Blatt 6 15.05.2019

Übungen zur Vorlesung

Maßtheorie für PDE

Sommersemester 2019

Dr. A. Lamacz

1) Dualräume I.

Die Menge X bestehe aus zwei Elementen, $X = \{a, b\}$. Wir definieren ein Maß $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ durch $\mu(\{a\}) = 1, \mu(\{b\}) = \mu(X) = \infty$ und $\mu(\emptyset) = 0$. Gilt mit diesem Maß, dass $L^\infty(X, \mu)$ der Dualraum zu $L^1(X, \mu)$ ist, d.h. gibt es eine Bijektion zwischen $(L^1(X, \mu))'$ und $L^\infty(X, \mu)$?

2) Dualräume II.

Sei X eine überabzählbare Menge und $\mathcal{A} := \{A \subset X \,|\, A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$. Weiterhin sei μ das Zählmaß auf $\mathcal{A}$.
Finden Sie ein stetiges lineares Funktional $\Phi : L^1(X, \mu) \to \mathbb{R}$, welches nicht durch eine $L^\infty(X, \mu)$-Funktion dargestellt werden kann.
Hinweis: Es gilt

$$L^1(X, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} \,|\, f(x) = 0 \,\forall\, x \notin M \text{ für ein } M \subset X \text{ abzählbar}, \sum_{x \in M} |f(x)| < \infty\}$$

3) Konvergenz dem Maße nach.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge messbarer Funktionen. Wir sagen , dass die Folge f_n *dem Maße nach* gegen eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert, falls für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mu\left(\{x \in X \,|\, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Es gelte $\mu(X) < \infty$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i) Wenn $f_n(x) \to f(x)$ für μ-fast alle $x \in X$ gilt, dann konvergiert f_n dem Maße nach gegen f.

ii) Sei $1 \leq p \leq \infty$. Falls $f_n, f \in L^p(X, \mu)$ mit $\|f_n - f\|_{L^p(X,\mu)} \to 0$, dann konvergiert f_n dem Maße nach gegen f.

iii) Wenn f_n dem Maße nach gegen f konvergiert, dann besitzt f_n eine Teilfolge, die μ-fast überall gegen f konvergiert.

4) Maße und Funktionale.

Sei $X := (-1, 1)$ und sei $\mathcal{B}(X)$ die Borel-σ-Algebra. Wir betrachten die folgenden Maße auf $\mathcal{B}(X)$:

$$\lambda_k := \delta_{x_k} \quad \text{und } \lambda := \delta_0, \quad \text{wobei } x_k \to 0,\ x_k \neq 0\, \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\nu_k := \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k}\delta_{\frac{j}{k}} \quad \text{und } \nu := \mathcal{L}^1\,|_{(0,1)} \quad \text{(Lebesgue-Maß auf } (0,1))$$

$$\mu_k := \frac{1}{\varepsilon_k}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right) d\mathcal{L}^1 \quad \text{und } \mu := \delta_0,$$

wobei $\varepsilon_k \to 0$ für $k \to \infty$ und $\varphi \in C_c^\infty(X)$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int_X \varphi \, d\mathcal{L}^1 = 1$.

i) Wie sehen die Funktionale $f \mapsto \int_X f\, d\lambda_k$, $f \mapsto \int_X f\, d\nu_k$ und $f \mapsto \int_X f\, d\mu_k$, für $f \in C_0(X)$ konkret aus?

ii) Untersuchen Sie, ob $\lambda_k \to \lambda, \mu_k \to \mu, \nu_k \to \nu$ in der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} = |\cdot|(X)$ (Totalvariation) gilt.

iii) Gilt

$$\int_X f\, d\lambda_k \to \int_X f\, d\lambda, \qquad \int_X f\, d\nu_k \to \int_X f\, d\nu, \qquad \int_X f\, d\mu_k \to \int_X f\, d\mu$$

für alle $f \in C_0(X)$?