Übungen zur Vorlesung

Maßtheorie für PDE

Sommersemester 2019

Dr. A. Lamacz

1) Unterhalbstetigkeit

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind

1) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\liminf_{y\to x} f(y) \geq f(x)$.
2) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass
$$f(y) \geq f(x) - \varepsilon \quad \text{für alle } y \in B_\delta(x).$$
3) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, f(x) > \lambda\}$ offen.

2) Ableitung von Maßen

Sei μ ein endliches Borel-Maß auf $\mathbb{R}$ und $f(x) := \mu((-\infty, x))$ für $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) Die Funktion f ist in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = c$.
2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass
$$\left|\frac{\mu(I)}{m(I)} - c\right| \leq \varepsilon$$
für jedes Intervall $I = [a, b)$ mit $(b - a) \leq \delta$ und $x_0 \in I$.

3) Eine Anwendung von Satz 7.9

Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ beliebig. Zeigen Sie, dass keine Borelmenge $E \subset \mathbb{R}$ existiert, so dass
$$\varepsilon < \frac{m(E \cap I)}{m(I)} < 1 - \varepsilon \qquad \text{für jedes Intervall } I \subset \mathbb{R}.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage mit einem Widerspruchsbeweis. Nehmen Sie also an, dass eine solche Menge existiert. Betrachten Sie dann die Funktion

$$f(y) := \chi_{E\cap(x-r,x+r)}(y) \quad \text{für } r > 0 \quad \text{und } x \in \mathbb{R}.$$

Überlegen Sie sich, welches die Lebesguepunkte von f sind und leiten Sie daraus den Widerspruch her.

4) Distributionsableitungen

Bestimmen Sie die Distributionsableitungen der folgenden Funktionen $u : D \to \mathbb{R}$.

a) $D = (-1, 1) \subset \mathbb{R}, \qquad u(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

b) $D = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, \qquad u(x) = |x|.$

Hinweis zu b) Betrachten Sie die Integrale über $B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)$ und $B_\varepsilon(0)$ und bilden Sie den Grenzwert $\varepsilon \to 0$.