Blatt 3 24.04.2019

Übungen zur Vorlesung

# Maßtheorie und PDE

Sommersemester 2019

Dr. A. Lamacz

## 1) $\sigma$-Additivität und Limeseigenschaft.

Seien $X$ eine Menge und $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra über $X$. Weiterhin sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Abbildung derart, dass $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{A}$. Außerdem gelte für jede Folge messbarer Mengen $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Limeseigenschaft $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. Zeigen Sie, dass $\mu$ ein Maß ist.

## 2) Maße mit Dichten.

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Wir definieren für $A \in \mathcal{A}$

$$\nu(A) := \int_X \mathbb{1}_A \, f \, d\mu.$$

i) Zeigen Sie, dass durch

$$\nu(A) := \int_X \mathbb{1}_A \, f \, d\mu$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert wird.

*Hinweis:* Verwenden Sie den Satz von der monotonen Konvergenz.

ii) Sei $X$ ein topologischer Raum mit $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$ und $\mu$ ein Radon-Maß. Ist zusätzlich die Funktion $f$ beschränkt, dann ist das Maß $\nu$ ein Radon-Maß.

3) Integral bezüglich des Zählmaßes.

Es sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, also $\mu(A) = |A|$, wobei $|A|$ die Anzahl der Elemente von $A$ bezeichne. Zeigen Sie, dass für $f : \mathbb{N} \to [0,\infty]$ gilt:

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

*Hinweis:* Approximieren Sie $f$ durch einfache Funktionen und verwenden Sie den Satz von der monotonen Konvergenz.