Blatt 4 02.05.2019

Übungen zur Vorlesung

# Maßtheorie für PDE

Sommersemester 2019

Dr. A. Lamacz

## 1) Additivität des Integrals.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

i) Seien $s, t : X \to [0, \infty]$ einfache Funktionen. Dann gilt

$$\int_X (s + t)\, d\mu = \int_X s\, d\mu + \int_X t\, d\mu.$$

ii) Sei $f : X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Dann existiert eine Folge $s_n$ einfacher Funtionen mit $0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq ...$ und $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ für alle $x \in X$. Betrachten Sie hierfür $\Phi_n : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi_n(t) := \begin{cases} k2^{-n} & k2^{-n} \leq t < (k+1)2^{-n},\ k = 0, 1, ..., n2^n - 1, \\ n & t \geq n. \end{cases}$$

Machen Sie sich klar, dass $s_n := \Phi_n \circ f$ die geforderten Eigenschaften hat.

iii) Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_X (f + g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

## 2) Gleichheit fast überall.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien weiterhin $f, g : X \to [0, \infty]$ messbare Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für $\mu$-fast alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt.

## 3) Absolut stetig, singulär.

Beweisen Sie, dass für ein positives Maß $\mu$ und signierte Maße $\lambda$, $\lambda_{1,2}$ die folgenden Aussagen gelten.

1. $\lambda$ ist auf $A$ konzentriert $\Rightarrow$ $|\lambda|$ ist auf $A$ konzentriert
2. $\lambda_1 \perp \lambda_2 \Rightarrow |\lambda_1| \perp |\lambda_2|$
3. $\lambda_1 \perp \mu$, $\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$
4. $\lambda_1 \ll \mu$, $\lambda_2 \ll \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$
5. $\lambda \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \ll \mu$
6. $\lambda_1 \ll \mu$, $\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$
7. $\lambda \ll \mu$, $\lambda \perp \mu \Rightarrow \lambda = 0$

*Hinweis zu 7:* Zeigen Sie zunächst, dass für das Variationsmaß $|\lambda| = 0$ gilt.

## 4) Variationsmaß mit Dichte.

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in L^1(X, \mu)$. Dann ist $\mu_f : \mathcal{A} \to (-\infty, \infty)$ gegeben durch

$$\mu_f(A) := \int_A f \, d\mu \quad \text{für } A \in \mathcal{A}$$

ein signiertes Maß. Zeigen Sie, dass das Variationsmaß $|\mu_f|$ durch

$$|\mu_f|(A) = \int_A |f| \, d\mu \quad \text{für } A \in \mathcal{A}$$

gegeben ist.
*Hinweis:* Betrachten Sie die (messbaren) Mengen $A := \{x \in X \mid f(x) \geq 0\}$ und $B := \{x \in X \mid f(x) < 0\}$.