Blatt 7 22.05.2019

Übungen zur Vorlesung

Maßtheorie für PDE

Sommersemester 2019

Dr. A. Lamacz

1) Schwache Konvergenz in C_0.

Seien $f_j, f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

1) $f_j \rightharpoonup f$ für $j \to \infty$ schwach in $C_0(\mathbb{R}^n)$ (mit Dualraum $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$).

2) $\sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f_j(x)| < \infty$ und $f_j(x) \to f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

2) Schwache L^1-Konvergenz von Produkten.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $1 < p < \infty$. Es konvergiere $f_j \to f$ stark in $L^p(\Omega, \mathcal{L}^n)$. Weiter sei die Folge $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $L^q(\Omega, \mathcal{L}^n)$ beschränkt, also $\|g_j\|_{L^q(\Omega,\mathcal{L}^n)} \le C$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und konvergiere punktweise fast überall gegen g.

Zeigen Sie: $f_j\, g_j$ konvergiert schwach in $L^1(\Omega, \mathcal{L}^n)$ gegen fg für $j \to \infty$.

3) Konvergenzsatz von Vitali.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset L^1(X, \mu)$ heißt *gleichgradig integrierbar*, falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \ \text{ so dass } \forall E \in \mathcal{A},\ \forall f \in \mathcal{F}:$$
$$\mu(E) < \delta \ \Rightarrow \left| \int_E f\, d\mu \right| < \varepsilon.$$

i) Zeigen Sie, dass einelementige Mengen $\mathcal{F} = \{f\}$ gleichgradig integrierbar sind und folgern Sie, dass dies auch für jede endliche Teilmenge von $L^1(X, \mu)$ gilt.

   Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $A_n := \{x \in X \mid |f(x)| > n\}$ und setzen Sie $\delta := \mu(A_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\int_{A_n} |f|\, d\mu < \varepsilon$.

ii) Sei $\mu(X) < \infty$. Zeigen Sie den Konvergenzsatz von Vitali:

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(X,\mu)$ eine gleichgradig integrierbare Funktionenfolge, welche μ-fast überall gegen f konvergiert. Dann ist $f \in L^1(X,\mu)$ und es gilt die starke Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

Hinweis: Egoroff

iii) Überlegen Sie sich, dass die Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ im Konvergenzsatz von Vitali nicht weggelasssen werden kann.

Hinweis: Betrachten Sie das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und finden Sie eine gleichgradig inegrierbare Folge, welche punktweise gegen $f \equiv 1$ konvergiert.

4) Eine singuläre DGL.

Seien $\Omega := (0,1)$ und u^ε eine Lösung des folgenden Randwertproblems.

$$\begin{aligned} -\varepsilon \cdot \partial_x^2 u^\varepsilon(x) + u^\varepsilon(x) &= 1 \quad \text{in } \Omega \\ u^\varepsilon(0) &= 0 \\ \partial_x u^\varepsilon(1) &= 0 \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung u^ε explizit an. Zeigen Sie, dass $\partial_x u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_0$ in $\mathcal{M}([0,1])$ gilt.