Blatt 10 19.06.2019

Übungen zur Vorlesung

Maßtheorie für PDE

Sommersemester 2019

Dr. A. Lamacz

1) Hölder-Norm und $W^{1,p}$-Norm.

Seien $1 < p \leq \infty$ und $\alpha := 1 - \frac{1}{p}$ sowie $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für $f \in C^1(I)$ und $x_0 \in I$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(I)} \leq |f(x_0)| + C\|f'\|_{L^p(I)},$$

wobei $\|f\|_{C^{0,\alpha}(I)} := \|f\|_\infty + \sup_{\substack{x,y\in I\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$ die Hölder-Norm von f bezeichne.

2) Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wir definieren der Raum der *absolut stetigen Funktionen* auf I durch

$$AC(I) := \Big\{ f \in C(\bar{I}) \mid \text{Es gibt ein } g \in L^1(I), \text{ so dass für alle } x_1, x_2 \in I : \\ f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx \Big\}.$$

Zeigen Sie: Ist $f \in W^{1,1}(I)$, so gilt für fast alle $x_1, x_2 \in I$

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx$$

für die distributionelle Ableitung f'. Ist weiterhin $x_1 \in I$ fest, so dass diese Identität für fast alle $x_2 \in I$ gilt, so folgt $f = F$ fast überall, wobei

$$F(y) := f(x_1) + \int_{x_1}^{y} f'(x)\,dx.$$

$F \in AC(I)$ ist der eindeutige absolut stetige Repräsentant von f.
Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass für fast alle $x_1, x_2 \in I$ und $\varepsilon > 0$ klein

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_2-\varepsilon}^{x_2+\varepsilon} f(x)\,dx - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx + o(\varepsilon)$$

gilt.

Bemerkung: Es gilt auch die umgekehrte Inklusion, also $AC(I) \subset W^{1,1}(I)$.

3) Null-dimensionales Hausdorff-Maß.

Sei $A := \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \subset \mathbb{R}^n$ eine endiche Menge. Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^0(A) = N$. Das null-dimesnionale Hausdorff-Maß entspricht also dem Zählmaß.

4) Zusatzaufgabe: Absolute Stetigkeit und monotone Funktionen.

Sei $I = [0, 1]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1) f ist absolut stetig auf I.

2) f bildet Nullmengen auf Nullmengen ab.