 := A_1$ und $F_{n+1} := A_{n+1} \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$.

2) Spur-σ-Algebra.

Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X. Sei weiterhin $E \subset X$. Zeigen Sie, dass das durch

$$\mathcal{A} \cap E := \{A \cap E \mid A \in \mathcal{A}\}$$

definierte Mengensystem eine σ-Algebra über E ist. Man nennt $\mathcal{A} \cap E$ die Spur-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ auf E.

3) Algebra vs. σ-Algebra.

Sei X eine nichtleere Menge.

Definition (Algebra) Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X heißt *Algebra* über X, falls

(A1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{A}$,

(A2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

(A3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich}\}$$

eine Algebra ist. Beweisen Sie, dass $\mathcal{A}$ genau dann eine σ-Algebra ist, wenn X endlich ist.