Blatt 11 03.07.19

Übungen zur Vorlesung

Maßtheorie für PDE

Sommersemester 2019

Dr. A. Lamacz

1) Hausdorff-Maß einer Geraden.

Es seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Es sei weiterhin $\gamma(t) := a + t(b-a)$ für $t \in [0,1]$ die Verbindungsgerade zwischen a und b.
Bestimmen Sie das 1-dimensionale Hausdorff-Maß der Geraden, $\mathcal{H}^1(\gamma([0,1]))$.

2) Hausdorff-Dimension der Cantor-Menge.

Die Cantor-Menge ist durch die folgende Rekursion gegeben. Man definiere $C_0 := [0,1]$, entferne das mittlere offene Drittel, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, und setze $C_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Entfernt man aus jedem Teilintervall von C_1 wiederum das mittlere offene Drittel, so gelangt man zu $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Auf jedes Teilntervall wende man die gleiche Prozedur an. So erhält man rekursiv eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Teilmengen von $[0,1]$. Wir definieren die Cantor-Menge C als den Durchschnitt der C_n,

$$C := \bigcap_{n \in N_0} C_n \ .$$

Es sei $s := \mathcal{H}\text{-}dim(C)$ die Haussdorff-Dimension von C.

i) Bestimmen Sie s mit Hilfe eines Skalierungsarguments (vgl. Satz 8.3 aus der Vorlesung). Dabei dürfen Sie annehmen, daß

$$0 < \mathcal{H}^s(C) < \infty \qquad (*).$$

ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}\text{-}dim(C) \leq \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ gilt, ohne die Annahme $(*)$ zu verwenden.