Blatt 5 08.05.2019

Übungen zur Vorlesung

Maßtheorie für PDE

Sommersemester 2019

Dr. A. Lamacz

1) ε, δ-Kriterium für absolute Stetigkeit.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$. Sei weiterhin $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein signiertes Maß. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

A1) Es ist $\lambda \ll \mu$.

A2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $\mu(A) < \delta \Rightarrow |\lambda(A)| < \varepsilon$.

Hinweis: Zeigen Sie "$\Rightarrow$" mit einem Widerspruchsbeweis. Nehmen Sie dazu an, dass ein $\varepsilon_0 > 0$ und Mengen $A_j \in \mathcal{A}$ existieren mit $|\lambda(A_j)| \geq \varepsilon_0$ und $\mu(A_j) \leq 2^{-j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie dann $F_k := \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$.

2) Der Raum $C_0(X)$.

Zeigen Sie, dass für $X := \mathbb{R}$ die folgende Mengengleichheit gilt:

$$\begin{aligned} &\{f : X \to \mathbb{R} | f \textit{ stetig, } \forall \varepsilon > 0 \, \exists K \subset X \textit{ kompakt, } |f|(x) < \varepsilon \, \forall x \notin K\} \\ =&\{f : X \to \mathbb{R} | f \textit{ stetig, } \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0\} \\ =&\{f : X \to \mathbb{R} | f \textit{ stetig, } \exists f_k \in C_c(X), \; f_k \to f \textit{ gleichmäßig}\}. \end{aligned}$$

3) Absolute Stetigkeit bezüglich des Lebesgue-Maßes.

Es sei $\mathcal{B}(X)$ die Borel-σ-Algebra über $X := \mathbb{R}$. Seien weiterhin μ das Lebesguemaß auf $\mathcal{B}(X)$ und $\lambda : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ ein positives Maß. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i) Zu jedem $B \in \mathcal{B}(X)$ und jeder Zahl c mit $0 < c < \mu(B)$ gibt es eine Borelmenge $A \subset B$, so dass $\mu(A) = c$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktion $f(t) := \mu(B \cap [-t, t])$ stetig ist.

ii) Es gebe eine Zahl $0 < c < \infty$, so dass für alle $A \in \mathcal{B}(X)$ mit $\mu(A) = c$ auch $\lambda(A) = c$ folgt. Dann gilt auch $\lambda \ll \mu$.

4) Absolute Stetigkeit: Ein Beispiel.

Es sei $\mathcal{B}(X)$ die Borel-σ-Algebra über $X := [0, \infty)$. Seien weiterhin μ das Lebesguemaß auf $\mathcal{B}(X)$ und $\lambda_1, \lambda_2 : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ gegeben durch

$$\lambda_1(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int_{A \cap [n,n+1]} x \, d\mu \qquad \lambda_2(A) := \int_{A \cap [1,\infty)} \frac{1}{x^2} \, d\mu$$

für $A \in \mathcal{B}(X)$. Zeigen Sie, dass λ_1, λ_2 endliche Maße sind und dass sie folgenden Relationen gelten:

$$\lambda_1 \ll \mu, \quad \lambda_2 \ll \mu, \quad \lambda_1 \ll \lambda_2, \quad \lambda_2 \ll \lambda_1$$

und

$$\mu \not\ll \lambda_1, \quad \mu \not\ll \lambda_2.$$