Blatt 8 29.05.2019

Übungen zur Vorlesung

Maßtheorie für PDE

Sommersemester 2019

Dr. A. Lamacz

1) Schwache Konvergenz und Young-Maße

Seien $\Omega := (0,1)$ und $u_k(x) := \cos(2\pi kx)$.

i) Konvergiert die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schwach in $L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ bzw. schwach-$*$ in $L^\infty(\Omega)$?

ii) Bestimmen Sie das Young-Maß ν der Funktionenfolge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Hinweis zu ii) Betrachten Sie für eine beliebige Funktion $f \in C_0(\mathbb{R})$ und beliebige Punkte $x_0, x_1 \in (0,1)$ mit $x_0, x_1 \in \frac{1}{k}\mathbb{N}$ das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(u_k(x))\,dx = \sum_{j=x_0\cdot k}^{x_1\cdot k-1} \left\{ \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j}{k}+\frac{1}{2k}} f(u_k(x))\,dx + \int_{\frac{j}{k}+\frac{1}{2k}}^{\frac{j+1}{k}} f(u_k(x))\,dx \right\}$$

und verwenden Sie eine geeignete Substitution.

2) Young-Maße.

Seien $\Omega := (0,1)$ und $u_k(x) := ax + b\cos(2\pi kx)$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Young-Maß der Funktionenfolge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (ohne einen rigorosen Beweis).

3) Konvergenz dem Maße nach und Young-Maße.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|\Omega| < \infty$. Seien $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen und $\nu \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ das zugehörige Young-Maß.

Zeigen Sie: u_k konvergiert genau dann dem Maße nach gegen u, falls $\nu_x = \delta_{u(x)}$ für fast alle $x \in \Omega$.

Anleitung: Für "$\Rightarrow$" verwenden Sie $f(u_k) \to f(u)$ dem Maße nach für alle $f \in C_0(\mathbb{R})$ sowie Aufgabe 3 iii) von Blatt 6. Für die umgekehrte Richtung betrachten Sie die Abschätzung

$$\limsup_{k\to\infty} |\{|u_k - w| > \varepsilon\}| \leq \left|\left\{|u - w| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

für alle $w : \Omega \to \mathbb{R}$ einfach. Verwenden Sie, dass u messbar ist und dass messbare Funktionen punktweise durch einfache Funktionen approximierbar sind.