Maßtheorie für Partielle Differentialgleichungen

Agnes Lamacz

Universität Duisburg-Essen

Nach dem Skript von Ben Schweizer, TU Dortmund

Material für das Sommersemester 2019

Inhaltsverzeichnis

I Allgemeine Maßtheorie 7

1 Maßräume 8

1.1 Definitionen und Beispiele . . . 8
1.2 Äußere Maße . . . 11

2 Integrale 17

2.1 Messbare Funktionen . . . 17
2.2 Integrale messbarer Funktionen . . . 18

3 Radon-Maße 21

3.1 Definitionen . . . 21
3.2 Der Darstellungssatz für positive Funktionale . . . 22

4 Signierte Maße 27

4.1 Definitionen, Radon-Nikodym & Lebesgue . . . 27
4.2 Der Riesz'sche Darstellungssatz . . . 34

II Erweiterungen und Anwendungen 41

5 Schwache Konvergenz 42

5.1 Definitionen und Kompaktheit . . . 42
5.2 Schwache Konvergenz in L^p und in $\mathcal{M}$ . . . 48

6 Singuläre Probleme und Young-Maße 54

6.1 Zwei singuläre gewöhnliche DGL. . . . 54
6.2 Young-Maße . . . 56

7 Feine Eigenschaften von Funktionen 62

7.1 Ableitungen von Maßen und Lebesgue-Punkte . . . 62
7.2 Punktweises Differenzieren von Funktionen . . . 67

8 Hausdorff-Maße 72

8.1 Definition und elementare Eigenschaften . . . 72
8.2 Isodiametrische Ungleichung und $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ . . . 78

9 Der Raum BV 83

9.1 Definitionen und BV im Eindimensionalen . . . 84
9.2 Approximation und Kompaktheit . . . 89

Literatur

Für das Studium des Stoffes empfehlen sich die folgenden Lehrbücher, die auch als Vorlage in der Vorbereitung dieser Vorlesung dienten.

Rudin Real and Complex Analysis Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

Evans, Gariepy Measure Theory and Fine Properties of Functions. Advanced Studies in Mathematics, CRC Press, 1992.

Ambrosio, Fusco, Pallara Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems. Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, 2000.

Schilling Measures, Integrals and Martingales. Cambridge University Press, 2005.

Dabei sind die wesentlichen Vorlagen die zwei Erstgenannten. Rudin entwickelt die Maßtheorie und war die Hauptvorlage für Teil I. Evans und Gariepy benutzen die Maßtheorie als ein Werkzeug für das Studium von Funktionen. Ihr Buch war Vorlage für Teil II. Das dritte Buch ist eine wichtige Referenz für andere und oft kürzere Beweise. Das vierte Lehrbuch kann für einen unproblematischen Einstieg in die Sprache der Maßtheorie verwendet werden.

Wichtigste Ergebnisse

Wir beweisen in dieser Vorlesung einige wichtige Sätze, die immer wieder in Anwendungen und in der Entwicklung weiterer Theorie gebraucht werden.

- Der Begriff des Maßes, des Borel- und des Radon-Maßes in Kapitel 1 und 3
- Das (Lebesgue-)Integral in Kapitel 2
- Der Satz von Radon-Nikodym in Abschnitt 4.1
- Die Charakterisierung $(L^p)' = L^q$ in Satz 4.12 in 4.2
- Der Darstellungssatz von Riesz, also $\mathcal{M} = (C^0)'$, Satz 4.13, Abschnitt 4.2

Die wichtigsten Anwendungen sind neue Begriffe, die für die Analyse von Funktionen zentral sind. Dazu zählen

- Schwache Konvergenz in Kapitel 5
- Young-Maße in 6.2
- Lebesgue-Punkte in Satz 7.9 in 7.1
- Rademachers Theorem, Satz 7.16 in 7.2
- Das Hausdorff-Maß in Kapitel 8
- BV-Funktionen in Kapitel 9

Voraussetzungen

Wir setzen Analysis I-III voraus, insbeondere eine gewisse Vertrautheit mit L^p-Räumen und dem Lebesgue-Integral. Alle oben erwähnten Sätze werden in dieser Vorlesung vollständig bewiesen. Die einzigen hier nicht bewiesenen Grundlagen sind aus der Funktionalanalysis

- Der Satz von Hahn-Banach, zitiert in Satz 5.1
- Der Hilbertraum-Darstellungssatz von Riesz, zitiert in Satz 4.4
- Sobolev-Einbettungen und Morrey-Abschätzung

Weiterhin beweisen wir hier nicht (obwohl wir diese Ergebnisse im Kapitel über Hausdorff-Maße verwenden)

- Fubini
- Vitali-Überdeckungssatz

Dieser Text ist ursprünglich entstanden als das Skript zu der gleichnamigen Vorlesung von Ben Schweizer an der TU Dortmund im Sommersemester 2008. Im Sommersemester 2016 wurde die Vorlesung gemeinsam von Ben Schweizer und Agnes Lamacz an der TU Dortmund gehalten und das Skript weiter überarbeitet.

Teil I.

Allgemeine Maßtheorie

1. Maßräume

1.1. Definitionen und Beispiele

Notation: Sei X eine Menge. Wir definieren das Komplement einer Menge $M \subset X$ als $M^{\complement} := X \setminus M = \{x \in X | x \notin M\}$ und die Potenzmenge von X als $\mathcal{P}(X) := \{M \mid M \subset X\}$.

Definition 1.1 (σ-Algebra)**.** *Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt σ-Algebra über X, falls*

(S1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ *(und $X \in \mathcal{A}$)*

(S2) $M \in \mathcal{A} \Rightarrow M^{\complement} \in \mathcal{A}$

(S3) $M_k \in \mathcal{A}$ *für alle* $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k \in \mathcal{A}$.

Definition 1.2 (Maß)**.** *Ein* **Maßraum** *ist ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$, wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X ist und μ ein Maß. Dabei ist ein* **Maß** *eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit der Eigenschaft*

(M1) Falls $M_k \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $M_k \cap M_\ell = \emptyset$ für alle $k \neq \ell$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(M_k).$$

In einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißen die Mengen $M \in \mathcal{A}$ die ***meßbaren Mengen****. Wir nehmen dabei immer an, dass ein $M \in \mathcal{A}$ existiert mit $\mu(M) < \infty$.*

Definition 1.3 (Borel-σ-Algebra)**.** *Sei X eine Menge mit einer Topologie. Die* **Borel-σ-Algebra** *$\mathcal{B}(X)$ ist die kleinste σ-Algebra, die die offenen Teilmengen von X enthält. Ein Maß μ zu einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist ein* **Borel-Maß***, falls $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(X)$.*

Für ein Borel-Maß sind alle Borel-Mengen messbar, insbesondere sind alle offenen Mengen messbare Mengen.

Beispiele

Beispiele für σ-Algebren

Sei X eine beliebige Menge.

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ ist eine σ-Algebra.
- $\mathcal{P}(X)$ ist σ-Algebra.

- Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Dann ist $\mathcal{L}(X) = \{M \subset X \mid M \textit{ Lebesgue messbar}\}$ eine σ-Algebra.
- Sei $x_0, x_1 \in X$ und
$$\mathcal{A} = \{M \subset X \mid \text{entweder } x_0, x_1 \in M \text{ oder } x_0, x_1 \in M^{\complement}\}.$$

Das letzte Beispiel hat eine wichtige Interpretation in stochastischen Anwendungen: Eine σ-Algebra kodiert Information; die σ-Algebra des Beispiels kann zwischen x_0 und x_1 nicht unterscheiden.

Bemerkung 1.4. *Sei X eine Menge, $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$, so dass für alle σ-Algebren $\mathcal{D}$ mit $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ gilt: $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$. Kurz: "$\mathcal{A}$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{N}$ enthält".*

Bemerkung 1.4 beweist, dass in jedem topologischen Raum X eine eindeutige Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ wie in Definition 1.3 existiert.

Beweis. Bilde $\mathcal{A} := \bigcap_{\mathcal{D}} \mathcal{D}$, den Schnitt über alle σ-Algebren $\mathcal{D}$ mit $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$. Die Menge $\mathcal{A}$ existiert, weil $\mathcal{D} = \mathcal{P}(X)$ eine erlaubte σ-Algebra ist. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

1. $\emptyset, X \in \mathcal{D}$ für alle $\mathcal{D} \Rightarrow \emptyset, X \in \mathcal{A}$.
2. $M \in \mathcal{A} \Rightarrow M \in \mathcal{D}\ \forall \mathcal{D} \Rightarrow M^{\complement} \in \mathcal{D}\ \forall \mathcal{D} \Rightarrow M^{\complement} \in \mathcal{A}$.
3. $M_k \in \mathcal{A}\ \forall k \in \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{D}$ beliebig. $M_k \in \mathcal{D}\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k \in \mathcal{D}$. Da $\mathcal{D}$ beliebig war, ist $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k \in \mathcal{A}$.

Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{D}} \mathcal{D}$ tatsächlich eine σ-Algebra ist. □

Beispiele für Maßräume

- **Lebesgue-Maß.** Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $\mu := \mathcal{L}^n$ das Lebesgue-Maß. Dann ist $(X, \mathcal{L}(X), \mu)$ ein Maßraum.
- **Gewichtetes Lebesgue-Maß.** Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ wie oben, dazu $f : X \to [0, \infty)$ eine Funktion der Klasse $L^1(X)$. Dann ist $(X, \mathcal{L}(X), \mu)$ mit $\mu(M) := \int_M f$ ein Maßraum.
- **Dirac-Maß.** Sei X eine Menge, $x_0 \in X$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Dann definiert man das Dirac-Maß in x_0 durch $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$,
$$\mu(M) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x_0 \in M \\ 0 & \text{falls } x_0 \notin M. \end{cases}$$
Notation: Wir schreiben δ_{x_0} für das Dirac-Maß in x_0.

Ein stochastisches Beispiel

In diesem Abschnitt schreiben wir $\mathcal{P}(...)$ als Abkürzung für *Wahrscheinlichkeit für ...*

Maße sind der zentrale Begriff der Wahrscheinlichkeitstheorie. Unser nächstes Beispiel soll zeigen, warum. Wir nehmen dabei an, dass wir einen idealen Zufallszahlengenerator haben, der alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 mit derselben Wahrscheinlichkeit erzeugt.

Eine Zufallszahl X wird wie folgt ermittelt. Zunächst werfen wir eine Münze. Falls diese *Kopf* zeigt, so setzen wir $X := 0.2$. Falls die Münze dagegen *Zahl* zeigt, so wählen wir mit unserem Zufallszahlengenerator die Zahl $X \in [0,1]$ zufällig.

Frage: Wie beschreiben wir die *Verteilung* von X?

Klar ist: Die Wahrscheinlichkeit, dass $X = 0.2$, ist genau $\frac{1}{2}$,

$$\mathcal{P}(X = 0.2) = \frac{1}{2}.$$

Aber leider ist für jede andere Zahl $x_0 \in [0,1]$, $x_0 \neq 0.2$, die Wahrscheinlichkeit, dass wir genau diese Zahl finden, Null,

$$\mathcal{P}(X = x_0) = 0.$$

Diese Aussagen sagen also nicht viel darüber, wie wahrscheinlich welches Ergebnis für X ist.

Die Lösung ist, mit Mengen zu arbeiten. Für ein beliebiges Intervall $A = [a,b] \subset [0,1]$ setzen wir

$$\mu(A) := \begin{cases} \frac{1}{2}(b-a) & \text{falls } 0.2 \notin A, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(b-a) & \text{falls } 0.2 \in A \end{cases}$$

Diese auf Intervallen definierte Funktion beschreibt die Verteilung der Werte von X und es gilt $\mathcal{P}(X \in A) = \mu(A)$.

Leider hat die obige Beschreibung einige technische Nachteile. Zum Beispiel würden wir gerne für zwei disjunkte Intervalle $A_1, A_2 \subset [0,1]$ rechnen

$$\mathcal{P}(X \in A_1 \cup A_2) = \mathcal{P}(X \in A_1) + \mathcal{P}(X \in A_2),$$

also, mit unserem „Maß“:

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Dies ist aber leider nicht möglich, denn $A_1 \cup A_2$ ist kein Intervall mehr, und μ ist auf dieser Vereinigung zweier Intervalle nicht definiert. Um solche Rechnungen durchführen zu können, wollen wir μ auf einer σ-Algebra von Mengen definieren.

Die richtige Beschreibung ist der folgende Maßraum, der das eindimensionale Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^1$ und das Dirac-Maß $\delta_{0.2}$ verwendet.

$$\begin{aligned} X &:= [0,1] \\ \mathcal{A} &:= \mathcal{B}(X) \\ \mu(A) &:= \begin{cases} \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A) & \text{falls } 0.2 \notin A, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A) & \text{falls } 0.2 \in A \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}\delta_{0.2}(A) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A). \end{aligned}$$

Hier hätten wir ebensogut die σ-Algebra der $\mathcal{L}^1$-Lebesgue-meßbaren Mengen wählen können. Mit der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f \equiv \frac{1}{2}$ können wir auch schreiben

$$\mu(A) := \begin{cases} \int_A f & \text{falls } 0.2 \notin A, \\ \frac{1}{2} + \int_A f & \text{falls } 0.2 \in A. \end{cases}$$

Damit kann f als eine Dichte der Verteilung von X interpretiert werden.

Kommentar: In diesem Beispiel hätte man auch die Verteilungsfunktion $F(x) := \mathcal{P}(X \leq x)$ verwenden können, also $F(x) = \mu([0,x])$. Diese Möglichkeit wird allerdings in höherer Raumdimension komplizierter, man muss dann für $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $F(x) = \mathcal{P}(X_k \leq x_k \forall k \leq n)$ verwenden. Letzlich führt das wieder auf die Mengenbewertung zurück, bei der man das Maß für Rechtecke der Form $(-\infty, x_1) \times ... \times (-\infty, x_n)$ angibt.

Geometrische Beispiele für Maße (ein Ausblick)

- **Punkte** $x = (x_1, ..., x_n)$ **in** $X = \mathbb{R}^n$**.** Ein Punkt $x \in X$ ist durch die Angabe seiner Koordinaten spezifiziert. Eine Alternative ist die Beschreibung eines Punktes $x \in X$ durch sein Dirac-Maß δ_x.

  Ein Vorteil dieser Beschreibung in Anwendungen ist: N Punkte im Raum, gegeben durch $x^1, ..., x^N$, sind durch das (eine!) Maß $\mu^N := \sum_{k=1}^N \delta_{x^k}$ beschrieben. Die gewichteten Maße $\frac{1}{N}\mu^N$ beschreiben die Dichte der Punktwolke (es gilt $\frac{1}{N}\mu^N(X) = 1$). Oft kann ein Grenzübergang $N \to \infty$ für diese Maße durchgeführt werden, $\frac{1}{N}\mu^N \to \nu$ im geeigneten Sinne für ein Grenzmaß ν auf $\mathbb{R}^n$.
- Betrachte die Gerade $\Gamma := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$. Diese Gerade wollen wir nun ebenfalls als Maß beschreiben. Dazu sei $R = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ ein beliebiges Rechteck im $\mathbb{R}^2$. Wir setzen als Maß

  $$\begin{aligned} \mu(R) &:= \textit{Länge von } \Gamma \cap R \\ &= \begin{cases} \sqrt{2} \cdot (\min\{b_1, b_2\} - \max\{a_1, a_2\}), & \text{falls } \min\{b_1, b_2\} \geq \max\{a_1, a_2\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

  Dies ist noch auf beliebige Testmengen zu verallgemeinern. Das Ergebnis ist: $\mu = \mathcal{H}^1 \lfloor \Gamma$, das 1-dimensionale Hausdorffmaß, eingeschränkt auf Γ.

1.2. Äußere Maße

Definition 1.5 (Äußeres Maß)**.** *Sei X eine Menge. Dann heißt μ ein äußeres Maß auf X, falls*

(A1) $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *mit* $\mu(\emptyset) = 0$

(A2) Monotonie: Für $A \subset B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$

(A3) σ-Subadditivität: $A_k \in \mathcal{P}(X)$ $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$.

Die Ungleichheit in der letzten Formel hat eine doppelte Bedeutung. Zum einen wird auch für Maße die linke Seite typischerweise kleiner sein als die rechte Seite, denn wir haben nicht gefordert, dass die A_k disjunkt sind. Zum anderen aber gewähren wir an dieser Stelle den äußeren Maßen tatsächlich eine zusätzliche Freiheit (im Gegensatz zur Gleichheit in der Definition 1.2 von Maßen). Es gilt: Jedes Maß auf $\mathcal{P}(X)$ ist auch ein äußeres Maß.

Lebesgue äußeres Maß

Hier betrachten wir nur Grundmengen $X \subset \mathbb{R}^n$. Für eine Menge $A \subset X$ soll $\mu(A)$ als ein "Maß" für das Volumen von A konstruiert werden.

Wir beginnen die Konstruktion mit n-dimensionalen Rechtecken $R = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ und setzen $\mu(R) := \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$. Für beliebige Mengen A definieren wir dann

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) \,\middle|\, R_k \text{ ein Rechteck } \forall k \in \mathbb{N},\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \right\}.$$

Wir behaupten, dass μ ist ein äußeres Maß auf X definiert. Es wird als das äußere Lebesgue-Maß bezeichnet.

Beweis der Behauptung:

Zu (A1) $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ und $\mu(\emptyset) = 0$ sind klar.

Zu (A2) Die Monotonie ist ebenfalls trivialerweise erfüllt, für $A \subset B$ ist eine B-Überdeckung immer gleichzeitig eine A-Überdeckung.

Zu (A3) Seien A_j Mengen und $\varepsilon > 0$. Wir finden zu jedem A_j eine Überdeckung $A_j \subset \bigcup_k R_{j,k}$ mit

$$\mu(A_j) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_{j,k}) - \varepsilon \cdot 2^{-j}.$$

Für $A := \bigcup_j A_j$ gilt $A \subset \bigcup_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} R_{j,k}$. Wir können also berechnen

$$\mu(A) \leq \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} \mu(R_{j,k}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(R_{j,k}) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} (\mu(A_j) + \varepsilon \cdot 2^{-j}) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mu(A) \leq \sum_j \mu(A_j)$.

Konstruktion eines Maßes aus einem äußeren Maß

Gegeben sei ein äußeres Maß μ. Dann ist μ im Allgemeinen kein Maß, denn die Formel für das Maß disjunkter Vereinigungen ist im Allgemeinen nicht erfüllt. Wir können dieses Problem aber mit einem eleganten Schritt beseitigen, nämlich mit Hilfe einer Definition ("Mathematikertrick"): Wir definieren die Menge der messbaren Mengen so, dass die Maß-Formel für alle messbaren Mengen gilt.

Definition 1.6. *Sei μ ein äußeres Maß auf einer Menge X. Wir nennen eine beliebige Teilmenge $A \subset X$ messbar (bezüglich μ), falls für alle Testmengen $B \subset X$ gilt*

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A). \tag{1.1}$$

Wegen der Subadditivität des äußeren Maßes ist die obige Bedingung äquivalent zu

$$\mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A). \tag{1.2}$$

Satz 1.7. *Sei X eine Menge, μ ein äußeres Maß, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ die Familie messbarer Mengen bezüglich μ. Dann ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.*

Strenggenommen sollte es im Satz heißen: $(X, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$ ist ein Maßraum für die Einschränkung $\tilde{\mu} := \mu\lfloor\mathcal{A} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist und dass μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist. Die einfachen Schritte sind: $\emptyset \in \mathcal{A}$, denn für $B \subset X$ beliebig gilt $\mu(B \cap \emptyset) + \mu(B \setminus \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(B) = 0 + \mu(B) = \mu(B)$.
Weiterhin gilt $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{A}$, denn (1.1) aus der Definition kann symmetrisch geschrieben werden als

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu\,(B \setminus A) = \mu(B \setminus A^{\complement}) + \mu(B \cap A^{\complement}).$$

Wir kommen zum eigentlichen Teil, der σ-Additivität und der Messbarkeit abzählbarer Vereinigungen.

Schritt 1. Formeln für endliche Vereinigungen. Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ disjunkt.

$$\mu(A_1 \cup A_2) \overset{A_1 \in \mathcal{A}}{=} \mu((A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu((A_1 \cup A_2) \setminus A_1) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Wir beobachten, dass wir hier nur die Messbarkeit von A_1 verwenden. Diese Tatsache wollen wir noch ausnutzen, um eine etwas allgemeinere Additivitätsformel herzuleiten (diese wird im letzten Schritt des Beweises benötigt). Sei dazu $M \in \mathcal{P}(X)$ beliebig und $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mu((M \cap A_1) \cup (M \cap A_2)) &\overset{A_1 \in \mathcal{A}}{=} \mu((M \cap A_1) \cup (M \cap A_2) \cap A_1) \\
&\quad + \mu([(M \cap A_1) \cup (M \cap A_2)] \setminus A_1) \\
&\overset{A_1 \cap A_2 = \emptyset}{=} \mu(M \cap A_1) + \mu(M \cap A_2).
\end{aligned}$$

Induktiv zeigt man: Sind endlich viele $A_k \in \mathcal{A}$ disjunkt und $M \in \mathcal{P}(X)$, dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k), \qquad \mu\left(M \cap \bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(M \cap A_k). \tag{1.3}$$

Schritt 2. Messbarkeit endlicher Vereinigungen. Sei $B \in \mathcal{P}(X)$ und $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Zu zeigen ist:

$$\mu(B) \geq \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1) && \text{Messbarkeit von } A_1 \\
&= \mu((B \cap A_1) \cap A_2) + \mu((B \cap A_1) \setminus A_2) && \text{Messbarkeit von } A_2 \\
&\quad + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)).
\end{aligned}$$

Damit bleibt nur noch zu zeigen, dass

$$\mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) \leq \mu(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu((B \cap A_1) \setminus A_2) + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2).$$

Dies ist aber klar, denn es gilt die zugehörige Mengeninklusion

$$B \cap (A_1 \cup A_2) \subset (B \cap A_1 \cap A_2) \cup ((B \cap A_1) \setminus A_2) \cup ((B \cap A_2) \setminus A_1).$$

Wegen Monotonie und Subadditivität des äußeren Maßes folgt damit die Messbarkeitsrelation.

Wir haben damit gezeigt, dass $A_1 \cup A_2$ messbar ist. Induktiv erhält man, dass für messbare Mengen A_k und $N \in \mathbb{N}$ auch $\bigcup_k^N A_k$ messbar ist.

Schritt 3. Formeln für unendliche Vereinigungen. Die Mengen A_k seien messbar für $k \in \mathbb{N}$ und disjunkt. Dann gilt für $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$

$$\mu(A) \overset{\text{Monotonie}}{\geq} \mu\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) \overset{(1.3)}{=} \sum_{k=1}^N \mu(A_k) \overset{N\to\infty}{\to} \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k) \overset{(A3)}{\geq} \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \mu(A).$$

Also ist $\mu(A) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$. Ebenso folgt für beliebige $M \subset X$ die Relation $\mu(M \cap A) = \sum_{k=1}^\infty \mu(M \cap A_k)$.

Schritt 4. Messbarkeit unendlicher Vereinigungen. Aus Schritten 1. und 2. folgt auch

$$\mu(M \setminus \bigcup_{k=1}^N A_k) = \mu(M) - \mu\left(M \cap \bigcup_{k=1}^N A_k\right) \overset{(1.3)}{=} \mu(M) - \sum_{k=1}^N \mu(M \cap A_k) \tag{1.4}$$

für A_k messbar und disjunkt. Sei nun $A := \bigcup_{j=1}^k B_k$ mit B_k messbar, aber nicht notwendigerweise disjunkt. Dann lässt sich A auch als Vereinigung disjunkter messbarer Mengen $A_1 := B_1$, $A_{k+1} := B_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^k B_j$ schreiben. Somit folgern wir, für $M \subset X$ beliebig,

$$\begin{aligned}\mu(M \setminus A) \leq \mu\left(M \setminus \bigcup_{k=1}^N A_k\right) &\overset{(1.4)}{=} \mu(M) - \sum_{k=1}^N \mu(M \cap A_k)\\ &\overset{N\to\infty}{\to} \mu(M) - \sum_{k=1}^\infty \mu(M \cap A_k) \overset{\text{Schritt 3.}}{=} \mu(M) - \mu\left(M \cap \bigcup_{k=1}^\infty A_k\right).\end{aligned}$$

Insgesamt also $\mu(M) \geq \mu(M \setminus A) + \mu(M \cap A)$ für $M \subset X$ beliebig. Also gilt die Messbarkeit der unendlichen Vereinigung $A = \bigcup_{k=1}^\infty B_k = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. □

Definition 1.8. *Satz 1.7 liefert zum äußeren Lebesgue-Maß μ einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu) = (X, \mathcal{L}(X), \mathcal{L}^n)$. Dieser Raum heißt* ***Lebesgue-Maßraum****, $\mathcal{L}(X)$ sind die* ***Lebesgue-messbaren Mengen*** *und $\mathcal{L}^n$ ist das n-dimensionale* **Lebesgue-Maß.**

Nach Bemerkung 1.9 unten gilt $R \in \mathcal{L}(X)$ für alle Rechtecke $R = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$. Dann sind auch alle offenen Mengen in $\mathcal{L}(X)$. Begründung: Sei U offen. Dann ist $U = \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}^n} R_x$, wobei R_x ein geeignetes kleines Rechteck um x ist. Also ist die offene Menge U messbar. Dann gilt aber sogar: $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{L}(X)$, das Lebesgue-Maß ist ein Borel-Maß (siehe Definition 1.3).

Bemerkung 1.9. *Sei $R = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$ ein Rechteck. Dann ist R Lebesgue-messbar. Zum Beweis betrachten wir eine beliebige Testmenge $B \subset X$ und zeigen, dass $\mu(B) \geq \mu(B \cap R) + \mu(B \setminus R)$.*

Zu $\varepsilon > 0$ existieren Rechtecke R_k mit $B \subset \bigcup_k R_k$ und $\mu(B) \geq \sum_k \mu(R_k) - \varepsilon$. Wir folgern

$$\begin{aligned}\mu(B) &\geq \sum_k \mu(R_k) - \varepsilon = \sum_k \left(\mu(R_k \cap R) + \mu(R_k \setminus R)\right) - \varepsilon \\ &\geq \mu\left(\bigcup_k (R_k \cap R)\right) + \mu\left(\bigcup_k R_k \setminus R\right) - \varepsilon \\ &\geq \mu(B \cap R) + \mu(B \setminus R) - \varepsilon.\end{aligned}$$

In der ersten Zeile haben wir ausgenutzt, dass nach Konstruktion des äußeren Lebesgue-Maßes $\mu(R) = \mu(R \cap \tilde{R}) + \mu(R \setminus \tilde{R})$ für zwei Rechtecke $R, \tilde{R}$ gilt. Der letzten Schritt gilt wegen der Monotonie von μ. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt damit die Messbarkeit von R.

Proposition 1.10 (Caratheodory-Kriterium)**.** *Sei μ ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit der folgenden Eigenschaft:*

> *Für $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{\operatorname{dist}(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\} > 0$ gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (wir fordern nicht die Messbarkeit von A und B).*

Dann ist μ ein Borel-Maß. Genauer: Ist $\mathcal{A}$ die Menge μ-messbarer Mengen, dann gilt $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Wir zeigen: C ist messbar, das heißt für $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig gilt $\mu(A) = \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C)$. Da μ äußeres Maß ist, gilt hier „$\leq$“ automatisch. Es bleibt also „$\geq$“ zu zeigen.

Ohne Einschränkung sei $\mu(A) < \infty$, denn sonst ist die Ungleichung „$\geq$“ trivialerweise erfüllt.

Schritt 1. Setze $C_k := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k}\right\} \supset C$. Es gilt $\operatorname{dist}(A \setminus C_k, A \cap C) > 0$. Also ist

$$\mu(A) \geq \mu((A \setminus C_k) \cup (A \cap C)) = \mu(A \setminus C_k) + \mu(A \cap C).$$

Zu zeigen ist also $\mu(A \setminus C_k) \to \mu(A \setminus C)$ für $k \to \infty$.

Schritt 2. Betrachte $R_k := \left\{x \in A \mid \operatorname{dist}(x, C) \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]\right\}$. Dann gilt $A \setminus C = (A \setminus C_k) \cup (\bigcup_{l=k}^{\infty} R_l)$ und $\operatorname{dist}(R_k, R_\ell) > 0$ für alle k, ℓ mit $|k - \ell| \geq 2$. Damit gilt für $N \in \mathbb{N}$ beliebig

$$\sum_{k \leq N,\ k \text{ gerade}} \mu(R_k) = \mu\left(\bigcup_{k \leq N,\ k \text{ gerade}} R_k\right) \leq \mu(A) < \infty$$

und somit auch $\sum_{k \text{ gerade}} \mu(R_k) < \infty$. Ebenso ist $\sum_{k \text{ ungerade}} \mu(R_k) < \infty$.
Wegen $A \setminus C = (A \setminus C_k) \cup \bigcup_{\ell \geq k} R_\ell$ folgert man

$$\mu(A \setminus C) \leq \mu(A \setminus C_k) + \sum_{\ell \geq k} \mu(R_\ell).$$

Für k hinreichend groß ist $\sum_{\ell \geq k} \mu(R_\ell)$ hinreichend klein. □

Liste wichtiger Begriffe und Ergebnisse

Wir geben hier einen Überblick über wichtige Begriffe, die in diesem Text vorkommen.

- Ein **Maß** ist eine Abbildung, welche Mengen auf reelle Zahlen abbildet. Normalerweise nehmen wir Werte in $[0, \infty) \cup \{\infty\}$ an, zur Betonung sprechen wir dann auch von einem **positiven Maß**, siehe Definition 1.2. Ein **signiertes Maß** nimmt Werte in $(-\infty, \infty)$ an, siehe Definition 4.1.
- Für ein **Borel-Maß** sind alle Borel-Mengen messbar, siehe Definition 1.3.
- Ein **Radon-Maß** hat Regularitätseigenschaften, z.B. sind messbare Mengen von außen durch offene Mengen mit ähnlichem Maß approximierbar, siehe Definition 3.1.
- **Absolutstetigkeit** von Maßen ($\lambda \ll \mu$) und zueinander **singuläre** Maße ($\lambda \perp \mu$) werden in Definition 4.2 eingeführt.

Die wichtigsten Resultate der Maßtheorie sind die Folgenden.

- Der **Darstellungssatz** setzt Funktionale $C_0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ in Beziehung zu Radon-Maßen; positive Funktionale zu (positiven) Radon-Maßen (Satz 3.4), allgemeine Funktionale zu signierten Radon-Maßen (Satz 4.13).
- Bei der **Lebesgue-Zerlegung** schreibt man $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, wobei die Anteile zu einem vorgegebenen Maß μ absolutstetig beziehungsweise singulär sind (Satz 4.6).
- Der Satz von **Radon-Nikodym** liefert zu $\lambda \ll \mu$ eine Dichte $h \in L^1(X, \mu)$ mit $d\lambda = h\, d\mu$ (ebenfalls in Satz 4.6).
- In der **Jordan-Zerlegung** schreibt man $\mu = \mu_+ - \mu_-$ mit positiven $\mu_\pm$, siehe (4.2). In der **Hahn-Zerlegung** teilt man die Grundmenge entsprechend, $X = A \dot\cup B$, siehe Satz 4.11. In der **Polar-Zerlegung** schreibt man $d\lambda = h\, d|\lambda|$, siehe Satz 4.10.

2. Integrale

2.1. Messbare Funktionen

Im Folgenden sei immer $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 2.1. *Sei Y ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* ***μ-messbar****, falls*

$$U \subset Y \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{A}.$$

Bemerkung. *Für uns ist typischerweise $Y = \mathbb{R}$ oder eine Variante ($Y = [-\infty, \infty]$ oder $Y = [0, \infty]$ oder $Y = \mathbb{R}^n$). Für $Y = \mathbb{R}$ (bzw. $Y = [-\infty, \infty]$) vereinfacht sich das obige Messbarkeitskriterium: f ist μ-messbar $\iff \forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}$.*

Begründung: Für offene Intervalle (c, d) schreiben wir die Urbildmenge als $f^{-1}((c, d)) = f^{-1}([-\infty, d)) \setminus f^{-1}([-\infty, c])$, wobei wiederum $[-\infty, c] = \bigcap_k [-\infty, c + \frac{1}{k})$ als Schnitt offener Intervalle geschrieben werden kann.

Satz 2.2. *Für $k \in \mathbb{N}$ seien $f, g, f_k : X \to [-\infty, \infty]$ messbare Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen messbar:*

$$-f, \quad f + g, \quad f_+ := \max\{f, 0\}, \quad \max\{f, g\}, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \quad (\textit{fordere } g(x) \neq 0 \, \forall x \in X).$$

Weiterhin sind die folgenden Funktionen $f : X \to [-\infty, \infty]$ messbar: $f(x) := \inf_k f_k(x)$ und $f(x) := \liminf_{k\to\infty}(f_k(x))$.

Beweis. Dass die Funktion $-f$ messbar ist, ist klar. Wegen

$$(f + g)^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q} \\ r+s<a}} f^{-1}([-\infty, r)) \cap g^{-1}([-\infty, s))$$

ist $f + g$ messbar. Aus

$$(f_+)^{-1}([-\infty, a)) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } a \leq 0 \\ f^{-1}([-\infty, a)) & \text{für } a > 0 \end{cases}$$

folgt die Messbarkeit von f_+. Wir schreiben $\max\{f, g\} = (f - g)_+ + g$ und schließen, dass $\max\{f, g\}$ messbar ist.

Die Funktion f^2 ist messbar, da

$$(f^2)^{-1}([-\infty, a)) \overset{a\geq 0}{=} f^{-1}([-\infty, \sqrt{a})) \setminus f^{-1}([-\infty, -\sqrt{a}]).$$

Wir schreiben $f \cdot g = \frac{1}{2} \cdot [(f + g)^2 - f^2 - g^2]$ und schließen, dass $f \cdot g$ messbar ist.

Die Funktion $\frac{1}{g}$ ist messbar, da

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}[-\infty, a) = \begin{cases} g^{-1}(\frac{1}{a}, 0) & \text{falls } a < 0, \\ g^{-1}(-\infty, 0) & \text{falls } a = 0, \\ g^{-1}([-\infty, 0)) \cup g^{-1}((\frac{1}{a}, \infty]) & \text{falls } a > 0. \end{cases}$$

Damit ist auch $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ messbar.
Sei $f = \inf_k f_k$. Dann ist

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_k f_k^{-1}([-\infty, a))$$

als abzählbare Vereinigung von messbaren Mengen messbar. Nach den obigen Schritten ist auch

$$f := \liminf_k (f_k) = \sup_m \left(\inf_{k \geq m} (f_k) \right)$$

messbar. □

Notation. *Sei* $(, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum. Eine Eigenschaft gilt* ***μ-fast überall*** $:\iff$ *es existiert eine Menge* $N \subset X$ *mit* $\mu(N) = 0$ *(***Nullmenge***), so dass die Eigenschaft für alle* $x \in X \setminus N$ *gilt.*

2.2. Integrale messbarer Funktionen

Definition 2.3. *Eine Funktion* $g : X \to [-\infty, \infty]$ *heißt* ***einfache Funktion****, falls*

1. *g ist μ-messbar*
2. *die Bildmenge $g(X)$ ist endlich*

Eine einfache Funktion nimmt nur endlich viele Werte an, sie "ersetzt" die Treppenfunktionen des Riemann-Integrals. Für einfache Funktionen $g : X \to [0, \infty]$ *definieren wir ein Integral durch*

$$\int_X g \, d\mu := \sum_{a \in g(X)} a \cdot \mu(g^{-1}(\{a\})).$$

Sei $f : X \to [0, \infty]$ *messbar. Dann definieren wir das Integral von* f *bezüglich* μ *durch*

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X g \, d\mu \,\middle|\, g : X \to [0, \infty] \text{ einfache Funktion, } g \leq f \right\}.$$

Für $f : X \to [-\infty, \infty]$ *messbar schreiben wir* $f \in L^1(X)$*, falls* $\int_X |f| \, d\mu < \infty$ *und setzen*

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu,$$

wobei $f_+ := \max\{0, f\}$, $f_- := \max\{0, -f\}$*, so dass* $f = f_+ - f_-$.

Für eine messbare Menge $A \subset X$ definieren wir das Integral von f über A durch

$$\int_A f\, d\mu := \int_X f \cdot \chi_A\, d\mu,$$

wobei $\chi_A(x) = 1$ für $x \in A$ und 0 sonst.

Wir wollen betonen, dass im Integral einfacher Funktionen die Menge $A_a := g^{-1}(\{a\})$ messbar ist, weil die Funktion g als μ-messbar vorausgesetzt wird.

Bemerkung. *Im Fall $X = \mathbb{R}$ und $\mu = \mathcal{L}^1$ erhält man das Lebesgue-Integral. Der Unterschied zum Riemann-Integral ist wie folgt: Während beim Riemann-Integral die zu integrierende Funktion mit Treppenfunktionen (endliche Unterteilung des Definitionsbereiches) approximiert wird, werden beim Lebesgue-Integral einfache Funktionen (endliche Unterteilung des Bildbereiches) zur Approximation verwendet. Jede Treppenfunktion ist auch eine einfache Funktion und jede Riemann-integrierbare Funktion ist Lebesgue- integrierbar, jedoch nicht andersrum. Das Standardbeispiel einer Lebesgue- aber nicht Riemann-integrierbaren Funktion ist $f : [0,1] \to [0,1]$ mit*

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Satz 2.4 (Monotone Konvergenz)**.** *Für $k \in \mathbb{N}$ seien $f_k : X \to [0,\infty]$ messbar und es gelte $f_{k+1} \geq f_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Setze $f(x) := \lim_k(f_k(x))$. Dann ist f messbar und es gilt*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_k \int_X f_k\, d\mu.$$

Beweis. Die Messbarkeit von f wurde in Satz 2.2 gezeigt.

Sei $\alpha \in [0,\infty]$ der Grenzwert der $\int_X f_k\, d\mu$, also $\int_X f_k\, d\mu \nearrow \alpha$. Wegen $f_k \leq f$ ist $\int_X f_k\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu$ und damit $\alpha \leq \int_X f\, d\mu$. Es bleibt zu zeigen, dass die umgekehrte Ungleichung gilt.

Sei $g : X \to [0,\infty]$ eine beliebige einfache Funktion mit $g \leq f$ und $t \in (0,1)$ beliebig. Setze

$$E_k := \{x \in X \mid f_k(x) \geq t \cdot g(x)\}. \tag{2.1}$$

Wegen $f_k(x) \to f(x)$ existiert für alle $x \in X$ ein $K_x \in \mathbb{N}$, so dass $x \in E_k$ für alle $k \geq K_x$. Also ist $X = \bigcup_k E_k$. Zudem gilt $E_{k+1} \supset E_k$. Wir können daher folgern

$$\alpha \overset{k\to\infty}{\longleftarrow} \int_X f_k\, d\mu \geq \int_{E_k} f_k\, d\mu \overset{(2.1)}{\geq} \int_{E_k} t \cdot g\, d\mu \overset{k\to\infty}{\to} t \cdot \int_X g\, d\mu.$$

Der zweite Grenzübergang gilt, da g eine einfache Funktion ist und daher

$$\int_{E_k} g\, d\mu = \sum_{a \in g(X)} a \cdot \mu\left(g^{-1}(\{a\}) \cap E_k\right).$$

Wegen der Limeseigenschaften von Maßen gilt $\mu\left(g^{-1}(\{a\})\right) = \lim_k \mu\left(E_k \cap g^{-1}(\{a\})\right)$. Wir erhalten $t \cdot \int_X g\, d\mu \leq \alpha$. Da t beliebig war folgt $\int_X g\, d\mu \leq \alpha$. Da g beliebig war, folgt schließlich $\int_X f\, d\mu \leq \alpha$. $\square$

Satz 2.5 (Lemma von Fatou)**.** *Seien $f_k : X \to [0,\infty]$ messbar für alle $k \in \mathbb{N}$. Setze $f(x) := \liminf_k f_k(x)$ für alle x. Dann gilt*

$$\int_X f\,d\mu \le \liminf_k \int_X f_k\,d\mu.$$

Beweis. Setze $g_k(x) := \inf_{m\ge k}(f_m)(x)$ für jedes $x \in X$. Dann gilt $g_k \nearrow f = \liminf_k(f_k)$ punktweise. Nach Satz 2.4 ist

$$\int_X \liminf(f_k)\,d\mu = \int_X f\,d\mu = \lim_k \int_X g_k\,d\mu \le \liminf_k \int_X f_k\,d\mu.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Dass im Lemma von Fatou die Ungleichheit auftreten kann, zeigt das folgende fundamentale Beispiel.

Beispiel. *Sei $f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{für } x \in (0, \frac{1}{k}) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und $\mu = \mathcal{L}^1$ das Lebesgue-Maß. Dann gilt $f := \liminf_k f_k = 0$ und $\int_{(0,1)} f\,d\mu = 0$, aber $\int_{(0,1)} f_k\,d\mu = 1$.

Aus obigem Satz zur monotonen Konvergenz erhält man den in Anwendungen nützlichsten Konvergenzsatz, den Lebesgue'schen Konvergenzsatz oder auch Satz zur majorisierte Konvergenz. Der Beweis (mit Hilfe der monotonen Konvergenz) ist identisch zum Beweis in der Lebesgue-Theorie aus Analysis III.

Satz 2.6 (Majorisierte Konvergenz)**.** *Sei $g \in L^1(X)$, f_k messbar für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $f_k \to f$ punktweise fast überall und $|f_k| \le g$. Dann ist $f \in L^1(X)$ und es gilt*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_k \int_X f_k\,d\mu.$$

3. Radon-Maße

3.1. Definitionen

Radon-Maße sind Borel-Maße mit einer zusätzlichen "Regularitätseigenschaft". In der nachfolgenden Definition denken wir an $X = \mathbb{R}^n$ oder Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.1. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, X ein topologischer Raum. Das Maß μ heißt* ***Radon-Maß****, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

(R1) $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$. Also: μ ist ein Borel-Maß, alle offenen Mengen sind messbar.

(R2) Für alle $M \in \mathcal{A}$ gilt $\mu(M) = \inf\{\mu(U) \mid U \subset X \text{ offen}, M \subset U\}$

(R3) Für alle $K \subset X$ kompakt ist $\mu(K) < \infty$.

Eigenschaft $(R2)$ wird auch als *Regularität von außen* bezeichnet: Jedes $M \in \mathcal{A}$ kann beliebig gut von außen durch eine offene Menge approximiert werden. In Epsilontik: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $U \subset X$ offen mit $M \subset U$ und $\mu(U) \leq \mu(M) + \varepsilon$.

Beispiel. *Das Dirac-Maß δ_0 auf $\mathbb{R}$ (mit der Borel σ-Algebra) ist ein Radon-Maß. Eine äußere Approximation mit abgeschlossenen Mengen ist im Allgemeinen nicht möglich, wie die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zeigt.*

Proposition 3.2. *Jedes Radon-Maß $(X, \mathcal{A}, \mu)$ auf $X = \mathbb{R}^n$ ist auch von innen regulär: für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset X \text{ kompakt}, K \subset A\}.$$

Beweis. 1. Fall: $\mu(A) < \infty$. Setze $B_j := \overline{B_j(0)} \subset \mathbb{R}^n$. Die B_j sind kompakt. Nach (R3) ist $\mu(B_j) < \infty$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Die Konvergenzeigenschaft von Maßen liefert zudem $\mu(A \cap B_j) \overset{j\to\infty}{\to} \mu(A) < \infty$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\mu(A \setminus B_j) = \mu(A) - \mu(A \cap B_j) \leq \varepsilon$ für alle $j \geq j_0$.

Wir überdecken nun $B_j \setminus A$ mit U_j offen gemäß (R2), $\mu(U_j) \leq \mu(B_j \setminus A) + \varepsilon$. Für die kompakte Menge $K_j := B_j \setminus U_j$ gilt nun $K_j \subset A$, da $K_j = B_j \setminus U_j \subset B_j \setminus (B_j \setminus A) = B_j \cap A \subset A$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\mu(K_j) = \mu(B_j \setminus U_j) &\geq \mu(B_j) - \mu(U_j) \geq \mu(B_j) - \mu(B_j \setminus A) - \varepsilon = \mu(A \cap B_j) - \varepsilon \\ &\geq \mu(A) - 2 \cdot \varepsilon\end{aligned}$$

für j genügend groß. Da ε beliebig war, folgt die Behauptung.

2. Fall: $\mu(A) = \infty$. Es ist $\infty \overset{(R3)}{>} \mu(A \cap B_j) \to \infty$ für $j \to \infty$. Wegen Fall 1 existiert ein $K_j \subset A \cap B_j$ kompakt mit

$$\mu(K_j) \geq \mu(A \cap B_j) - 1.$$

Also gilt $\mu(K_j) \to \infty$. □

3.2. Der Darstellungssatz für positive Funktionale

Wir betrachten nun Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Wir setzen

$$C(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \textit{ stetig}\} \quad \text{und}$$
$$C_c(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}(f) \textit{ kompakt }\}, \text{ mit } \operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Bemerkung 3.3. *Sei μ ein Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mu(K) < \infty$ für alle $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist*

$$L : C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \qquad f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$$

ein Funktional (da μ Borel-Maß ist, ist f messbar und das Integral wohldefiniert).
Es ist linear, es ist positiv in dem Sinne, dass aus $f \geq 0$ auch $L(f) \geq 0$ folgt, und es ist "stetig" in dem Sinne, dass für alle $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt gilt

$$\sup\{L(f) \mid f \in C_c(\mathbb{R}^n), \ \|f\|_\infty \leq 1, \ \mathit{supp}(f) \subset K\} < \infty. \tag{3.1}$$

Letzteres folgt aus

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \leq \int_K 1 \, d\mu = \mu(K) < \infty.$$

Also: **Jedes Maß (mit den Eigenschaften aus Bemerkung 3.3) definiert ein lineares, positives, stetiges Funktional auf $C_c(\mathbb{R}^n)$.** Der Riesz'sche Darstellungssatz für positive Funktionale besagt, dass auch die Umkehrung gilt.

Satz 3.4 (Riesz'scher Darstellungssatz für positive Funktionale)**.** *Sei $L : C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ linear, positiv und stetig im Sinne von (3.1). Dann existiert ein Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$, so dass*

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$$

für alle $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ist.

Beispiel. *Wir betrachten das Funktional $L(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f$ im Sinne des Riemann-Integrals. Dann ist L positiv und linear. Sei $\mathit{supp}(f) \subset K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\|f\|_\infty < 1$. Dann ist L wegen*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \leq \int_K \|f\|_\infty \leq \int_K 1 < \infty$$

stetig. Satz 3.4 liefert: Es existiert ein Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \equiv L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu.$$

Dieses Maß μ ist das Lebesgue-Maß. Das Lebesgue-Integral ist die Fortsetung des Riemann-Integrals; die Klasse der messbaren Funktionen wird vergrößert.

Beispiel. *Das Funktional sei $L(f) := f(x_0)$ zu einem festen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das Maß μ aus Satz 3.4 das Dirac-Maß $\mu = \delta_{x_0}$, denn dafür gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = f(x_0)$. Der Beweis ist eine Übung.*

Beweis von Satz 3.4. Es ist ziemlich klar, welches Maß zu dem Funktional gehört, und wir werden dieses Maß im ersten Schritt angeben. Danach bleiben die Eigenschaften nachzuweisen.

Schritt 1. Konstruktion von μ. Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen definiere

$$\mu(U) := \sup\{L(f) \mid f \in C_c(\mathbb{R}^n), \|f\|_\infty \leq 1, \operatorname{supp}(f) \subset U\}.$$

Für ein beliebiges $A \subset \mathbb{R}^n$ setze

$$\mu(A) \quad := \quad \inf\{\mu(U) \mid U \textit{ offen, } A \subset U\}. \tag{3.2}$$

Wir zeigen zunächst, dass μ ein äußeres Maß ist und verwenden dann das Caratheodory-Kriterium, um (R1) des Radon-Maßes nachzuweisen. Es gilt

- μ lebt auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $\mu(\emptyset) = 0$, denn die leere Menge ist offen und die einzige Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset \emptyset$ ist $f \equiv 0$.
- Die Monotonie von μ folgt direkt aus der Definition und ist eine Übung.
- Die σ-Subadditivität zeigt man wie folgt. Seien U_1, U_2 offene Mengen und $U := U_1 \cup U_2$. Wir betrachten $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $K := \operatorname{supp}(f) \subset U$ und $\|f\|_\infty \leq 1$.

  Seien h_1, h_2 mit $h_i : U_i \to [0, 1]$ mit $h_1 + h_2 = 1$ auf K und $\operatorname{supp}(h_i) \subset U_i$. Setze $f_i := f \cdot h_i$. Dann ist

  $$L(f) = L(f \cdot h_1 + f \cdot h_2) = L(f_1) + L(f_2) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2).$$

  Da f beliebig war, ist $\mu(U) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2)$.

  Seien nun $A_i \subset \mathbb{R}^n$ für $i \in \mathbb{N}$. Es existieren U_i offen, $U_i \supset A_i$ mit $\mu(U_i) \leq \mu(A_i) + \varepsilon \cdot 2^{-i}$ für $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ und $\|f\|_\infty \leq 1$. Wegen der Kompaktheit von $\operatorname{supp}(f)$ ist sogar $\operatorname{supp}(f) \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$. Damit ist also

  $$L(f) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^N U_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \mu(U_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) + \varepsilon.$$

  Da f und ε beliebig waren, folgt durch Supremumsbildung $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$. Dies ist die σ-Subadditivität des äußeren Maßes.
- Wir wollen das Caratheodory-Kriterium verwenden (siehe Proposition 1.10). Zu zeigen ist: $\operatorname{dist}(A_1, A_2) > 0 \Rightarrow \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

  Seien also A_1, A_2 wie oben. Sei $U \supset A_1 \cup A_2$ eine beliebige offene Überdeckung. Wähle zu A_i Umgebungen $U_i \subset U$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dazu gibt es zwei Funktionen $f_i : U_i \to [0, 1]$, stetig mit kompakten Träger, mit $L(f_i) \geq \mu(U_i) - \varepsilon \geq \mu(A_i) - \varepsilon$. Wir setzen $f := f_1 + f_2$. Dann ist $f \in C_c(U)$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$ (wegen der Disjunktheit von U_1 und U_2) und

  $$L(f) = L(f_1) + L(f_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2) - 2\varepsilon.$$

  Somit gilt $\mu(U) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2) - 2\varepsilon$ und da U und ε beliebig waren auch $\mu(A_1 \cup A_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Die umgekehrte Ungleichung folgt automatisch aus der Subadditivität von μ.

Proposition 1.10 liefert, dass μ ein Borel-Maß ist. Damit ist die Radon-Maß Eigenschaft (R1) gezeigt.

Die äußere Regularität (R2) folgt direkt aus der Definition in (3.2).

Zum Nachweis von (R3) betrachten wir $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Setze $U := B_1(K)$. Dann ist

$$\mu(K) \leq \mu(U) = \sup\{L(f) : \|f\|_\infty \leq 1, \operatorname{supp}(f) \subset U\} < \infty$$

wegen der "Stetigkeit" (3.1) von L. Also ist μ ein Radon-Maß.

Schritt 2. Formel $L(f) = \int f \, d\mu$. Seien dazu $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Ohne Einschränkung gelte $f \geq 0$, für allgemeine f müssen f_+, f_- betrachtet werden. Setze $K := \operatorname{supp}(f)$. Wähle $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N$ mit $t_N = 2\|f\|_\infty$ und $t_j - t_{j-1} < \varepsilon$. Durch eine Perturbation der t_j kann $\mu(f^{-1}(\{t_j\})) = 0$ für alle $j = 1, ..., N$ erreicht werden. Anderenfalls müsste $\mu(\operatorname{supp}(f)) = \infty$ gelten, was ein Widerspruch zu (R3) ist. Sei U_j die offene Menge $U_j := f^{-1}((t_{j-1}, t_j))$.

Nach Definition von $\mu(U_j)$ existiert ein $g_j \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(g_j) \subset U_j$ und $0 \leq g_j \leq 1$, so dass

$$\mu(U_j) \leq L(g_j) + \frac{\varepsilon}{N}$$

gilt.

Nach Proposition 3.2 ist μ von innen regulär, das heißt es existiert ein $K_j \subset U_j$ kompakt mit $\mu(K_j) \geq \mu(U_j) - \frac{\varepsilon}{N}$ bzw. $\mu(U_j \setminus K_j) \leq \frac{\varepsilon}{N}$.

Schließlich wollen wir die g_j etwas vergrößern. Es gibt $\varphi_j \in C_c(\mathbb{R}^n)$, so dass $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset U_j$, $0 \leq \varphi_j \leq 1$, so dass $\varphi_j \geq g_j$ und $\varphi_j \equiv 1$ auf $K_j \cup \operatorname{supp}(g_i)$ gilt. Insbesondere gilt

$$\mu(U_j) \quad \leq \quad L(\varphi_j) + \frac{\varepsilon}{N}, \tag{3.3}$$

da L positiv und linear ist.

Die Menge $\{x \in U_j \mid \varphi_j(x) < 1\} \subset U_j \setminus K_j$ hat ein kleines Maß. Definiere die Fehlerfunktion

$$\psi := f - \sum_{j=1}^{N} \varphi_j \cdot f.$$

Dann ist $\psi > 0$ auf

$$\begin{aligned} B := \{x \mid \psi(x) > 0\} &= \left\{ x \mid f(x) > 0, \text{ und } \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) < 1 \right\} \\ &\subset \bigcup_j (U_j \setminus K_j) \cup \textit{Nullmenge}, \end{aligned}$$

wobei die *Nullmenge* eine Teilmenge von $\bigcup_j f^{-1}(\{t_j\})$ ist, daher also tatsächlich eine Nullmenge. Nach Definition von μ folgt

$$L(\psi) \leq \|f\|_\infty \cdot \sum_{j=1}^{N} \mu(U_j \setminus K_k) \leq \varepsilon \cdot \|f\|_\infty.$$

Das folgt aus der Tatsache, dass für offene Mengen U und beliebige Funktionen $f \in C_c(U)$ gilt, dass

$$L(f) \leq \mu(U)\|f\|_\infty.$$

Die Fehlerfunktion ψ erfüllt $\|\psi\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ und hat Ihren Träger in $\bigcup_j (U_j \setminus K_j) \cup \bigcup_j f^{-1}(\{t_j\})$, wobei man wiederum die Nullmenge $\bigcup_j f^{-1}(\{t_j\})$ mit einer offenen Menge mit beliebig kleinem Maß überdecken kann.

Weiter ist

$$\sum_{j=1}^{N} t_{j-1} \cdot L(\varphi_j) \leq L\left(\sum_{j=1}^{N} \varphi_j \cdot f\right) = \sum_{j=1}^{N} L(f \cdot \varphi_j) \leq \sum_{j=1}^{N} t_j \cdot L(\varphi_j) \leq \sum_{j=1}^{N} t_j \cdot \mu(U_j).$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} L(f) = L(\psi) + L\left(\sum_{j=1}^{N} \varphi_j \cdot f\right) &\leq \varepsilon \cdot \|f\|_\infty + \sum_{j=1}^{N} \mu(U_j) \cdot t_j \\ &\leq \varepsilon \cdot \|f\|_\infty + \sum_{j=1}^{N} t_{j-1} \cdot \mu(U_j) + \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{N} \mu(U_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} t_{j-1} \cdot \mu(U_j) + \varepsilon \cdot (\|f\|_\infty + \mu(K)) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu + C \cdot \varepsilon. \qquad \text{(Definition des Integrals)} \end{aligned}$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} L(f) \geq L(f) - L(\psi) = L\left(\sum_{j=1}^{N} \varphi_j \cdot f\right) \\ \geq \sum_{j=1}^{N} t_{j-1} \cdot L(\varphi_j) \geq \sum_{j=1}^{N} t_{j-1} \cdot \mu(U_j) - 2\varepsilon \cdot \|f\|_\infty \\ \geq \sum_{j=1}^{N} t_j \cdot \mu(U_j) - \varepsilon \cdot (2\|f\|_\infty + \mu(K)) \\ \geq \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu - C \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist

$$L(f) \geq \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu - C \cdot \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, ergeben die zwei Ungleichungen für das Integral zusammen

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu,$$

also die Behauptung. □

Es ist wichtig, festzuhalten, dass der Darstellungssatz für positive Funktionale einen langen, aber doch elementaren Beweis hat. Das wird für den allgemeinen Satz nicht gelten. Dort benutzt der Beweis Funktionalanalysis.

Der Satz hat eine interessante Konsequenz. Grob gesprochen gilt: Auf $\mathbb{R}^n$ gibt es nur reguläre Maße.

Korollar 3.5. *Sei μ ein (positives) Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mu(K) < \infty$ für alle $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist $\mu|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ regulär, also ein Radon-Maß.*

Beweisskizze. Zu μ ist $L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$ ein positives, stetiges, lineares Funktional auf $C_c(\mathbb{R}^n)$. L wird dargestellt durch $\tilde{\mu}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\tilde{\mu} \Rightarrow \tilde{\mu}(B) = \mu(B).$$

für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Für einen ausführlichen Beweis verweisen wir auf Rudin. $\square$

4. Signierte Maße

4.1. Definitionen, Radon-Nikodym & Lebesgue

Wir führen in diesem Abschnitt einige nützliche Begriffe und Konzepte ein.

Signierte Maße

Zunächst wollen wir bei den Maßen ein Vorzeichen zulassen. Man sollte dabei nicht zu viel erlauben.

Definition 4.1. *Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X, und $\mu : \mathcal{A} \to (-\infty, \infty)$. Dann heißt μ **signiertes Maß**, falls es die folgende Eigenschaft hat.*
Für alle $M_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, $M_k \cap M_\ell = \emptyset \ \forall k \neq \ell$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(M_k),$$

insbesondere bildet μ in die reellen Zahlen ab und die Reihe konvergiere.

Achtung: Signierte Maße sind im Allgemeinen nicht monoton! Betrachte z.B. $\mu = \delta_1 - \delta_0$.
Zur Unterscheidung nennen wir die bisherigen „normalen" Maße ab jetzt manchmal auch „positive Maße", um die Unterscheidung klar zu machen.

Bemerkung. *μ positives Maß $\not\Rightarrow$ μ signiertes Maß (wegen des Wertes $+\infty$)*
μ signiertes Maß $\not\Rightarrow$ μ positives Maß (wähle beispielsweise $\mu = -\delta_0$)

Variationsmaß

Definiere zu einem signiertem Maß μ ein positives Maß $\lambda = |\mu|$ durch

$$\begin{aligned} &|\mu| : \mathcal{A} \to [0, \infty] \\ &|\mu|(M) := \sup \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} |\mu(M_k)| \,\middle|\, \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k \subset M,\ M_k \cap M_\ell = \emptyset\ \forall k \neq \ell \right\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dieses Maß heißt **Variationsmaß**. Ein signiertes Maß, für welches das Variationsmaß ein Radon-Maß definiert, nennen wir **signiertes Radon-Maß.**

Bemerkung. *Es gilt $|\mu|(X) < \infty$, das heißt jede Umordnung der Reihe konvergiert. Insbesondere ist $|\mu|$ ein Maß.*

Für einen Beweis verweisen wir auf Rudin. Mit dem Variationsmaß μ können wir einen positiven Teil und einen negativen Teil des Maßes einführen. Wir setzen

$$\mu_+ := \frac{1}{2}(\mu + |\mu|) \quad \text{und} \quad \mu_- := \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)\,. \tag{4.2}$$

Dann ist $\mu = \mu_+ - \mu_-$. Dies ist die **Jordan-Zerlegung** von μ.

Absolute Stetigkeit

Im Folgenden sei μ ein positives Maß auf $\mathcal{A}$ und $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ signierte Maße auf $\mathcal{A}$.

Definition 4.2.

$$\begin{aligned}
\lambda \ll \mu :&\iff \lambda \textit{ ist } \textbf{\textit{absolut stetig}} \textit{ zu } \mu \\
:&\iff \forall E \in \mathcal{A} : \mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0 \\
\lambda \textbf{\textit{ konzentriert}} \textit{ auf } A \in \mathcal{A} :&\iff \forall E \in \mathcal{A} : \lambda(E) = \lambda(E \cap A) \\
\lambda_1 \perp \lambda_2 :&\iff \lambda_1 \textit{ und } \lambda_2 \textit{ sind } \textbf{\textit{zueinander singulär}} \\
:&\iff \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A}, A_1 \cap A_2 = \emptyset \\
&\qquad \textit{so dass } \lambda_i \textit{ konzentriert auf } A_i.
\end{aligned}$$

Für eine positives Maß μ gilt zudem

$$\lambda \perp \mu \iff \exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0, \lambda \textit{ konzentriert auf } A.$$

Der Beweis ist eine Übung.

Beispiel. *Wir setzen*

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 := \delta_0 \text{ auf } \mathcal{L}(\mathbb{R}), \\
&\lambda_2 := \delta_1 \text{ auf } \mathcal{L}(\mathbb{R}), \\
&\lambda_3 := \mathcal{L}^1 \text{ auf } \mathcal{L}(\mathbb{R}), \\
&\lambda_4 := f\,dx = f\,d\mathcal{L}^1 \text{ für } f \in L^1(\mathbb{R}), \\
&\quad \lambda_4(A) := \int_A f\,d\mathcal{L}^1.
\end{aligned}$$

Dann ist λ_1 konzentriert auf $\{0\}$ und λ_2 auf $\{1\}$. λ_3 ist konzentriert auf $\mathbb{R}$, aber auch auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, λ_4 ist konzentriert auf $\{x \mid f(x) \neq 0\}$.

Es gilt $\lambda_1 \perp \lambda_2$, $\lambda_1 \perp \lambda_3$ und $\lambda_1 \perp \lambda_4$. Verwende hierfür $A_1 = \{0\}$ und die Tatsache, dass $\mathcal{L}^1(\{0\}) = 0$ gilt.

Es ist $\lambda_4 \ll \lambda_3$, denn für E mit $\lambda_3(E) = 0$, das heißt für eine $\mathcal{L}^1$- Nullmenge E, ist $\lambda_4(E) = \int_E f = 0$.

Es gilt: $f > 0$ $\mathcal{L}^1$-fast überall auf $\mathbb{R} \iff \lambda_3 \ll \lambda_4$.

Betrachte $\mu := \lambda_1 + \lambda_3 = \mathcal{L}^1 + \delta_0$. Dann gilt $\mu \not\ll \mathcal{L}^1$ und $\mu \not\ll \delta_0$, $\mathcal{L}^1 \ll \mu$, $\mu \not\perp \mathcal{L}^1$.

Bemerkung 4.3. *Die nachfolgenden Eigenschaften sind für ein positives Maß μ und signierte Maße λ, $\lambda_{1,2}$ leicht nachzuprüfen.*

1. λ ist auf A konzentriert $\Rightarrow |\lambda|$ ist auf A konzentriert

2. $\lambda_1 \perp \lambda_2 \Rightarrow |\lambda_1| \perp |\lambda_2|$

3. $\lambda_1 \perp \mu,\ \lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$

4. $\lambda_1 \ll \mu,\ \lambda_2 \ll \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$

5. $\lambda \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \ll \mu$

6. $\lambda_1 \ll \mu,\ \lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$

7. $\lambda \ll \mu,\ \lambda \perp \mu \Rightarrow \lambda = 0$

L^p-Räume

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.
Für $p \in [1, \infty)$ setzen wir: $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu) :\iff f : X \to \mathbb{R}$ ist μ-messbar und

$$\|f\|^p_{\mathcal{L}^p(X,\mu)} := \int_X |f|^p \, d\mu < \infty.$$

Für $p = \infty$ setzen wir $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu) :\iff \exists$ eine μ-Nullmenge E und $C > 0$, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in X \setminus E$. Wir definieren das **essentielle Supremum** von f durch

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X,\mu)} := \text{ess sup}\,|f| := \inf\{C > 0 \,|\, |f| \leq C \ \mu\text{-fast überall}\}.$$

Es gilt die **Hölderungleichung**

$$\|f \cdot g\|_{\mathcal{L}^1(X,\mu)} = \int_X |f \cdot g| \, d\mu \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X,\mu)} \|g\|_{\mathcal{L}^q(X,\mu)}$$

für $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, wobei $\frac{1}{\infty} := 0$.
Die Abbildungen $\| \cdot \|_{\mathcal{L}^p(X,\mu)}$ sind lediglich Halbnormen. Um einen normierten Raum zz erhalten, identifizieren wir Funktionen, die μ-fast überall übereinstimmen und betrachten zu $f : X \to \mathbb{R}$ messbar die Äquivalenzklasse

$$[f] := \{g : X \to \mathbb{R} \,|\, f = g \ \mu\text{-fast überall}\}.$$

Beispiel: *Für $X := \mathbb{R}$ und $\mu = \delta_0$ gilt für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$[f] = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, g(0) = f(0)\}.$$

Wir definieren nun für $1 \leq p \leq \infty$

$$L^p(X, \mu) := \{[f] \,|\, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu) \text{ für alle } g \in [f]\}$$

mit der Norm $\|[f]\|_{L^p(X,\mu)} := \|f\|_{\mathcal{L}^p(X,\mu)}$, Diese hängt nach Definition nicht von der Wahl des Repräsentanten f ab. Wir werden im Folgenden die Klammern der Äquivalenzklasse weglassen und statt $[f]$ einfach f schreiben. Alle Räume $L^p(X, \mu)$ sind Banachräume.
Im Fall $p = 2$ gilt $q = 2$. Der Raum $L^2(X, \mu)$ ist sogar ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \cdot g(x) \, d\mu(x).$$

Wir verwenden folgedes Resultat aus der Funktionalalysis:

Satz 4.4 (Riesz'scher Darstellungssatz für Hilberträume.)**.** *Sei H ein Hilbertraum und $\Lambda : H \to \mathbb{R}$ linear und stetig. Dann gibt es ein $g \in H$ mit*

$$\Lambda(f) := \langle g, f \rangle \text{ für alle } f \in H.$$

Das nachfolgende Lemma wird sich als sehr nützlich erweisen. Es besagt: Wenn alle Mittelwerte einer Funktion in einem festen Intervall liegen, so hat die Funktion (fast überall) nur Werte in diesem Intervall.

Lemma 4.5. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und $f \in L^1(X, \mu)$ mit*

$$\frac{1}{\mu(E)} \cdot \int_E f \, d\mu \in [a, b] \qquad \forall E \in \mathcal{A} \text{ mit } 0 < \mu(E)$$

Dann gilt: $f(x) \in [a, b]$ für μ-fast alle $x \in X$.

Beweis. Definiere $B_+^\varepsilon := \{x \in X : f(x) \geq b + \varepsilon\}$ und $B_-^\varepsilon := \{x \in X : f(x) \leq a - \varepsilon\}$.
1. Fall: Für alle $\varepsilon = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, sind B_+^ε und B_-^ε Nullmengen. In diesem Fall ist auch

$$\bigcup_{\varepsilon = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}} B_+^\varepsilon \cup B_-^\varepsilon = \{f > b\} \cup \{f < a\}$$

als Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge.
2. Fall: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass B_+^ε keine Nullmenge ist. In diesem Fall gilt

$$b \geq \frac{1}{\mu(B_+^\varepsilon)} \int_{B_+^\varepsilon} f \, d\mu \geq \frac{1}{\mu(B_+^\varepsilon)} \int_{B_+^\varepsilon} (b + \varepsilon) \, d\mu = b + \varepsilon,$$

ein Widerspruch.
3. Fall: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass B_-^ε keine Nullmenge ist. Analog zu Fall 2. □

Radon-Nikodym & Lebesgue

Satz 4.6 (Lebesgue-Radon-Nikodym für endliches $\mu(X)$)**.** *Sei μ ein (positives) Maß auf $(X, \mathcal{A})$ mit $\mu(X) < \infty$. Weiterhin sei λ ein signiertes Maß auf $(X, \mathcal{A})$.*

1. *Es existieren eindeutige signierte Maße λ_a, λ_s auf X, so dass*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s$$

   mit $\lambda_a \ll \mu$ und $\lambda_s \perp \mu$. *(Lebesgue-Zerlegung)*

2. *Es existiert eine eindeutige Dichte $h \in L^1(X, \mu)$, so dass*

$$\lambda_a(E) = \int_E d\lambda_a = \int_E h \, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{A}.$$

Korollar. *Der Standard-Satz von Radon-Nikodym ist die zweite Aussage des Satzes für $\lambda \ll \mu$. Er besagt: Für jedes $\lambda \ll \mu$ existiert eine eindeutige Dichte $h \in L^1(X, \mu)$ mit $d\lambda = h \, d\mu$.*

Beweis. Schritt 1. Einfache Teile. Eindeutigkeit der Zerlegung: Sei

$$\lambda_a + \lambda_s = \lambda = \lambda'_a + \lambda'_s \Rightarrow \lambda_a - \lambda'_a = \lambda'_s - \lambda_s \overset{(4.3,7.)}{\Rightarrow} \lambda_a - \lambda'_a = \lambda'_s - \lambda_s = 0.$$

Eindeutigkeit von h: Wegen

$$\int_E h \, d\mu = \lambda_a(E) = \int_E h' \, d\mu,$$

ist $\frac{1}{\mu(E)} \int_E (h - h') \, d\mu = 0$ für alle E. Wegen Lemma 4.5 gilt dann die Relation $h - h' = 0$ auch μ-fast überall.

Schritt 2. Konstruktion von λ_a, λ_s, h für $\lambda \geq 0$. Definiere das Maß φ auf $(X, \mathcal{A})$ durch

$$\varphi := \lambda + \mu.$$

Dann gilt auch

$$\int_X f \, d\varphi = \int_X f \, d\lambda + \int_X f \, d\mu$$

für alle $f : X \to \mathbb{R}$ messbar mit $f \geq 0$. Intuitiv ist λ "kleiner" als φ. Wir erwarten daher, dass die Abbildung $L^2(X, \varphi) \ni f \longmapsto \int f \, d\lambda \in \mathbb{R}$ beschränkt und linear ist. Dies gilt tatsächlich, und zwar wegen

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\lambda &\leq \|f\|_{L^2(X,\lambda)} \cdot \|1\|_{L^2(X,\lambda)} = \left(\int_X |f|^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_X 1 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_X |f|^2 \, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_X 1 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(X,\varphi)} \cdot \lambda(X)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wobei $\lambda(X) < \infty$ nach Voraussetzung (als signiertes Maß). Der Riesz'sche Darstellungssatz für Hilberträume Satz 4.4 liefert daher: Es existiert ein $g \in L^2(X, \varphi)$, so dass

$$\int_X f \, d\lambda = \int_X f \cdot g \, d\varphi \qquad \forall f \in L^2(X, \varphi). \tag{4.3}$$

Es gilt $g(x) \in [0, 1]$ für φ-fast alle x. Dies folgt wieder mit Lemma 4.5: Für beliebiges $E \in \mathcal{A}$ mit $\varphi(E) > 0$ gilt mit $f = \chi_E$ in (4.3)

$$\frac{1}{\varphi(E)} \int_E g \, d\varphi = \frac{1}{\varphi(E)} \int_E \, d\lambda = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \in [0, 1].$$

Hier haben wir $\mu(X) < \infty$ ausgenutzt, um Lemma 4.5 auf das Maß, $\varphi := \lambda + \mu$ anwenden zu können.

Wir können nun (4.3) umschreiben. Mit der Funktion $g : X \to [0, 1]$ gilt

$$\int_X f(1 - g) \, d\lambda = \int_X fg \, d\mu \qquad \forall f \in L^2(X, \varphi). \tag{4.4}$$

Aus dieser Relation werden wir alle behaupteten Eigenschaften ableiten. Wir setzen $A := \{x \in X : g(x) \in [0, 1)\}$ und $B := \{x \in X : g(x) = 1\}$. Damit definieren wir $\lambda_a(E) := \lambda(E \cap A)$ und $\lambda_s(E) := \lambda(E \cap B)$.

Es ist $X = A\dot{\cup}B$. Daher gilt auch $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$. Weiterhin ist nach Definition $\lambda_a \perp \lambda_s$. Wir behaupten, dass auch $\lambda_s \perp \mu$. Hierfür müssen wir zeigen, dass $\mu(B) = 0$. Dies gilt wegen

$$\mu(B) = \int_B g \, d\mu \overset{f:=\chi_B}{=} \int_X fg \, d\mu \overset{(4.4)}{=} \int_X f(1-g) \, d\lambda = 0.$$

Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass

$$\lambda_a \ll \mu. \tag{4.5}$$

Hierfür setzen wir $f := \left(1 + g + g^2 + ... + g^k\right) \cdot \chi_E$ für ein $E \in \mathcal{A}$ und $k \in \mathbb{N}$ in (4.4) ein. Dies ergibt

$$\int_E \left(1 + g + g^2 + ... + g^k\right) \cdot (1-g) \, d\lambda = \int_E \left(1 + g + ... + g^k\right) \cdot g \, d\mu.$$

Hierbei gilt für die linke Seite

$$\begin{aligned}\int_E \left(1 + g + g^2 + ... + g^k\right) \cdot (1-g) \, d\lambda &= \int_E \left(1 - g^{k+1}\right) \, d\lambda \\ &= \int_{E\cap A} \left(1 - g^{k+1}\right) \, d\lambda \to \lambda(E \cap A) = \lambda_a(E)\end{aligned}$$

für $k \to \infty$ wegen $1 - g^{k+1} \to 1$ monoton auf A.

Andererseits ist die rechte Seite $g \cdot \left(1 + g + ... + g^k\right)$ monoton wachsend mit messbarem punktweisem Limes $h : X \to [0, \infty]$. Der Satz von der monotonen Konvergenz 2.4 liefert die Formel $\lambda_a(E) = \int_E h \, d\mu$. Wegen $\lambda_a < \infty$ folgt $h \in L^1(X, \mu)$. Dies zeigt die zweite Aussage des Satzes und auch (4.5):

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda_a(E) = \int_E h \, d\mu = 0.$$

Schritt 3. Falls λ signiertes Maß. Schreibe $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$. Wende 2. Schritt auf λ_+ und λ_- an und setze $\lambda_+ = \lambda_{+,a} - \lambda_{+,s}$ und $\lambda_- = \lambda_{-,a} - \lambda_{-,s}$. Definiere $\lambda_a := \lambda_{+,a} - \lambda_{-,a}$ und $\lambda_s := \lambda_{+,s} + \lambda_{-,s}$.

Ebenso h_+ zu λ_+ und μ, und h_- zu λ_- und μ. Dann ist $h := h_+ - h_- \in L^1(\mu)$ und es gilt $d\lambda_a = d\lambda_{a,+} - d\lambda_{a,-} = h_+ \, d\mu - h_- \, d\mu = h \, d\mu$. □

Definition 4.7. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt σ-endlich, falls $E_j \in \mathcal{A}$ existieren mit $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$ und $\mu(E_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$.*

Beispiel. *$\mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ ist σ-endlich. Es genügt, $E_j = B_j(0)$ zu wählen.*

Satz 4.8. *Die Aussage von Satz 4.6 bleibt ohne die Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ richtig, falls μ ein σ-endliches Maß ist.*

Beweis. Analog zum Beweis des Satzes 4.6, unter Verwendung des nachfolgenden Lemmas. Details sind in Rudin zu finden. □

Lemma 4.9. *Sei μ ein σ-endliches Maß. Dann existiert ein $w \in L^1(X,\mu)$ mit $0 < w(x) \leq 1$ für alle $x \in X$.*

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Mengen E_j aus der Definition von σ-endlich disjunkt sind. Andernfalls setzen wir $\tilde{E}_j := E_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} E_k$. Wir definieren

$$w_j : X \to \mathbb{R}, \qquad w_j(x) := \begin{cases} \frac{1}{2^{j+1}} \cdot \frac{1}{1+\mu(E_j)} & \text{falls } x \in E_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere $w := \sum_{j\in\mathbb{N}} w_j$. Es ist $1 \geq w > 0$ und wegen

$$\int_{\bigcup_{j=1}^N E_j} w \, d\mu = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2^{j+1}} \cdot \frac{\mu(E_j)}{1+\mu(E_j)} \leq 1$$

gilt auch $w \in L^1(X,\mu)$ durch Bildung des Grenzwertes $N \to \infty$. □

Der Nutzen der Abbildung w ist, dass wir μ zu einem endlichen Maß $\tilde{\mu}$ modifizieren können. Wir definieren

$$\tilde{\mu}(E) := \int_E w \, d\mu.$$

Für $\tilde{\mu}$ gilt dann $\tilde{\mu}(X) = \int_X w \, d\mu < \infty$. Andererseits folgt aus $\tilde{\mu}(N) = 0$ schon $\mu(N) = 0$ für alle $\tilde{\mu}$-Nullmengen $N \in \mathcal{A}$. Denn wegen $\int_N w \, d\mu = 0$ und $w > 0$ folgt, dass N auch eine μ-Nullmenge ist. Das neue Maß $\tilde{\mu}$ hat also dieselben Nullmengen wie μ.

Zerlegungen

Satz 4.10 (Polarzerlegung)**.** *Sei λ signiertes Maß auf $(X,\mathcal{A})$. Dann existiert eine messbare Funktion $h : X \to \mathbb{R}$, $h(x) \in \{-1,+1\}$ für alle $x \in X$ mit $d\lambda = h \, d|\lambda|$, das heißt*

$$\int_E d\lambda = \lambda(E) = \int_E h \, d|\lambda|$$

für alle $E \in \mathcal{A}$.

Beweis. Es gilt $\lambda \ll |\lambda|$ nach Definition des Variationsmaßes, da wegen Supremumsbildung $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$. Der Satz von Radon-Nikodym liefert nun die Existenz eine Dichte $h \in L^1(X,|\lambda|)$, so dass $d\lambda = h \, d|\lambda|$ ist. Zu zeigen ist: $|h| = 1$ fast überall.

Sei dazu $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Setze $A_r := \{x \in X : |h(x)| \leq r\}$. Wir zeigen zunächst $|\lambda|(A_r) = 0$ für alle $r < 1$.

Seien E_j eine Partition von A_r, also $E_k \cap E_l = \emptyset$ für alle $k \neq l$ und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j = A_r$. Dann ist

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda(E_j)| = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left| \int_{E_j} h \, d|\lambda| \right| \overset{\substack{E_j \subset A_r \\ |h| \leq r}}{\leq} \sum_{j\in\mathbb{N}} r \cdot |\lambda|(E_j) = r \cdot |\lambda|(A_r).$$

Die Supremumsbildung ergibt $|\lambda|(A_r) \leq r \cdot |\lambda|(A_r)$. Für $r < 1$ ist also $|\lambda|(A_r) = 0$. Wir finden $|h| \geq 1$ fast überall.

Für die umgekehrte Ungleichung sei $E \in \mathcal{A}$ beliebig mit $|\lambda|(E) > 0$. Dann ist

$$|\text{Mittelwert von } h \text{ über } E| = \left|\frac{1}{|\lambda|(E)} \int_E h \, d|\lambda|\right| = \left|\frac{1}{|\lambda|(E)} \int_E d\lambda\right| = \frac{|\lambda(E)|}{|\lambda|(E)} \leq 1.$$

Also sind alle Mittelwerte von h in $[-1, 1]$. Nach Lemma 4.5 ist $|h| \leq 1$ fast überall. Durch Abänderung von h auf einer Nullmenge erhalten wir die behauptete Vorzeichenfunktion. □

Bemerkung. *Der Satz gilt auch für komplexe Maße $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit $h : X \to \mathbb{C}$ und $|h(x)| = 1$. Dann ist $d\lambda = h \, d|\lambda|$. Dies ist eine Polarzerlegung in Betrag und Argument wie in $z = e^{i\varphi}|z|$.*

Satz 4.11 (Hahn- Zerlegung)**.** *Sei λ signiertes Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Dann existiert eine Zerlegung der Grundmenge in $X = A \dot\cup B$ mit $\lambda_+(E) = \lambda(E \cap A)$ und $\lambda_-(E) = -\lambda(E \cap B)$ für alle $E \in \mathcal{A}$.*

Die Hahn-Zerlegung impliziert, dass $\lambda_+ \perp \lambda_-$. Weiterhin gilt $|\lambda|(E) = \lambda_+(E) + \lambda_(E) = \lambda(E \cap A) - \lambda(E \cap B)$

Beweis. Sei h die Vorzeichenfunktion von λ aus Satz 4.10. Setze $A := \{x \in X : h(x) = +1\}$ und $B := \{x \in X : h(x) = -1\}$. Dann ist $A \cap B = \emptyset$ und A und B sind messbar. Weiter ist $A \cup B = X$.

Sei $E \in \mathcal{A}$ beliebig.

$$\lambda_+(E) = \frac{1}{2}(\lambda + |\lambda|)(E) = \int_E \frac{1}{2}(h+1) \, d|\lambda| = \int_E \chi_A \, d|\lambda| = |\lambda|(E \cap A).$$

Es gilt also auch

$$\lambda_+(E) = \int_{E \cap A} d|\lambda| \overset{\substack{h=1 \\ \text{auf } A}}{=} \int_{E \cap A} d\lambda = \lambda(E \cap A).$$

Die analoge Rechnung funktioniert auch für B und λ_-. □

4.2. Der Riesz'sche Darstellungssatz

Der Raum $C_0(X)$. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner ein lokalkompakter Haussdorffraum). Wir definieren

$$C_c(X) := \{\, f : X \to \mathbb{R} \text{ stetig} \,|\, \mathrm{supp}(f) \text{ kompakt } \},$$

und

$$\begin{aligned} C_0(X) &:= \{f : X \to \mathbb{R} | f \ \textit{stetig}, \ \forall \varepsilon > 0 \, \exists K \subset\subset X \ \textit{kompakt}, \ |f|(x) < \varepsilon \, \forall x \notin K\} \\ &= \{f : X \to \mathbb{R} | f \ \textit{stetig}, \ \exists f_k \in C_c(X), \ f_k \to f \ \textit{gleichmäßig}\} \\ &= \overline{C_c(X)}^{\|\cdot\|_\infty}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist der Grundraum X kompakt, so gilt $C_c(X) = C_0(X) = C(X)$.

Der Raum $C_0(X)$ ist mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum.

Ziel: Zu einem linearen und stetigen Funktional $\Phi : C_0(X) \to \mathbb{R}$ wollen wir ein signiertes Radon-Maß λ (d.h. λ_+ und λ_- sind Radon-Maße) finden, so dass $\Phi(f) = \int_X f \, d\lambda$ gilt. Dann sind alle stetigen Funktionale auf $C_0(X)$-Funktionen Integrale.

Der Beweis basiert auf zwei anderen wichtigen Sätzen:

1. Der Satz von Riesz für positive Funktionale, Satz 3.4.
2. Der Dualraum zu L^p ist L^q mit $q = p/(p-1)$.

Den zweiten Satz müssen wir erst noch beweisen, siehe Satz 4.12. In dessen Beweis geht wiederum der Satz von Radon-Nikodym, Satz 4.6 ein.

Satz 4.12 (Der Dualraum von L^p)**.** *Sei $p \in [1,\infty)$ und μ ein positives σ-endliches Radon-Maß auf $(X,\mathcal{A})$. Weiterhin sei $\Phi : L^p(X,\mu) \to \mathbb{R}$ linear und stetig. Dann existiert ein $g \in L^q(X,\mu)$ mit $q = \frac{p}{p-1}$ für $p > 1$ und $q = \infty$ für $p = 1$, so dass*

$$\Phi(f) = \int_X g \cdot f \, d\mu \qquad \forall f \in L^p(X,\mu).$$

Es gilt $\|g\|_{L^q(X,\mu)} \leq \|\Phi\| := \sup_{\|f\|_{L^p(X,\mu)=1}} |\Phi(f)|$.

Bemerkung.

1. *Für $p = 2$ erhält man genau den Riesz'schen Darstellungssatz im Hilbertraum $L^2(X,\mu)$.*
2. *Formal lautet die Aussage: Ein stetiges Funktional auf L^p wird durch ein Integral dargestellt. Genauer: Das Integral kommt mit einer Dichte aus, die Darstellung erfolgt mit dem Maß $d\lambda = g \, d\mu$.*
3. *Für $p = \infty$ ist die Aussage falsch.*

Merkregel: Funktionale auf L^∞ sind problematisch.

Der Raum $L^\infty(X,\mu)$ ist ähnlich zu $C_0(X)$ (insofern, als dass die Normen ähnlich sind). Das Ziel des Riesz'schen Darstellungssatzes ist es, ein stetiges Funktional $\Phi : C_0(X) \to \mathbb{R}$ darzustellen. Dies "ersetzt" die Darstellung von Funktionalen auf $L^\infty(X,\mu)$.

Beweis von Satz 4.12. Idee: Wir definieren ein geeignetes Maß λ, nämlich

$$\lambda(E) := \Phi(\chi_E) \qquad \text{für alle messbaren Mengen } E.$$

und zeigen, dass $\lambda \ll \mu$. Der Satz von Radon-Nikodym 4.6 liefert $d\lambda = g \, d\mu$ und damit den Kandidaten g. Wir führen hier den Beweis nur für $\mu(X) < \infty$.

Schritt 1. Wohldefiniertheit von λ. χ_E ist messbar und in $L^\infty(X,\mu)$. Weiterhin ist χ_E in $L^p(X,\mu)$ wegen der Hölderungleichung und der Voraussetzung $\mu(X) < \infty$.

Schritt 2. λ ist endlich additiv. Wir behaupten, dass $\lambda(A \dot\cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$. Dies ist klar wegen $\chi_{A\dot\cup B} = \chi_A + \chi_B$ und der Linearität von Φ. Hierbei und im folgenden bezeichne χ_A die charakteristische Funktion

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schritt 3. λ ist signiertes Maß. Es gilt $|\lambda(A)| = |\Phi(\chi_A)| < \infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Sei $B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, $B_j := \bigcup_{k=1}^{j} A_k$ mit $A_k \cap A_\ell = \emptyset$ für alle $k \neq \ell$. Dann ist

$$\|\chi_B - \chi_{B_j}\|_{L^p(X,\mu)} = \|\chi_{B\setminus B_j}\|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int_{B\setminus B_j} 1^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \mu(B\setminus B_j)^{\frac{1}{p}} = (\mu(B) - \mu(B_j))^{\frac{1}{p}} \to 0$$

für $j \to \infty$. Da Φ stetig auf $L^p(X,\mu)$ ist, folgt $\Phi(\chi_B - \chi_{B_j}) = \Phi(\chi_B) - \Phi(\chi_{B_j}) = \lambda(B) - \lambda(B_j) \to 0$. Also ist

$$\lambda(B) = \lim_{j\to\infty} \lambda(B_j) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Damit ist λ ein signiertes Maß.

Schritt 4. $\lambda \ll \mu$ und Konsequenzen. Sei E mit $\mu(E) = 0$. Dann ist $\chi_E = 0$ μ-fast überall, d. h. $\|\chi_E\|_{L^p(X,\mu)} = 0$. Damit ist $\lambda(E) = \Phi(\chi_E) = 0$.

Nach dem Satz von Radon-Nikodym existiert eine Funktion $g \in L^1(X,\mu)$, so dass $d\lambda = g\, d\mu$ ist, das heißt

$$\Phi(f) \overset{(*)}{=} \int_X f \, d\lambda = \int_X f \cdot g \, d\mu.$$

Dabei gilt $(*)$ zunächst für $f = \chi_D$ mit $D \in \mathcal{A}$ und deswegen dann für alle $f \in L^p(X,\mu)$. Damit ist die behauptete Gleichung gezeigt. Es bleibt zu beweisen, dass $g \in L^q(X,\mu)$ gilt.

Fall $p = 1$ und $q = \infty$. Es ist $g \in L^\infty(X,\mu)$ zu zeigen. Sei dazu $E \subset X$ eine beliebige messbare Menge mit $\mu(E) > 0$. Es gilt

$$\left|\frac{1}{\mu(E)} \int_E g \, d\mu\right| \overset{f=\chi_E}{=} \left|\frac{1}{\mu(E)} \Phi(\chi_E)\right| \leq \frac{1}{\mu(E)} \|\Phi\| \cdot \|\chi_E\|_{L^p(X,\mu)} \overset{p=1}{=} \|\Phi\|.$$

Also ist $|g(x)| \leq \|\Phi\|$ für fast alle $x \in X$ wegen Lemma 4.5. Insbesondere gilt $g \in L^q(X,\mu) = L^\infty(X,\mu)$. Damit ist der Satz für $p = 1$ bewiesen.

Fall $p > 1$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Idee: Setze „$f = g^{q-1}$“. Dann ist $f^p = (g^{q-1})^p = g^{\frac{p}{p-1}} = g^q$. Um dem Problem von Vorzeichen und unerlaubten Testfunktionen in unserer Formel zu entgehen, setzen wir $\alpha(x) := \operatorname{sgn}(g(x))$ und $E_n := \{x : |g(x)| \leq n\}$ und damit

$$f_n(x) := \alpha(x) \cdot |g(x)|^{q-1} \cdot \chi_{E_n}(x).$$

Eingesetzt in die Gleichung $\int_X f_n \cdot g \, d\mu = \Phi(f_n)$ ergibt sich

- für die rechte Seite

$$|\Phi(f_n)| \leq \|\Phi\| \cdot \|f_n\|_{L^p(X,\mu)} = \|\Phi\| \cdot \left(\int_{E_n} |g(x)|^{(q-1)p} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|\Phi\| \cdot \left(\int_{E_n} |g(x)|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Für die linke Seite gilt

$$\int_X f_n(x) \cdot g(x) \, d\mu = \int_{E_n} \alpha(x) \cdot |g(x)|^{q-1} \cdot g(x) \, d\mu = \int_{E_n} |g(x)|^q \, d\mu.$$

Also ist

$$\int_{E_n} |g|^q \, d\mu \leq \|\Phi\| \cdot \left(\int_{E_n} |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

und wegen $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$

$$\left(\int_{E_n} |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\Phi\|.$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz 2.4 liefert $g \in L^q(X, \mu)$ mit $\|g\|_{L^q(X,\mu)} \leq \|\Phi\|$.
□

Bemerkung. *Jedes signierte Radon-Maß λ auf X definiert ein stetiges Funktional $\Phi : C_0(X) \to \mathbb{R}$, $\Phi(f) = \int_X f \, d\lambda$. Dabei verwenden wir, dass ein stetiges f messbar ist für signierte Borel-Maße λ.*

Zudem gilt für $C_c(X) \ni f_k \to f$ gleichmäßig, dass $\int_X f_k \, d\lambda \to \int_X f \, d\lambda$ wegen $|\lambda|(X) < \infty$.

Bemerkung. *Wir werden im Folgenden ausnutzen, dass $C_c(X)$ dicht liegt in $L^p(X, \mu)$ für jedes $p \in [1, \infty)$ und jedes Radon-Maß μ.*

Satz 4.13 (Riesz'scher Darstellungssatz)**.** *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner ein lokalkompakter Hausdorffraum). Sei $\Phi : C_0(X) \to \mathbb{R}$ stetig und linear. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes signiertes Radon-Maß μ auf X, so dass*

$$\Phi(f) = \int_X f \, d\mu.$$

Es gilt $|\mu|(X) = \|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})} := \sup_{\substack{f \in C_0(X) \\ \|f\|_\infty = 1}} |\Phi(f)|$.

Kurz: Der Dualraum von $C_0(X)$ sind die signierten Radon-Maße.

Beweis. Wir verwenden den Darstellungssatz in L^p und den Darstellungssatz für positive Funktionale.

Grundzug des Beweises. Konstruiere ein positives Funktional $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{R}$ linear, stetig, mit

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})} \cdot \|f\|_\infty. \tag{4.6}$$

Dies liefert nach den Satz von Riesz für positive Funktionale, Satz 3.4, ein Radon-Maß λ auf X, so dass

$$\int_X f \, d\lambda = \Lambda(f)$$

für alle $f \in C_c(X)$. Aus der ersten Ungleichung in (4.6) schließen wir weiterhin

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) = \int_X |f| \, d\lambda = \|f\|_{L^1(X,\lambda)}. \tag{4.7}$$

Mit dem neuen Maß λ ist also $\Phi : L^1(X, \lambda) \to \mathbb{R}$ stetig, oder genauer: Φ kann zu einer solchen Abbildung fortgesetzt werden, da $C_c(X)$ dicht liegt in $L^1(X, \lambda)$. Nach Satz 4.12 existiert dann ein $g \in L^\infty(X, \lambda)$, so dass

$$\Phi(f) = \int_X f \cdot g \, d\lambda \tag{4.8}$$

für alle $f \in L^1(X, \lambda)$ gilt. Das Maß $d\mu = g\, d\lambda$ leistet das Verlangte.

Schritt 1. Normen. In diesem ersten Schritt setzen wir die Existenz des Funktionals Λ mit Eigenschaft (4.6) voraus (dieses wird in den Schritten 2-4 konstruiert). Wir zeigen, dass $|\mu|(X) = \|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})}$. Dabei nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})} = 1$. Eine formale Rechnung liefert dann

$$\lambda(X) = \int_X 1\, d\lambda = \Lambda(1) \overset{(4.6)}{\leq} \|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})} \|1\|_\infty = 1.$$

Die obige Rechnung ist nur formal, da die Funktion $f(x) \equiv 1$ nicht im Raum $C_c(X)$ liegt. Durch Approximation kann das obige Ergebnis rigoros gezeigt werden.

Aus Ungleichung (4.7) folgern wir direkt die Abschätzung $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(L^1(X,\lambda),\mathbb{R})} \leq 1$. Satz 4.12 liefert dann auch $\|g\|_{L^\infty(X,\lambda)} \leq \|\Phi\|_{\mathcal{L}(L^1(X,\lambda),\mathbb{R})} \leq 1$ und somit $|g(x)| \leq 1$ für λ-fast alle x. Wir rechnen nun

$$1 \geq \int_X d\lambda \geq \int_X |g|\, d\lambda \geq \int_X f \cdot g\, d\lambda$$

für jedes $f \in C_0(X)$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$. Die Supremumsbildung ergibt

$$\begin{aligned} 1 \geq \lambda(X) \geq \int_X |g|\, d\lambda &\geq \sup\left\{ \int_X f \cdot g\, d\lambda : f \in C_0(X) \text{ und } \|f\|_\infty \leq 1 \right\} \\ &\overset{(4.8)}{=} \sup\left\{ \Phi(f) : f \in C_0(X) \text{ und } \|f\|_\infty \leq 1 \right\} \overset{\|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})}=1}{=} 1. \end{aligned}$$

Somit gilt überall Gleichheit und es folgt $|g| = 1$ fast überall. Insgesamt erhalten wir $|\mu|(X) = \int_X |g|\, d\lambda = \lambda(X) = 1 = \|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})}$, also die Behauptung.

Schritt 2. Konstruktion von Λ für nichtnegative Funktionen und Eigenschaft (4.6). Setze

$$\Lambda(f) := \sup\left\{ |\Phi(h)| : h \in C_c(X),\ |h(x)| \leq f(x) \forall x \in X \right\}.$$

Damit ist eine Abbildung $\Lambda : C_c^+(X) := \{f \in C_c(X) : f \geq 0\} \to \mathbb{R}$ definiert; sie hat die folgenden Eigenschaften:

- $|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|)$ für alle $f \in C_c^+(X)$ (verwende $h = f = |f|$)
- $\Lambda(f) \geq 0$ für alle $f \in C_c^+(X)$
- $\Lambda(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \Lambda(f)$ für alle $f \in C_c^+(X)$ und $\alpha \geq 0$
- für $0 \leq f_1 \leq f_2$ ist $\Lambda(f_2) \geq \Lambda(f_1)$
- $\Lambda(|f|) \leq \|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})} \cdot \|f\|_\infty$

Schritt 3. Linearität von Λ. Wir zeigen, dass für alle $f_1, f_2 \in C_c^+(X)$ gilt:

$$\Lambda(f_1 + f_2) = \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2).$$

„$\geq$“: Seien f_1, f_2 gegeben und $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existieren $h_1, h_2 \in C_c(X)$ mit $|h_i| \leq f_i$, so dass $\Phi(h_i) \geq \Lambda(f_i) - \varepsilon$ gilt. Die Funktion $h := h_1 + h_2$ erfüllt die Ungleichung $|h| \leq f_1 + f_2$. Weiter ist

$$\Lambda(f_1 + f_2) \geq \Phi(h) = \Phi(h_1) + \Phi(h_2) \geq \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) - 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\Lambda(f_1 + f_2) \geq \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$.

„$\le$“: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existiert ein $h \in C_c(X)$ mit $|h| \le f := f_1 + f_2$ und $\Phi(h) \ge \Lambda(f) - \varepsilon$. Wir brauchen Funktionen h_1 und h_2 zu f_1 und f_2.

Setze $V := \{x \in X : f_1(x) + f_2(x) > 0\}$. Definiere damit

$$h_1(x) := h(x) \cdot \frac{f_1(x)}{(f_1 + f_2)(x)} \quad \text{und} \quad h_2(x) := h(x) \cdot \frac{f_2(x)}{(f_1 + f_2)(x)}$$

für $x \in V$ und $h_i(x) = 0$ für alle $x \notin V$. Dass die h_i kompakten Träger haben, ist klar.

Behauptung: Die h_i sind stetig. Tatsächlich ist dies auf V und $X \setminus \overline{V}$ klar. Die Stetigkeit in den Randpunkten von V erhält man wie folgt: $\frac{f_1}{f_1+f_2}$ ist beschränkt und wegen $|h| \le f_1 + f_2$ ist $h = 0$ auf ∂V. Außerdem gilt $|h_i(x)| \le f_i(x)$ für alle $x \in X$.

Aus $h = h_1 + h_2$ folgt schließlich

$$\Lambda(f_1 + f_2) = \Lambda(f) \le \Phi(h) + \varepsilon = \Phi(h_1) + \Phi(h_2) + \varepsilon \le \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\Lambda(f_1 + f_2) \le \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$.

Die beiden Ungleichungen zusammen liefern die Linearität von Λ auf nicht-negativen Funktionen.

Schritt 4. Fortsetzung auf $C_c(X)$. Wir setzten nun Λ auf $C_c(X)$ fort, indem wir

$$\Lambda(f) := \Lambda(f_+) - \Lambda(f_-)$$

für $f = f_+ - f_-$ definieren. Diese Fortsetzung von Λ behält alle Eigenschaften.

Schritt 5. Eindeutigkeit von μ. Seien μ_1, μ_2 zwei Darstellungs-Maße. Für $\mu := \mu_1 - \mu_2$ gilt dann $\int_X f\, d\mu = \int_X f\, d\mu_1 - \int_X f\, d\mu_2 = \Phi(f) - \Phi(f) = 0$ für alle $f \in C_0(X)$. Damit folgt auch $\mu = 0$ und somit $\mu_1 = \mu_2$. Tatsächlich liefert die Polarzerlegung die Existenz von $h \in L^1(X, |\mu|)$ mit $|h| = 1$ fast überall und $d\mu = h\, d|\mu|$. Wähle $C_0(X) \ni f_k \overset{k\to\infty}{\to} h$ in $L^1(X, |\mu|)$. Dann ist wegen $\int_X f_k\, d\mu = 0$ auch

$$|\mu|(X) = \int_X d|\mu| = \int_X h\, d\mu = \int_X (h - f_k)\, d\mu = \int_X (h - f_k) \cdot h\, d|\mu| \le \|h - f_k\|_{L^1(X,|\mu|)} \to 0.$$

Also ist $|\mu| = 0$ und somit $\mu = 0$. $\square$

Teil II.

Erweiterungen und Anwendungen

5. Schwache Konvergenz

5.1. Definitionen und Kompaktheit

Im Folgenden sei immer Ω eine Menge und X ein Banachraum. Warnung: Damit hat X hier eine andere Bedeutung als in Teil I der Vorlesung!

Motivation und Ausblick: Wir betrachten $X := L^p(\Omega, \mu)$. Dann besitzt jede in X beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge. Genauer, seien $f_k \in X$ mit $\|f_k\|_{L^p(X,\mu)} \leq C$ für ein $C > 0$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Teilfolge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $f \in L^p(\Omega, \mu)$, so dass $f_{k_j} \rightharpoonup f$ für $j \to \infty$ (schwach in $L^p(\Omega, \mu)$).

Problem: Obiges gilt nur für reflexive L^p-Räume, also für $p \in (1, \infty)$. Wegen $(L^\infty)' \neq L^1$, sind L^1 und L^∞ nicht reflexiv und die Aussage gilt nicht für $p = 1$ und für $p = \infty$.

Im Fall $p = 1$ hilft allerdings der Riesz'sche Darstellungssatz. Er impliziert $\mathcal{M}(\Omega) = (C_0(\Omega))'$, wobei

$$\mathcal{M}(\Omega) := \{\mu \,|\, \mu \text{ ist ein signiertes Borel-Maß auf } \Omega\}$$

und damit $L^1(\Omega, \mu) \subset \mathcal{M}(\Omega) = (C_0(\Omega))'$. Wir können schließen: Ist $f_k \in L^1(\Omega, \mu)$ beschränkt, dann existiert eine Teilfolge und ein $\lambda \in \mathcal{M}(\Omega) = (C_0(\Omega))'$, so dass $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ in $\mathcal{M}(\Omega)$. Dabei muss die Inklusion $L^1(\Omega, \mu) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ noch richtig interpretiert werden.

Beispiele für X und die zugehörigen Dualräume $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \{x' : X \to \mathbb{R} : x' \textit{ linear und stetig}\}$.

- $X = L^p(\Omega, \mu)$ für $p \in [1, \infty)$. Dann gilt nach Satz 4.12 für den Dualraum $(L^p(\Omega, \mu))' = L^q(\Omega, \mu)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- $X = L^\infty(\Omega, \mu)$. Dieser Banachraum ist nicht reflexiv und auch nicht separabel. Der Dualraum ist kompliziert.
- $X = C_0(\Omega)$. Dann ist $X' = \mathcal{M}(\Omega)$.

Mit der folgenden Norm ist der Dualraum X' ein Banachraum.

$$\|x'\|_{X'} := \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X \leq 1}} |x'(x)|.$$

Dazu gibt es eine **Normkonvergenz**, $x'_k \to x' \Leftrightarrow \|x_k - x\|_{X'} \to 0$. Diese Normkonvergenz wird allerdings praktisch selten verwendet.

Wichtiger sind die schwachen Konvergenzbegriffe (in Räumen und in Dualräumen)

Definition 5.1. *Sei X ein Banachraum und X' der Dualraum. Weiterhin seien x_k eine Folge in X und x'_k eine Folge in X'. Dann definieren wir*

1. *x_k' konvergiert schwach-$*$ gegen $x' \in X'$ genau dann wenn*

$$x_k' \overset{*}{\rightharpoonup} x' :\Longleftrightarrow x_k'(x) \to x'(x) \quad \forall x \in X.$$

2. *x_k konvergiert schwach gegen $x \in X$ genau dann wenn*

$$x_k \rightharpoonup x :\Longleftrightarrow x'(x_k) \to x'(x) \quad \forall x' \in X'.$$

Für Elemente $\lambda_k \in X'$ gilt $\lambda_k \rightharpoonup \lambda$ (schwach in X') $\Longleftrightarrow \mu(\lambda_k) \to \mu(\lambda)$ für alle $\mu \in X''$. Falls alle Funktionale auf X' gegeben sind durch Elemente von X (durch die zugehörige Auswertungsabbildung: Identifiziere $x \in X$ mit $\mu_x \in X''$ durch $\mu_x(\lambda) := \lambda(x)$ für $\lambda \in X'$), dann stimmen schwache und schwach-* Konvergenz in Dualräumen überein. Im allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall, die schwache Konvergenz ist stärker als die schwach-*-Konvergenz, denn sie läßt mehr Abbildungen zu: Es gilt '$X \subset X''$'.

Beispiel 5.2. *Sei $X = \ell^2 := \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Ein $x \in X$ schreiben wir als $x = (a^1, a^2, a^3, ...)$. Dann ist*

$$\|x\|_{\ell^2}^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} |a^j|^2.$$

Damit ist X sogar ein Hilbertraum mit $\langle x, y\rangle = \sum_j a^j \cdot b^j$, wobei $y = (b^1, b^2, b^3, ...)$.

Sei $x_k \in X = \ell^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = (a_k^1, a_k^2, a_k^3, ...)$. Weiterhin gelte $x_k \rightharpoonup x = (a^1, a^2, a^3, ...)$. Dann gilt $a_k^j \to a^j$ für $k \to \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Beweis. Setze $x' = e_j' \in X'$ mit $e_j' : (a^1, a^2, ...) \longmapsto a^j$. Dann gilt $a_k^j = e_j'(x_k) \to e_j'(x) = a^j$ für $k \to \infty$. □

Warnung: Die umgekehrte Implikation gilt nicht! Für $x_k := k \cdot e_k = (0, ..., k, 0, ...) \in X$ konvergiert $a_k^j \overset{k\to\infty}{\to} 0$ für alle j, obwohl $x_k \not\rightharpoonup 0$ gilt. Denn für $x' : (a^1, a^2, ...) \mapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} a^j \frac{1}{j}$ gilt $x' \in X'$ und $x'(x_k) = 1$, aber $x'(0) = 0$.

Beispiel 5.3. *Betrachte $x_k := e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$. Behauptung: $x_k \rightharpoonup 0$ und $\|x_k - 0\|_{\ell^2}^2 = \|x_k\|^2 = 1$. Die Folge x_k konvergiert also schwach, aber nicht stark.*

Beweis der Behauptung: Nach dem Riesz'schen Satz für Hilberträume existiert für alle $x' \in X' = (\ell^2)'$ ein $x \in X$, so dass $x'(y) = \langle x, y\rangle$ für alle $y \in X$. Sei nun $x' \in X'$ beliebig. Sei dazu $x \in X$ mit $x'(y) = \langle x, y\rangle$. Dieses x ist von der Form $x = (a^1, a^2, a^3, ...)$ für eine Nullfolge a^j. Dann ist

$$x'(x_k) = \langle x, x_k\rangle = \langle x, e_k\rangle = a^k \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Also gilt $x_k \rightharpoonup 0$.

Weiterhin ist auch $e_k' := \langle x_k, .\rangle \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, obwohl $\|e_k'\|_{X'} = 1$. Dies ist klar, denn im Hilbertraum stimmen schwach-$*$ und schwache Konvergenz überein.

Wir erinnern an den Satz von Hahn-Banach aus der Funktionalanalysis.

Satz (Hahn-Banach Fortsetzungssatz)**.** *Sei X ein normierter reeller Vektorraum und Y ein linearer Unterraum sowie $\lambda \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{R})$. Dann existiert ein $\tilde{\lambda} \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, so dass $\tilde{\lambda}|_Y = \lambda$ und $\|\tilde{\lambda}\|_{X'} = \|\lambda\|_{Y'}$.*

Bemerkung 5.4.

1. *Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.*
2. *Schwache Limiten sind eindeutig.*
3. *Schwach konvergente Folgen sind beschränkt.*
4. *Die Norm ist schwach unterhalbstetig,*

$$x_k \rightharpoonup x \Rightarrow \|x\|_X \leq \liminf_k \|x_k\|_X.$$

Beispiel. *In obigem l^2-Beispiel tritt die schwache Unterhalbstetigkeit mit strikter Ungleichung auf: $e_k \in \ell^2$, $e_k \rightharpoonup 0$, aber $\|0\|_{\ell^2} = 0 < \lim_k \|e_k\| = 1$.*

Beweis von Bemerkung 5.4.

1. Seien $x_k \to x$ und $x' \in X'$. Dann folgt

$$|x'(x_k) - x'(x)| = |x'(x_k - x)| \leq \underbrace{\|x'\|_{X'}}_{=:C} \cdot \underbrace{\|x_k - x\|_X}_{\to 0} \to 0$$

.

2. Sei $x_k \rightharpoonup a$ und $x_k \rightharpoonup b$. Für jedes $x' \in X'$ gilt dann

$$x'(a) \longleftarrow x'(x_k) \to x'(b).$$

Also ist $x'(a-b) = x'(a) - x'(b) = 0$ für alle $x' \in X'$. Mit dem Satz von Hahn-Banach folgert man $a - b = 0$, denn: Auf dem Unterraum $Y := \{\lambda(a-b) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ definiert $y'(\lambda(a-b)) := \lambda\|a-b\|_X$ ein stetiges lineares Funktional. Dazu gibt es ein $x' \in X'$ mit $x'|_Y = y'$. Somit folgt $0 = x'(a-b) = y'(a-b) = \|a-b\|$, also $a = b$.

3. Sei $x_k \rightharpoonup x$ in X. Wir konstruieren eine Familie von Funktionalen auf X', nämlich die Einsetzabbildungen $\mu_k \in X''$ mit $\mu_k(x') := x'(x_k)$. Wegen

$$\mu_k(x') = x'(x_k) \to x'(x)$$

ist für jedes $x' \in X'$ die Folge $\mu_k(x')$ beschränkt. Also ist $\sup_k \mu_k(x') < \infty$ für alle $x' \in X'$. Der Satz von Banach-Steinhaus impliziert nun $\sup_k \|\mu_k\|_{X''} < \infty$.

Wähle x'_k mit $x'_k(x_k) = \|x_k\|$, $\|x'_k\| = 1$ (ein solches x'_k existiert nach dem Satz von Hahn-Banach). Also ist

$$\sup_k \|x_k\|_X = \sup_k x'_k(x_k) = \sup_k \mu_k(x'_k) \leq \sup_k \|\mu_k\|_{X''} < \infty.$$

4. Sei $x_k \rightharpoonup x$ in X. Nach Hahn-Banach existiert ein $x' \in X'$ mit $\|x'\|_{X'} = 1$, $x'(x) = \|x\|_X$. Dann ist

$$\|x\|_X = x'(x) = \lim_k x'(x_k) \leq \liminf_k \underbrace{\|x'\|_{X'}}_{=1} \cdot \|x_k\|_X.$$

□

Bemerkung 5.4 gilt auch für die schwach-$*$ Konvergenz.

Satz (Satz von Banach-Steinhaus)**.** *Sei X ein Banachraum, Y normierter Raum, $F \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Dann gilt: Falls für alle $x \in X$ gilt, dass $\sup_{A\in F} \|A(x)\| < \infty$, dann gilt sogar auch*

$$\sup_{A\in F} \|A\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X=1\\ A\in F}} \|A(x)\| < \infty$$

<u>Frage:</u> Wofür benötigt man die schwache Konvergenz?
<u>Antwort:</u> Weil man leicht schwache Limiten findet!

Satz 5.5. *Sei X separabel. Dann ist jede abgeschlossene Kugel $\overline{B_R(0)} \subset X'$ schwach-$*$ folgenkompakt. Das bedeutet insbesondere: Für alle $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X' mit $\|\lambda_k\|_{X'} \leq R$ für alle k existiert eine Teilfolge (λ_{k_ℓ}) und $\lambda \in X'$, so dass $\lambda_{k_\ell} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ in X'.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $a_n \in X$ eine dichte Familie in X (das heißt für alle $x \in X$ existiert eine Teilfolge n_ℓ, so dass $a_{n_\ell} \to x$; dies ist eine mögliche Definition der Seperabilität).

Betrachte für festes n die Folge $(\lambda_k(a_n))_{k\in\mathbb{N}}$. Wegen $|\lambda_k(a_n)| \leq \|\lambda_k\|_{X'} \cdot \|a_n\|_X \leq R \cdot C$ ist diese für jedes n beschränkt in $\mathbb{R}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge. Nach dem Diagonalverfahren finden wir eine Teilfolge k_j, so dass $\lambda_{k_j}(a_n)$ für alle n gegen den Limes b_n konvergiert.

Definiere λ durch $a_n \longmapsto b_n$ und falls $x \in X$ mit $x = \lim_\ell a_{n_\ell}$ (Dichtheit) setze $\lambda(x) := \lim_\ell b_{n_\ell}$.

Zu zeigen ist:

1. $\lambda \in X'$ ist wohldefiniert.
2. Es gilt $\lambda_{k_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ in X'.

Zu 1.: Wegen $a_{n_\ell} \to x$ ist a_{n_ℓ} eine Cauchy-Folge, das heißt $\|a_n - a_m\|_X \to 0$ für $n, m \to \infty$ entlang der Teilfolge n_ℓ. Also ist

$$\begin{aligned}
|b_n - b_m| &= \left|\lim_j \lambda_{k_j}(a_n) - \lim_j \lambda_{k_j}(a_m)\right| \\
&\leq \limsup_j \|\lambda_{k_j}\|_{X'} \cdot \|a_n - a_m\|_X \leq R \cdot \|a_n - a_m\|_X \to 0.
\end{aligned}$$

Also sind die $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$. Insbesondere ist λ wohldefiniert (das heißt $\lim_\ell b_{n_\ell}$ existiert und ist unabhängig von der a_{n_ℓ}-Folge).

Die Linearität von λ' ist klar. Weiterhin gilt

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X\leq 1}} \lambda(x) = \sup_{\substack{a_n\\ \|a_n\|_X\leq 1}} \lambda(a_n) = \sup_{\substack{a_n\\ \|a_n\|_X\leq 1}} \limsup_j \underbrace{\lambda_{k_j}(a_n)}_{\leq R\cdot\|a_n\|_X\leq R} \leq R.$$

Zu 2.: Sei $x \in X$ beliebig. Es bleibt $\lambda_{k_j}(x) \to \lambda(x)$ für $j \to \infty$ zu zeigen.

Wähle a_n nahe an x:

$$|\lambda_{k_j}(x) - \lambda(x)| \leq |\lambda_{k_j}(x) - \lambda_{k_j}(a_n)| + |\lambda_{k_j}(a_n) - \underbrace{\lambda(a_n)}_{b_n}| + |\lambda(a_n) - \lambda(x)|.$$

Für $\|a_n - x\|_X$ klein ist der erste und dritte Term klein. Mit j hinreichend groß ist auch der zweite Term klein. $\square$

Wir übertragen nun das Ergebnis auf die schwache Konvergenz.

Satz 5.6. *Sei X reflexiv. Dann ist jede Kugel $\overline{B_R(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt. Das bedeutet inbesondere: Falls $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X ist, so existiert eine Teilfolge x_{k_ℓ} und $x \in X$, so dass $x_{k_\ell} \rightharpoonup x$ in X.*

Beweis. Idee: Die x_k sind in X''. Wähle schwach-$*$ konvergente Teilfolge in $X'' = (X')'$ und interpretiere das Ergebnis in X.

Annahme: X' ist separabel (dies ist nicht notwendig: Verwende im allgemeinen Fall Räume, die als Span der $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert sind).

Definiere $Jx_k \in X''$ durch $Jx_k(\lambda) := \lambda(x_k)$ für alle $\lambda \in X'$. Dabei ist

$$\|Jx_k\|_{X''} = \sup\{\underbrace{Jx_k(\lambda)}_{\lambda(x_k)} : \lambda \in X',\ \|\lambda\|_{X'} \leq 1\} \leq 1 \cdot \|x_k\|_X$$

beschränkt.

Nach Satz 5.5 existiert ein $x'' \in X''$ und eine Teilfolge k_ℓ, so dass $Jx_{k_\ell} \overset{*}{\rightharpoonup} x''$ in X''. Da X reflexiv ist, existiert ein $x \in X$, mit $x'' = Jx$ (da J surjektiv ist).

Behauptung: $x_{k_\ell} \rightharpoonup x$ in X.

Beweis der Behauptung: Sei $\lambda \in X'$ beliebig. Dann ist

$$\lambda(x_{k_\ell}) = Jx_{k_\ell}(\lambda) \to x''(\lambda) = Jx(\lambda) = \lambda(x).$$

□

Anwendung von Satz 5.5 auf den Raum $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Ist $X = C_0(\mathbb{R}^n)$ der Grundraum, dann ist der Dualraum $X' = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, der Raum der signierten Radon-Maße auf $\mathbb{R}^n$. Mit der Norm $\|\mu\|_{\mathcal{M}} := |\mu|(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum.

Bemerkung. *Der Raum $C_0(\mathbb{R}^n)$ ist separabel, das heißt die schwach $*$-Kompaktheit gilt in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = C_0(\mathbb{R}^n)'$. Gegeben sei eine Folge $\mu_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\mu_k\|_{\mathcal{M}} := |\mu_k|(\mathbb{R}^n) \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein Maß $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und eine Teilfolge k_j, so dass $\mu_{k_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, also*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_{k_j} \to \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Die schwach-$*$ Konvergenz in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ist die am häufigsten verwendete Konvergenz in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel. *Sei $x_k \in \mathbb{R}^n$ eine Folge von Punkten. Setze $\mu_k := \delta_{x_k}$. Dann ist*

$$\|\mu_k\|_{\mathcal{M}} = |\delta_{x_k}|(\mathbb{R}^n) = \delta_{x_k}(\mathbb{R}^n) = 1.$$

Also existiert eine Teilfolge μ_{k_j} und ein Grenzwert μ, so dass $\mu_{k_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Für alle $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ gilt also

$$\mu_{k_j}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_{k_j} \overset{j\to\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu =: \mu(f).$$

Das Grenzmaß μ lässt sich genau charakterisieren.

Bemerkung. *Es gilt*

$$\mu = \begin{cases} \delta_x & , \text{ falls } x_{k_j} \to x \\ 0 & , \text{ falls } |x_{k_j}| \to \infty. \end{cases}$$

Tatsächlich kann man zeigen, dass die Teilfolge x_{k_j} entweder konvergiert oder unbeschränkt ist. Der Beweis ist eine Übung.

Für beschränkte Folgen x_k hat diese Aussage also einen direkten Bezug zum Satz von Bolzano-Weierstraß.

Wichtiges allgemeines Beispiel: Dichtefunktionen $u_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} |u_k| \, d\mathcal{L}^n \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ lassen sich mit Maßen $\mu_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ identifizieren. Setze für $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

$$\mu_k(A) = \int_A u_k \, d\mathcal{L}^n.$$

Diese Maße erfüllen

$$\|\mu_k\|_{\mathcal{M}} = |\mu_k|(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} |u_k| \, d\mathcal{L}^n = \|u_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)} \leq C,$$

sind also beschränkt. Daher bilden die μ_k eine beschränkte Familie und nach Satz 5.5 existiert eine Teilfolge $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Insofern erhalten wir immerhin (lax gesagt): $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ als Maß. Genauer:

$$C_0(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} u_k \cdot f \, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k \to \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu.$$

Beispiel. *Dirac-Folgen Φ_ε erfüllen $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\varepsilon \, d\mathcal{L}^n = 1$. Im Maßsinne hat Φ_ε also eine Teilfolge, die schwach-$*$ konvergiert; der Limes dieser Teilfolge (wieder als Φ_ε bezeichnet) ist das Dirac-Maß, $\Phi_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_0$. Allerdings ist der Limes nicht in L^1, insofern können wir keine L^1-Konvergenz erwarten.*

Bemerkung 5.7 (Zwei schwache Konvergenzen treffen aufeinander)**.** *Sei X ein Banachraum, X' der Dualraum, $x_k \rightharpoonup x$ in X und $\lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ in X'. Ist eine der Konvergenzen stark, so gilt*

$$\lambda_k(x_k) \xrightarrow{k} \lambda(x).$$

Beweis. Sei $x_k \overset{X}{\rightharpoonup} x$, $\lambda_l \to \lambda$ in X'. Dann gilt

$$|\lambda_k(x_k) - \lambda(x)| \leq \underbrace{|\lambda_k(x_k) - \lambda(x_k)|}_{\leq \|\lambda_k - \lambda\|_{X'} \cdot \|x_k\|_X \to 0} + \underbrace{|\lambda(x_k) - \lambda(x)|}_{\overset{x_k \rightharpoonup x}{\to} 0},$$

da schwach konvergente Folgen beschränkt sind.

Für $\lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$, $x_k \to x$ rechnen wir

$$|\lambda_k(x_k) - \lambda(x)| \leq \underbrace{|\lambda_k(x_k) - \lambda_k(x)|}_{\leq \|\lambda_k\|_{X'} \cdot \|x_k - x\|_X \to 0} + \underbrace{|\lambda_k(x) - \lambda(x)|}_{\to 0}.$$

□

Beispiel. *Falls beide Konvergenzen schwach sind, kann nichts ausgesagt werden. Man denke an* $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ *mit* $X' \cong \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ *und die Folge* $x_k = e_k$, $\lambda_k := e_k'$ *mit* $\lambda_k(\varphi) = \langle \varphi, e_k\rangle$. *Dann gilt* $x_k \rightharpoonup 0$ *und* $\lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, *aber* $\lambda_k(e_k) = 1 \not\to 0$ *für* $k \to \infty$.

Bemerkung 5.8. *Es gilt die folgende Verschärfung. Sei* X *separabler Banach-Raum,* $x_k \rightharpoonup x$ *mit folgender Eigenschaft: Für alle Folgen* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X'$ *mit* $\|\lambda_k\|_{X'} \leq C$ *und* $\lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ *gilt auch* $\lambda_k(x_k) \to \lambda(x)$. *Dann folgt die starke Konvergenz* $x_k \to x$.

Beweis. Betrachte $y_k := x_k - x \rightharpoonup 0$. Zu zeigen ist: $y_k \to 0$.
Angenommen, $y_k \not\to 0$. Dann existiert nach Hahn-Banach ein $\lambda_k \in X'$, so dass $\lambda_k(y_k) = \|y_k\|_X \not\to 0$ und $\|\lambda_k\|_{X'} \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für eine Teilfolge (nicht umbenannt) und ein $\lambda \in X'$ gilt dann $\lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ und somit

$$0 \overset{\text{Konstruktion}}{\not\longleftarrow} \lambda_k(y_k) = \lambda_k(x_k - x) = \lambda_k(x_k) - \lambda_k(x) \overset{\text{n.V.}}{\to} \lambda(x) - \lambda(x) = 0.$$

Das ist ein Widerspruch. □

5.2. Schwache Konvergenz in L^p und in $\mathcal{M}$

L^p-Räume: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, μ ein Maß auf Ω und $X = L^p(\Omega,\mu)$. Für $p \in [1,\infty)$ gilt nach Satz 4.12, dass $(L^p(\Omega,\mu))' = L^q(\Omega,\mu)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, also $q = \frac{p}{p-1}$ für $p > 1$ und $q = \infty$ für $p = 1$. Im Folgenden werden wir die Abkürzung $L^p := L^p(\Omega,\mu)$ verwenden.

Bemerkung 5.9. *In* L^p *gilt Folgendes.*

- *Für* $p \in [1,\infty)$ *gilt*

$$\begin{aligned} u_k \rightharpoonup u \text{ in } L^p &\iff \forall \lambda \in (L^p)' \cong L^q \text{ gilt } \lambda(u_k) \overset{k}{\to} \lambda(u) \\ &\iff \forall v \in L^q(\Omega,\mu) \text{ gilt } \int_\Omega v \cdot u_k \, d\mu \to \int_\Omega v \cdot u \, d\mu. \end{aligned}$$

- *Sei* $\|u_k\|_{L^p} \leq C$ *für* $p \in (1,\infty)$. *Dann ist* u_k *eine beschränkte Folge in einem reflexiven Banachraum. Daher existiert eine Teilfolge und ein Limes* $u \in L^p$, *so dass* $u_k \rightharpoonup u$ *in* L^p.

Beispiel. *Das Beispiel einer schwach konvergenten Folge in* L^p.

Sei $u_k(x) = \sin(k \cdot x)$ *für* $x \in \Omega = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ *mit* $\mu = \mathcal{L}^1$. *Dann gilt* $u_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} 0$ *in* L^p *für alle* $p \in (1,\infty)$.

Beweis. Es gilt $\|u_k\|_{L^p}^p \leq 2\pi$. Die Kompaktheit liefert die Existenz einer Teilfolge (wieder als u_k bezeichnet) und einen Limes $u \in L^p$, so dass $u_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ in L^p. Sei $\Phi \in C^1([0,2\pi],\mathbb{R})$ eine Testfunktion. Inbesondere ist dann $|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq C_L \cdot |x-y|$ (Lipschitz-Stetigkeit) und $\Phi \in L^q$, also eine zulässige Testfunktion. Somit gilt

$$\int_0^{2\pi} u_k \cdot \Phi \, d\mathcal{L}^1 \to \int_0^{2\pi} u \cdot \Phi \, d\mathcal{L}^1 \text{ für } k \to \infty.$$

Wir wählen Intervalle $I_\ell := (\ell \cdot \frac{2\pi}{k}, (\ell+1)\cdot\frac{2\pi}{k})$ mit $l \in \{0,1,\dots,k-1\}$. Dann ist

$$\int_0^{2\pi} u_k \cdot \Phi \, d\mathcal{L}^1 = \sum_{\ell=0}^{k-1} \Big\{ \int_{I_\ell} u_k(x) \cdot \underbrace{\left[\Phi(x) - \Phi\left(\ell \cdot \frac{2\pi}{k}\right)\right]}_{|\ | \le C_L \cdot \frac{2\pi}{k}} + \Phi\left(\ell \cdot \frac{2\pi}{k}\right) \underbrace{\int_{I_\ell} u_k(x)\, dx}_{=0} \Big\}.$$

Dabei handelt es sich bei $\int_{I_\ell} u_k(x)\, dx$ bis auf einen $\frac{2\pi}{k}$-Faktor um den Mittelwert von $\sin(y)$ über das Intervall $(0, 2\pi)$,

$$\int_{I_\ell} u_k(x) dx = \int_{l\frac{2\pi}{k}}^{(l+1)\frac{2\pi}{k}} \sin(kx)\, dx \overset{y=kx}{=} \frac{1}{k} \int_{l2\pi}^{(l+1)2\pi} \sin(y)\, dy = \frac{2\pi}{k}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(y)\, dy\right) = 0.$$

Es gilt somit

$$\left|\int_0^{2\pi} u \cdot \Phi \, d\mathcal{L}^1\right| \longleftarrow \left|\int_0^{2\pi} u_k \cdot \Phi \, d\mathcal{L}^1\right| \le \sum_{\ell=0}^{k-1} \underbrace{|I_\ell|}_{=\frac{2\pi}{k}} \cdot C_L \cdot \frac{2\pi}{k} \to 0.$$

Also folgt $u = 0$, die Funktionenfolge konvergiert schwach gegen ihren Mittelwert. $\square$

Schwache Konvergenz in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

Nach Definition bedeutet die schwach-* Konvergenz $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, dass für alle $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k \to \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu.$$

Wir wollen einen verwandten Konvergenzbegriff näher betrachten.

Satz 5.10. *Für (positive) Radon-Maße μ_k, μ auf $\mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Für alle $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gilt*
$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k \to \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu.$$
2. *Für alle $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt gilt*
$$\mu(K) \ge \limsup_k \mu_k(K)$$
und für alle $U \subset \mathbb{R}^n$ offen gilt
$$\mu(U) \le \liminf_k \mu_k(U).$$
3. *Für alle beschränkten Borel-Mengen $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(\partial B) = 0$ gilt*
$$\mu_k(B) \to \mu(B).$$

Ein Beispiel zur Voraussetzung im dritten Punkt: Man betrachte $\mu_k = \delta_{\{\frac{1}{k}\}}$ und $\mu = \delta_0$, sowie $B = (0,1]$. Dann gilt 1., aber nicht die Konklusion von 3. Tatsächlich ist $\mu(\partial B) \neq 0$.

Beweis. „1. $\Rightarrow$ 2.“ Es gelte $\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu_k \to \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu$ für alle $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U$ kompakt. Wähle $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, so dass $\begin{cases} f \equiv 1 \text{ auf } K \\ \operatorname{supp}(f) \subset U \end{cases}$ und $0 \leq f \leq 1$. Dann ist

$$\mu_k(U) \geq \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu_k \to \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu \geq \mu(K).$$

Nach Anwendung des $\liminf$ ergibt sich

$$\liminf_{k\to\infty} \mu_k(U) \geq \mu(K).$$

Da K beliebig in U gewählt ist, folgt die Behauptung für U wegen der inneren Regularität von Radon-Maßen.

Der Beweis für kompakte Mengen K verläuft analog.

„2. $\Rightarrow$ 3.“ Sei B eine Borel-Menge mit $\mu(\partial B) = 0$.

$$\begin{aligned} \mu(B) &\leq \mu(B^0 \cup \partial B) = \mu(B^0) + \underbrace{\mu(\partial B)}_{=0} \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_k(B^0) \leq \limsup_{k\to\infty} \mu_k(\overline{B}) \\ &\leq \mu(\overline{B}) = \mu(B^0 \cup \partial B) \leq \mu(B). \end{aligned}$$

In der obigen Ungleichungskette muss also überall Gleichheit vorliegen. Wegen $\mu_k(B^0) \leq \mu_k(B) \leq \mu_k(\overline{B})$ gilt $\mu_k(B) \to \mu(B)$.

„3. $\Rightarrow$ 1.“ Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset B_R(0)$ und $M := \|f\|_\infty$. Sei $R > 0$ so gewählt, dass $\mu(\partial B_R(0)) = 0$ gilt.

Es genügt, Behauptung 1. für $f \geq 0$ zu zeigen. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N$, $t_N \geq 2M$ mit $t_j - t_{j-1} \leq \varepsilon$. Setze $B_j := f^{-1}((t_{j-1}, t_j])$. Dann ist jedes B_j eine Borel-Menge und es gilt $B_j \subset B_R(0)$. Die t_j können so gewählt werden, dass $\mu(\partial B_j) \leq \mu(f^{-1}(\{t_{j-1}\})) + \mu(f^{-1}(\{t_j\})) = 0$ für $j \geq 2$ gilt. Es folgt

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{j=2}^N t_{j-1} \cdot \mu(B_j) \leq & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu & \leq \displaystyle\sum_{j=2}^N t_j \cdot \mu(B_j) + t_1 \cdot \mu(B_R(0)). \\ \uparrow & & \uparrow \\ \displaystyle\sum_{j=2}^N t_{j-1} \cdot \mu_k(B_j) \leq & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu_k & \leq \displaystyle\sum_{j=2}^N t_j \cdot \mu(B_j) + t_1 \cdot \mu_k(B_R(0)) \end{array}$$

mit $|t_j - t_{j-1}| < \varepsilon$. Also gilt 1. $\square$

Definition 5.11 (Schwache Konvergenz in $\mathcal{M}$). *Für (positive) Radon-Maße μ_k, μ setzen wir*

$$\mu_k \overset{\mathcal{M}}{\rightharpoonup} \mu :\Longleftrightarrow \textit{Eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 5.10 ist erfüllt.}$$

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned}\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad &:\Longleftrightarrow \quad \mu_k \textit{ konvergiert schwach-}* \textit{ in } \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = (C_0(\mathbb{R}^n))' \\ &\Longleftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu_k \overset{k}{\to} \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

mit der Kompaktheit

$$\|\mu_k\|_{\mathcal{M}} \leq C \overset{5.5}{\Rightarrow} \text{ es existiert eine Teilfolge und } \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \text{ so dass } \mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu. \tag{5.1}$$

Bemerkung 5.12. *Der Unterschied der beiden Konvergenzbegriffe liegt im Unendlichen. Es gilt*

$$\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \Leftrightarrow \mu_k \overset{\mathcal{M}}{\rightharpoonup} \mu \text{ und } \|\mu_k\|_{\mathcal{M}} = |\mu_k|(\mathbb{R}^n) \leq C. \tag{5.2}$$

Die Kompaktheitsaussage für die schwache Maßkonvergenz ist:

$$\text{Falls } \sup_k |\mu_k|(M) < \infty \text{ für alle } M \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt,} \tag{5.3}$$

so existiert eine Teilfolge und ein Grenzmaß $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, so dass $\mu_k \overset{\mathcal{M}}{\rightharpoonup} \mu$ gilt.

Beispiel. *Betrachte $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \ni \mu_k := k\delta_k$. Dann gilt für $f \in C_c(\mathbb{R})$ die Konvergenz $\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_k = kf(k) \to 0$ für $k \to \infty$. Es folgt also $\mu_k \overset{\mathcal{M}}{\rightharpoonup} \mu = 0$. Da $|\mu_k|(\mathbb{R}) = k$ jedoch unbeschränkt ist, konvergiert μ_k nicht schwach-$*$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.*

Beweis von Bemerkung 5.12. Die Implikation "$\Rightarrow$" in (5.2) gilt, weil schwach-$*$-konvergente Folgen beschränkt sind.

Bezüglich „$\Leftarrow$“ in (5.2): Da μ_k in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt ist, existiert eine Teilfolge und ein Grenzmaß $\tilde{\mu}$, so dass $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{\mu}$. Da μ und $\tilde{\mu}$ aber angewendet auf $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ dasselbe liefern, sind sie identisch, $\mu = \tilde{\mu}$.

Für die Kompaktheitsaussage betrachten wir die kompakten Mengen $\overline{B_m(0)}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung ist $\mu_k\left(\overline{B_m(0)}\right)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ beschränkt (unabhängig von k) und somit die Einschränkung von μ_k auf $\overline{B_m(0)}$ beschränkt in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Nach (5.1) existieren ein $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge mit $\mu_k \lfloor \overline{B_m(0)} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \lfloor \overline{B_m(0)}$. Die Diagonalfolge erfüllt $\mu_k \overset{\mathcal{M}}{\rightharpoonup} \mu$.

□

Neue Konvergenzen und neue Sichtweisen

Satz 5.13 (Egoroff)**.** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mu(X) < \infty$ und $f_j, f : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sind folgende Aussage äquivalent:*

1. *$f_j \to f$ μ-fast überall für $j \to \infty$*
2. *$f_j \to f$ gleichmäßig auf beliebig großen Mengen. Genauer: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $G_\varepsilon \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X \setminus G_\varepsilon) \leq \varepsilon$ und*

$$f_j \to f \text{ gleichmäßig auf } G_\varepsilon \text{ für } j \to \infty$$

Beweis. „2. ⇒ 1.“ Wähle zu $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ Mengen $G_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X \setminus G_{\frac{1}{n}}) \leq \frac{1}{n}$ und $f_j \to f$ gleichmäßig auf $G_{\frac{1}{n}}$. Für $G := \bigcup_n G_{\frac{1}{n}}$. erhalten wir

$$\mu(X \setminus G) = \mu\underbrace{\Big(X \setminus \bigcup_n G_{\frac{1}{n}} \Big)}_{\bigcap X \setminus G_{\frac{1}{n}}} = 0.$$

Außerdem gilt für alle $x \in G$, dass $f_j(x) \to f(x)$.
„1. ⇒ 2.“ Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei weiter $G \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X \setminus G) = 0$, $f_j(x) \to f(x)$ für $j \to \infty$ für alle $x \in G$. Definiere

$$G_{k,n} := \left\{ x \in G : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \; \forall j \geq k \right\}.$$

Da f_j, f messbar sind, ist $G_{k,n} \in \mathcal{A}$. Nach Konstruktion gilt $G_{k,n} \subset G_{k+1,n}$ für $n \in \mathbb{N}$ fest. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ behaupten wir

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_{k,n} = G.$$

„$\subset$“ ist klar.
„$\supset$“ gilt wegen $f_j(x) \to f(x)$ für alle $x \in G$.
Wegen

$$\mu(G_{k,n}) \overset{k\to\infty}{\to} \mu(G) = \mu(X) < \infty$$

existiert für jedes n ein k_n, so dass $\mu(G \setminus G_{k_n,n}) \leq \varepsilon \cdot 2^{-n}$ ist. Setze $G_\varepsilon := \bigcap_n G_{k_n,n}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mu(X \setminus G_\varepsilon) &= \mu\left(X \setminus \bigcap_n G_{k_n,n} \right) = \mu\left(\bigcup_n X \setminus G_{k_n,n} \right) \\
&\overset{\mu(X \setminus G)=0}{=} \mu\left(\bigcup_n G \setminus G_{k_n,n} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G \setminus G_{k,n}) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Auf G_ε gilt $f_j \to f$ gleichmäßig. Begründung: Sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} \leq \delta$. Für $x \in G_\varepsilon$ gilt insbesondere $x \in G_{k_{n_0},n_0}$ und damit

$$|f_j(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n_0} \leq \delta \quad \forall j \geq k_{n_0}.$$

□

Korollar 5.14 (Punktweise Konvergenz und schwache Konvergenz)**.** *Sei $p \in (1, \infty)$. Es konvergiere $u_k \to u$ punktweise fast überall in $\mathbb{R}^n$ mit $\|u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)} \leq C$. Dann gilt $u_k \rightharpoonup u$ in $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$.*

Beweis. Wegen der schwachen Kompaktheit in L^p existieren eine Teilfolge und $\tilde{u}$, so dass $u_{k_\ell} \rightharpoonup \tilde{u}$ in $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$. Zu zeigen ist: $u = \tilde{u}$.

Seien $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ beliebig, $B_R = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ so, dass $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_R(0)$. Nach dem Satz von Egoroff existiert ein $B_\varepsilon \subset B_R$ mit $|B_\varepsilon| < \varepsilon$, so das $u_k \to u$ gleichmäßig auf $B_R \setminus B_\varepsilon$. Wähle $f \in (L^p)' = L^q$ als $f = \chi_{B_R \setminus B_\varepsilon}$. Betrachte nun

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u} \cdot f\varphi \leftarrow \int_{\mathbb{R}^n} u_k \cdot f\varphi = \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} u_k \cdot \varphi \to \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} u \cdot \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot f\varphi.$$

Für alle $\delta > 0$ gibt es $\varepsilon > 0$, so dass

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot f\varphi - \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi \right| < \delta$$

und ebenso für $\tilde{u}$. Tatsächlich gilt $\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot f\varphi - \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_\varepsilon} u \cdot \varphi \to 0$ wegen der Konvergenz $\chi_{B_\varepsilon} \to 0$ in $L^q(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$. Also folgt $\int_{\mathbb{R}^n} (u - \tilde{u}) \cdot \varphi = 0$ für alle $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und daher $u = \tilde{u}$.

Es existiert also eine Teilfolge, so dass $u_{k_\ell} \rightharpoonup u$ gilt. Nach dem Lemma ohne Namen (siehe Übung) folgt die Konvergenz der ganzen Folge. $\square$

6. Singuläre Probleme und Young-Maße

6.1. Zwei singuläre gewöhnliche DGL.

Beispiel 1: Sei $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}^1$ und $\Delta = \partial_x^2$. Wir studieren

$$\begin{aligned} -\varepsilon \cdot \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon &= 1 \text{ in } \Omega \\ u^\varepsilon(0) &= 0 \\ \partial_x u^\varepsilon(1) &= 0 \end{aligned}$$

Wir wollen die Lösung für kleine ε charakterisieren.

Mit dem Maximumprinzip lässt sich zeigen, dass $u^\varepsilon \geq 0$ und $u^\varepsilon \leq 1$. Weiterhin ist u^ε monoton wachsend; also ist insbesondere $\partial_x u^\varepsilon \geq 0$.

Für alle $p < \infty$ ist außerdem $\int_0^1 |u^\varepsilon|^p = \|u^\varepsilon\|_{L^p}^p \leq 1$ (gleichmäßige L^p-Schranke). Wegen der Kompaktheit in L^p gilt für eine Teilfolge (nicht umbenannt) und eine Grenzfunktion $u \in L^p((0,1), \mathcal{L}^1)$, dass $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ in $L^p((0,1), \mathcal{L}^1)$.

Wir behaupten, dass $u \equiv 1$.

Beweis der Behauptung: Testen der Gleichung mit

$$\eta_\delta(x) := \begin{cases} \frac{x}{\delta} & \text{falls } x \leq \delta, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ergibt

$$\begin{aligned} 0 \xleftarrow{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot \underbrace{\frac{u^\varepsilon(\delta)}{\delta}}_{\in [0, \frac{1}{\delta}]} &= \varepsilon \cdot \int_0^\delta \partial_x u^\varepsilon \cdot \frac{1}{\delta} = \varepsilon \cdot \int_0^1 \partial_x u^\varepsilon \cdot \partial_x \eta_\delta \\ &= -\varepsilon \cdot \int_0^1 \Delta u^\varepsilon \cdot \eta_\delta = \int_0^1 (1 - u^\varepsilon) \cdot \eta_\delta \to \int_0^1 (1-u) \cdot \eta_\delta. \end{aligned}$$

Die Randterme bei der partiellen Integration fallen jeweils weg, da $\partial_x u^\varepsilon(1) = \eta_\delta(0) = 0$. Für $\delta \to 0$ ergibt sich

$$\int_0^1 \underbrace{(1-u)}_{\geq 0} = 0.$$

Also ist $u \equiv 1$.

Weiterhin kann relativ einfach gezeigt werden, dass $\partial_x u^\varepsilon \stackrel{*}{\rightharpoonup} \delta_0$ in $\mathcal{M}([0,1])$, da

$$1 \geq \int_0^1 \partial_x u^\varepsilon = \int_0^1 |\partial_x u^\varepsilon|.$$

Also ist $\partial_x u^\varepsilon$ in $L^1([0,1],\mathcal{L}^1)$ beschränkt. Der Beweis ist eine Übung.

Beispiel 2: Sei wieder $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}^1$. Diesmal betrachten wir

$$\begin{aligned} -\varepsilon \cdot \Delta u^\varepsilon + \partial_x u^\varepsilon &= 1 \\ u^\varepsilon(0) &= u^\varepsilon(1) = 0 \end{aligned}$$

Wir formulieren das Problem um und substituieren $v^\varepsilon := u^\varepsilon(x) - x$. Die Funktion v^ε löst das System

$$\begin{aligned} -\varepsilon \cdot \Delta v^\varepsilon + \partial_x v^\varepsilon &= 0 \\ v^\varepsilon(0) &= 0 \\ v^\varepsilon(1) &= -1. \end{aligned}$$

Nach dem Maximumprinzip ist $v^\varepsilon \in [-1,0]$ und $\partial_x v^\varepsilon \leq 0$. Insbesondere gilt für eine Teilfolge (nicht umbenannt) und $\overline{v} \in L^p(\Omega,\mathcal{L}^1)$, dass $v^\varepsilon \rightharpoonup \overline{v}$ in L^p für alle $1 < p < \infty$ konvergiert. Wegen $\partial_x v^\varepsilon \leq 0$ und somit $\Delta v^\varepsilon \leq 0$ erwarten wir $v^\varepsilon \rightharpoonup 0$.

<u>Behauptung 1:</u> $\overline{v} = \mathit{const}$ auf $(0,1)$.

Wähle dazu $0 \leq a < b < c \leq 1$ und als Testfunktion: $\eta : [0,1] \to [0,1]$,

$$\eta(x) := \begin{cases} \frac{1}{b-a} \cdot x - \frac{a}{b-a} & \text{für } a < x < b \\ -\frac{1}{c-b} \cdot x + \frac{c}{c-b} & \text{für } b < x < c \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Testen der Gleichung mit η ergibt

$$\varepsilon \cdot \underbrace{\left[\frac{v^\varepsilon(b) - v^\varepsilon(a)}{b-a} - \frac{v^\varepsilon(c) - v^\varepsilon(b)}{c-b} \right]}_{\text{beschränkt für } \varepsilon \to 0} = \varepsilon \cdot \int_0^1 \partial_x v^\varepsilon \cdot \partial_x \eta = -\int_0^1 \partial_x v^\varepsilon \cdot \eta = \int_0^1 v^\varepsilon \cdot \partial_x \eta.$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt also

$$\int_0^1 \overline{v} \cdot \partial_x \eta = 0.$$

Wir folgern, dass $\partial_x \overline{v} = 0$, dass also $\overline{v}$ konstant ist. Dies kann hier auch elementar eingesehen werden:

$$0 = \int_0^1 \overline{v} \cdot \partial_x \eta = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \overline{v} - \frac{1}{c-b} \cdot \int_b^c \overline{v} = \fint_{(a,b)} \overline{v} - \fint_{(b,c)} \overline{v}.$$

Also sind alle Mittelwerte von $\overline{v}$ identisch. Nach Lemma 4.5 ist $\overline{v}(x) = \omega$ für fast alle x, wobei ω den Mittelwert bezeichnet.

<u>Behauptung 2:</u> Es gilt $\overline{v} = 0$ und $v^\varepsilon \rightharpoonup 0$ für jede Folge $\varepsilon \to 0$.

Beweis der Behauptung: Wähle als Testfunktion $\eta(x) := 1 - x$. Dann ist

$$0 = \int_0^1 (-\varepsilon\Delta v^\varepsilon + \partial_x v^\varepsilon) \cdot \eta = \varepsilon \int_0^1 \partial_x v^\varepsilon \cdot \underbrace{\partial_x \eta}_{=-1} + \varepsilon \cdot \partial_x v^\varepsilon(0) \cdot \underbrace{\eta(0)}_{=1} + \int_0^1 \partial_x v^\varepsilon \cdot \eta$$

und somit

$$0 = -\varepsilon \int_0^1 \partial_x v^\varepsilon + \varepsilon \partial_x v^\varepsilon(0) + \int_0^1 \partial_x v^\varepsilon \cdot \eta = \varepsilon + \varepsilon \partial_x v^\varepsilon(0) + \int_0^1 \partial_x v^\varepsilon \cdot \eta.$$

Da die Randwerte von $v^\varepsilon \cdot \eta$ Null sind, folgt für das letzte Integral unter Anwendungen der schwachen Konvergenz $v^\varepsilon \rightharpoonup \overline{v} \equiv \omega$

$$\int_0^1 \partial_x v^\varepsilon \cdot \eta = -\int_0^1 v^\varepsilon \cdot \partial_x \eta = \int_0^1 v^\varepsilon \to \int_0^1 \overline{v} = \omega.$$

Also ist

$$\varepsilon + \varepsilon \underbrace{\partial_x v^\varepsilon(0)}_{\leq 0} + \underbrace{\int_0^1 v^\varepsilon}_{\leq 0} = 0$$

und damit $|\omega| \longleftarrow |\int_0^1 v^\varepsilon| \leq \varepsilon$, also $\omega = 0$.

Behauptung 3: Mit $\mu = -\delta_{\{1\}}$ gilt $\partial_x v^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $\mathcal{M}([0,1])$.

Beweis der Behauptung: Wegen $\partial_x v^\varepsilon \leq 0$ ist

$$\int_0^1 |\partial_x v^\varepsilon| = -\int_0^1 \partial_x v^\varepsilon = v^\varepsilon(0) - v^\varepsilon(1) = 1,$$

das heißt $\partial_x v^\varepsilon$ ist beschränkt in $L^1([0,1], \mathcal{L}^1)$. Damit sind die zugehörigen Maße μ^ε mit $d\mu^\varepsilon = \partial_x v^\varepsilon \, d\mathcal{L}^1$ beschränkt in $\mathcal{M}([0,1])$.

Für eine Teilfolge (nicht umbenannt) und ein $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}([0,1])$ gilt somit $\mu^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{\mu}$ in $\mathcal{M}([0,1])$. Zu zeigen ist $\tilde{\mu} = \mu$. Betrachte dazu eine beliebige Testfunktion $\eta \in C^1([0,1])$. Dann ist

$$\underbrace{-\eta(1)}_{\text{Randterm}} - \underbrace{\int_0^1 v^\varepsilon \cdot \partial_x \eta}_{\overset{v^\varepsilon \rightharpoonup 0}{\to} 0} = \int_0^1 \partial_x v^\varepsilon \cdot \eta = \int_0^1 \eta \, d\mu^\varepsilon \to \int_0^1 \eta \, d\tilde{\mu}.$$

Also gilt $\int_0^1 \eta \, d\tilde{\mu} = -\eta(1)$ und damit $\tilde{\mu} = -\delta_{\{1\}} = \mu$.

6.2. Young-Maße

Wir beginnen mit einem Beispiel für oszillierende Funktionen. Wir definieren eine Funktionenfolge $u_k : \Omega = [0,1] \to \mathbb{R}$ wie folgt: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in (0,1)$. Setze

$$h(y) = \begin{cases} a & \text{für } y \in \mathbb{Z} + [0, \lambda) \\ b & \text{für } y \in \mathbb{Z} + [\lambda, 1) \end{cases}$$

und

$$u_k(x) := h(k\,x). \tag{6.1}$$

Die Folge u_k hat die folgenden Eigenschaften:

1. u_k ist beschränkt in $L^p(\Omega, \mathcal{L}^1)$ für jedes $1 < p < \infty$. Ohne Einschränkung (Wahl einer Teilfolge) gelte $u_k \rightharpoonup u$ in $L^p([0,1])$.
2. Der schwache Limes erfüllt $u(x) = \lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b$ für fast alle $x \in \Omega$. Dies folgt leicht, indem man die Definition der schwachen Konvergenz ausnutzt.

Der schwache Limes beinhaltet also Informationen über den Mittelwert von h bzw. von u_k. Wir haben allerdings keine weiteren Information erhalten, insbesondere können aus der Grenzfunktion die Zahlen a und b nicht rekonstruiert werden. Das Young-Maß wird diese Information enthalten. Das Young-Maß kodiert, welche Werte wie oft angenommen werden.

Für das angegebene Beispiel erhält man mit der Theorie der Young-Maße folgendes Ergebnis: Die Folge u_k erzeugt ein Young-Maß ν_x von der Form

$$\nu_x = \lambda \, \delta_{\{a\}} + (1-\lambda) \, \delta_{\{b\}}.$$

Dieses ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, es gibt die Verteilung der Werte von u_k im Punkt $x \in \Omega$ an.

Um näher an die Definition des Young-Maßes zu kommen, kann man die Situation auch so beschreiben: Wir bestimmen für beliebige $f \in C_0(\mathbb{R})$ den Limes

$$\int_\Omega f(u_k(x)) \, dx \to \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} f(p) \, d\nu_x(p) \, dx.$$

Wir verwenden im Folgenden die Schreibweise $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \mathcal{L}^n)$ und erinnern an die bereits bewiesenen Beziehungen $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$ und $(C_0(\mathbb{R}))' = \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Im Folgenden werden wir auch die Kombination verwenden. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}))' = L^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R})). \tag{6.2}$$

Zur Notation: Ein Element $f \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}))$ ist eine Abbildung $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot) \in C_0(\mathbb{R})$ für fast alle $x \in \Omega$, wobei $\int_\Omega \|f(x,\cdot)\|_\infty \, dx < \infty$ erfüllt ist. Für $\nu \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ ist $\nu(x, \cdot) =: \nu_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ für fast alle $x \in \Omega$ und es gilt $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} \|\nu_x\|_{\mathcal{M}} < \infty$.

Satz 6.1 (Existenz der Young-Maße)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $|\Omega| < \infty$. Eine Folge messbarer Funktionen $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ sei gegeben. Dann existiert eine Teilfolge $k_\ell \to \infty$ und ein $\nu \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R})$ (das von u_k erzeugte Young-Maß) mit folgenden Eigenschaften:*

1. *ν_x ist positives Maß und es gilt*

$$\|\nu_x\|_{\mathcal{M}} = \int_{\mathbb{R}} d\nu_x \le 1$$

für fast alle $x \in \Omega$.

2. *Für alle $f \in C_0(\mathbb{R})$ und beliebiges $p \in (1, \infty)$ gilt: $f(u_{k_l}(.)) \rightharpoonup \overline{f}$ in $L^p(\Omega)$ für $\ell \to \infty$. Die Grenzfunktion ist gegeben durch*

$$\overline{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(p) \, d\nu_x(p).$$

Wir betonen, dass die Folge u_k lediglich messbar sein muss. Insbesondere fordern wir keine Beschränktheit im L^p-Raum. Im Fall der Folge u_k aus (6.1) und $\nu_x = \lambda\, \delta_{\{a\}} + (1-\lambda)\, \delta_{\{b\}}$ erhalten wir

$$f(u_k(x)) \rightharpoonup \int_{\mathbb{R}} f(p)\, d\nu_x(p) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

in $L^p(\mathbb{R})$ für jedes $f \in C_0(\mathbb{R})$ und $1 < p < \infty$.

Beweis. Schritt 1. Wir identifizieren die Funktion u_k mit einem Dirac-Maß ν^k im Raum $L^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R})) = (L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R})))'$, also $\nu_x^k \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ für alle $x \in \Omega$. Die Identifikation geschieht vermöge

$$\nu_x^k := \delta_{\{u_k(x)\}}.$$

Mit dieser Wahl gilt $\|\nu_x^k\|_{\mathcal{M}} = 1$ für alle $x \in \Omega$, also auch $\|\nu^k\|_{L^\infty(\Omega,\mathcal{M}(\mathbb{R}))} = 1$. Der Raum $X := L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}))$ ist separabel (ohne Beweis). Daher sind beschränkte Kugeln in X' schwach-$*$-folgenkompakt. Wir können folgern, dass ν^k eine Teilfolge (nicht umbenannt) und einen Limes ν besitzt, so dass $\nu^k \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ in $L^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}))$. Diese Konvergenz bedeutet, dass für jede Funktion $g \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}))$

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}} g(x,p)\, d\nu_x^k(p)\, dx \to \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} g(x,p)\, d\nu_x(p)\, dx. \tag{6.3}$$

Schritt 2. Wir zeigen, dass das Maß ν die gewünschten Eigenschaften hat. Dabei ist die Nichtnegativität klar und die Unterhalbstetigkeit der Norm liefert $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}} \le 1$ für fast alle $x \in \Omega$. Damit ist 1. bereits überprüft. Für 2. betrachten wir eine beliebige Testfunktion $f \in C_0(\mathbb{R})$. Wir stellen zunächst fest, dass wegen der Beschränktheit von f und der Voraussetzung $|\Omega| < \infty$ die Folge $f(u_k)$ in $L^p(\Omega)$ beschränkt ist. Bis auf eine Teilfolge (nicht umbenannt) gilt also $f(u_k) \rightharpoonup \bar{f}$ in $L^p(\Omega)$ für jedes $1 < p < \infty$. Es bleibt, den Grenzwert $\bar{f}$ zu identifizieren.

Für eine Lokalisierungsfunktion $\varphi = \varphi(x)$ mit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ bilden wir

$$(f \otimes \varphi)(x,p) := f(p) \cdot \varphi(x).$$

Hiermit ist $f \otimes \varphi \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}))$. Daher gilt im Limes $k \to \infty$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \overline{f}(x)\varphi(x)\, dx &\longleftarrow \int_\Omega \underbrace{f(u^k(x))}_{\rightharpoonup \overline{f}} \varphi(x)\, dx = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} f(p)\varphi(x)\, d\nu_x^k(p)\, dx \\ &\overset{(6.3)}{\to} \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} f(p)\varphi(x)\, d\nu_x(p)\, dx = \int_\Omega \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}} f(p)\, d\nu_x(p) \right) dx.\end{aligned}$$

Da φ beliebig war, gilt $\overline{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f\, d\nu_x$ für fast alle x. Der Satz ist bewiesen, da der Grenzwert $\bar{f}$ unabhängig von der Teilfolge identifiziert wurde (Lemma ohne Namen). □

Satz 6.2. *In der Situation von Satz 6.1 gilt*

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_k \left| \left\{ x \in \Omega : |u^k(x)| > M \right\} \right| = 0$$

genau dann, wenn $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}} = 1$ *für fast alle* x *gilt.*

Beweis. Wir machen ein Vorüberlegung. Für eine positive Zahl $M \in \mathbb{R}$ betrachten wir Testfunktionen $f_M \in C_0(\mathbb{R})$ mit Werten in $[0,1]$ und der Eigenschaft

$$f_M(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |p| \leq M \\ 0 & \text{falls } |p| \geq M+1 \end{cases}$$

Dann folgt für $k \to \infty$,

$$\int_\Omega \int_\mathbb{R} f_M(p)\, d\nu_x(p)\, dx \longleftarrow \int_\Omega \int_\mathbb{R} (f_M)(p)\, d\nu_x^k(p)\, dx = \int_\Omega f_M(u^k(x))\, dx.$$

Dabei gilt

$$|\{|u^k| \leq M\}| \leq \int_\Omega f_M(u^k(x))\, dx \leq |\{|u^k| \leq M+1\}|.$$

Wir zeigen nun die Implikation „$\Rightarrow$“. Wir starten mit der Ungleichung

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \left(\int_\mathbb{R} f_M(p)\, d\nu_x^k(p) \right) dx \geq \frac{1}{|\Omega|} \left(|\Omega| - \left| \left\{ x \in \Omega : u^k(x) > M \right\} \right| \right).$$

Wir bilden den Lim inf über k und anschließend den Limes $M \to \infty$. Auf der rechten Seite entsteht nach Voraussetzung die Zahl 1. Wir erhalten also

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_\mathbb{R} f_M(p)\, d\nu_x(p)\, dx = \lim_{M\to\infty} \liminf_k \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_\mathbb{R} f_M(p)\, d\nu_x^k(p)\, dx \geq 1.$$

Mit majorisierter Konvergenz folgt

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_\mathbb{R} f_M(p)\, d\nu_x(p)\, dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_\mathbb{R} d\nu_x(p)\, dx \geq 1$$

und da $\|\nu_x\|_\mathcal{M} \leq 1$ für fast alle $x \in \Omega$, folgt $\|\nu_x\| = 1$ für fast alle $x \in \Omega$.
Wir zeigen nun „$\Leftarrow$“. Wir starten mit der Ungleichung

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \left(\int_\mathbb{R} f_M(p)\, d\nu_x^k(p) \right) dx \leq \frac{1}{|\Omega|} \left(|\Omega| - \left| \left\{ x \in \Omega : u^k(x) > M+1 \right\} \right| \right).$$

Wir bilden den Lim inf über k und anschließend den Limes $M \to \infty$. Genau wie oben folgern wir

$$\lim_{M\to\infty} \liminf_k \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_\mathbb{R} f_M(p)\, d\nu_x^k(p)\, dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_\mathbb{R} d\nu_x(p)\, dx = 1,$$

da nach Voraussetzung $\|\nu_x\|_\mathcal{M} = 1$ für fast alle $x \in \Omega$. Somit gilt

$$\begin{aligned} 1 &\leq \lim_{M\to\infty} \liminf_k \frac{1}{|\Omega|} \left(|\Omega| - \left| \left\{ x \in \Omega : u^k(x) > M+1 \right\} \right| \right) \\ &= 1 - \lim_{M\to\infty} \limsup_k \frac{1}{|\Omega|} \left| \left\{ x \in \Omega : u^k(x) > M+1 \right\} \right| \leq 1 \end{aligned}$$

Das liefert die Behauptung. □

Bemerkung 6.3 (Kriterium zur Anwendung von Satz 6.2)**.** *Die Situation sei wie in Satz 6.1. Falls die Folge u^k in $L^1(\Omega)$ beschränkt ist, $\|u^k\|_{L^1(\Omega)} \leq C$, so gilt $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}} = 1$ für fast alle $x \in \Omega$, denn:*

Setze $G_k := \{x \in \Omega | \ |u^k(x)| > M\}$. Dann gilt

$$M \ |G_k| \leq \int_{G_k} \left|u^k\right| + \int_{\Omega \setminus G_k} \left|u^k\right| = \int_\Omega \left|u^k\right| \leq C\,.$$

Es folgt also $\limsup_k |G_k| \leq \frac{C}{M}$ und $\lim_{M\to\infty} \limsup_k |G_k| = 0$. Satz 6.2 ist anwendbar und liefert $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}} = 1$ für fast alle $x \in \Omega$.

Beispiel 6.4 (Variationsproblem mit Mikroskala (ohne deren Vorgabe))**.** *Wir betrachten das Energiefunktional*

$$I(u) := \int_0^1 |u|^2 + \left(1 - |\partial_x u|^2\right)^2$$

für $u : \Omega = (0,1) \to \mathbb{R}$. Dazu sei u^k eine Minimalfolge, das heißt $I(u^k) \to \inf(I)$.

Analyse des Funktionals. Die Integranden sind nicht-negativ, es gilt also $I \geq 0$. Für die Funktion $u \equiv 0$ gilt $\int_0^1 |u|^2 = 0$ und $\partial_x u \equiv 0$, also $I(u) = 1$.

Wir betrachten eine Funktion, die aus einem Zacken besteht: Für $u(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$ gilt $1 - |\partial_x u|^2 = 0$ und daher ist $I(u) < 1$. Insbesondere ist $u \equiv 0$ kein Minimierer von I.

Wir können eine Funktionenfolge u^m konstruieren, in der u^m viele (nämlich m) Zacken hat, alle mit Steigung ± 1 und kleiner Höhe der Ordnung $O(1/m)$. Diese Folge liefert $I(u^m) \to 0$, es gilt also $\inf(I) = 0$. Da jedoch für jedes u die Positivität $I(u) > 0$ gilt, gibt es keinen Minimierer. Das Infimum ist kein Minimum.

Analyse der Minimalfolge. Wir betrachten nun eine Minimalfolge u^k mit $I(u^k) \to 0$. Diese entspricht nicht zwangsläufig der oben beschriebenen Zackenfolge. Aufgrund des ersten Integranden gilt $u^k \to 0$ in $L^2(\Omega)$, aufgrund des zweiten Integranden ist $\partial_x u^k$ beschränkt in $L^4(\Omega)$. In diesem Raum gilt schwache Konvergenz für eine Teilfolge, also $\partial_x u^k \rightharpoonup 0$ in $L^4(\Omega)$ (der Limes ist bestimmt, denn er muss mit der Ableitung des L^2-Grenzwertes, $\partial_x 0 = 0$, übereinstimmen).

Die Folge der Ableitungen $U_k := \partial_x u^k$ ist damit beschränkt in $L^4(\Omega)$. Also erzeugt U_k ein Young-Maß ν mit $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}} = 1$ für fast alle $x \in \Omega$.

Wir wählen nun als Testfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(p) = (1 - |p|^2)^2$ (eigentlich eine abgeschnittene Version davon, damit $f \in C_0(\mathbb{R})$ erfüllt ist, aber wir wollen diesen technischen Punkt hier nicht vorführen). Nach Satz 6.1 ist

$$0 \xleftarrow{L^1} \left(1 - \left|\partial_x u^k\right|^2\right)^2 = \left(1 - |U_k|^2\right)^2 = f(U_k) \overset{L^p}{\rightharpoonup} \overline{f}$$

für $\overline{f}(x) = \int_\mathbb{R} f(p)\, d\nu_x(p)$. Damit gilt

$$\int_\mathbb{R} f(p)\, d\nu_x(p) = 0$$

für fast alle $x \in \Omega$. Da f nur in den Punkten ± 1 verschwindet, muss ν_x auf $\{+1, -1\}$ konzentriert sein. Das bedeutet

$$\nu_x = \lambda(x) \cdot \delta_{\{+1\}} + \mu(x) \cdot \delta_{\{-1\}}.$$

Wegen $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}} = 1$ ist $\mu(x) = 1 - \lambda(x)$, also

$$\nu_x = \lambda(x) \cdot \delta_{\{+1\}} + (1 - \lambda(x)) \cdot \delta_{\{-1\}}.$$

Wähle als Testfunktion $f(p) = p$ (bzw. wieder eine abgeschnittene Version davon). Dann ist

$$\overline{f} \leftharpoondown f(U_k) = U_k = \partial_x u^k \rightharpoonup 0$$

mit

$$\overline{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(p)\, d\nu_x(p) = \int_{\mathbb{R}} p\, d\nu_x(p) = 1 \cdot \lambda(x) + (-1) \cdot (1 - \lambda(x)) = 2 \cdot \lambda(x) - 1.$$

Damit folgt $\lambda(x) = \frac{1}{2}$ für fast alle $x \in \Omega$.
Insgesamt erhalten wir also: Falls u^k eine Minimalfolge ist, d.h. $I(u^k) \to 0$, dann erzeugt $\partial_x u^k$ das Young-Maß

$$\nu_x = \frac{1}{2} \cdot \delta_{\{+1\}} + \frac{1}{2} \cdot \delta_{\{-1\}}.$$

Egal, welche Minimialfolge vorliegt — sie muss die Eigenschaft haben, dass die Ableitungen auf der Hälfte des Gebietes etwa $+1$ sind, und auf der anderen Hälfte des Gebietes etwa -1.

Nachtrag zur Beschränktheit der Ableitungen in $L^4(\Omega)$: Für k hinreichend groß gilt

$$\begin{aligned} 1 \geq I(u^k) &= \int_0^1 |u^k|^2 + \left(1 - |\partial_x u^k|^2\right)^2 = \int_0^1 |u^k|^2 + 1 + |\partial_x u^k|^4 - 2|\partial_x u^k|^2 \\ &\geq \int_0^1 |\partial_x u^k|^4 - \frac{1}{2}|\partial_x u^k|^4 - 8 = \int_0^1 \frac{1}{2}|\partial_x u^k|^4 - 8 = \frac{1}{2}\|\partial_x u^k\|^4_{L^4(\Omega)} - 8, \end{aligned}$$

wobei wir die ε-Ungleichung $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$ verwendet haben. Somit folgt, dass $\|\partial_x u^k\|_{L^4(\Omega)}$ beschränkt ist.

7. Feine Eigenschaften von Funktionen

7.1. Ableitungen von Maßen und Lebesgue-Punkte

Wir verwenden hier die folgende Abkürzung für das Lebesgue-Maß: $m := \mathcal{L}^n$.

Definition 7.1. *Sei μ ein signiertes Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $m = \mathcal{L}^n$. Die Kugel mit Radius r um $x \in \mathbb{R}^n$ wird mit $B_r(x)$ bezeichnet. Setze*

$$(Q_r\mu)(x) := \frac{\mu(B_r(x))}{m(B_r(x))} =: \fint_{B_r(x)} d\mu = \frac{\int_{B_r(x)} d\mu}{\int_{B_r(x)} dm}$$

und

$$(D\mu)(x) := \lim_{r\to 0}(Q_r\mu)(x),$$

falls der Limes existiert.

Beispiel. *Sei μ das Maß mit $d\mu = f\,dm$ für ein $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, also $\mu(A) := \int_A f\,dm$. Dann gilt*

$$(Q_r\mu)(x) = \frac{\int_{B_r(x)} f}{\int_{B_r(x)} 1} = \fint_{B_r(x)} f \to f(x).$$

für $r \to 0$. Tatsächlich gilt für $y \in B_r(x)$, dass $f(y) = f(x) + \psi(y)$ mit $\sup_{y\in B_r(x)} |\psi(y)| \overset{r\to 0}{\to} 0$. Also folgt

$$\fint_{B_r(x)} f(y)\,dy = \underbrace{\fint_{B_r(x)} f(x)\,dy}_{=f(x)} + \underbrace{\fint_{B_r(x)} \psi(y)\,dy}_{\to 0}.$$

Insbesondere gilt $D\mu(x) = f(x)$.

Unser Ziel: Auch für $d\mu = f\,dm$ mit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $Q_r\mu(x) \overset{r\to 0}{\to} f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Eine Konsequenz ist dann: Sei μ ein signiertes Radon-Maß mit $\mu \ll m$. Nach dem Satz von Radon-Nikodym gilt $d\mu = f\,dm$ für ein $f \in L^1(\mathbb{R}^n, m)$. Die Funktion f heißt Radon-Nikodym-Ableitung, $f =: \frac{d\mu}{dm}$. Sie ist von der Form $f = \lim_{r\to 0} Q_r\mu$.
Zum Erreichen unseres Zieles benötigen wir den Begriff der Maximalfunktion.

Definition 7.2. *Sei μ ein (positives) Borel-Maß. Definiere*

$$M\mu \;:\; \mathbb{R}^n \to [0,\infty], \quad M\mu(x) := \sup_{r>0}(Q_r\mu)(x).$$

*Die Funktion $M\mu$ heißt **Maximalfunktion** zum Maß μ.*

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n, m)$ und $d\mu = f\,dm$ setzen wir $Mf := M\mu$. Falls μ ein signiertes Radon-Maß ist, so definieren wir $M\mu := M|\mu|$.

Bemerkung 7.3. *Eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt unterhalbstetig, falls für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $\liminf_{y\to x} f(y) \geq f(x)$. Das ist äquivalent dazu, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) > \lambda\}$ offen sind. Der Beweis ist eine Übung.*

Proposition 7.4. *Sei μ ein Borel-Maß. Dann ist $M\mu$ unterhalbstetig und insbesondere messbar.*

Beweis. Die Maximalfunktion ist nichtnegativ. Für $\lambda < 0$ gilt somit $\{x \in \mathbb{R}^n : M\mu(x) > \lambda\} = \mathbb{R}^n$, also eine offene Menge. Sei nun $\lambda \geq 0$ und $E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : M\mu(x) > \lambda\}$. Unser Ziel ist, zu zeigen, dass E_λ offen ist.

Sei dazu $x \in E_\lambda$ ein beliebiger Punkt. Es existiert ein Radius $r > 0$, so dass $Q_r\mu(x) = \frac{\mu(B_r(x))}{m(B_r(x))} =: t > \lambda$. Wir wählen $\delta > 0$ so klein, dass $(r+\delta)^n < r^n \cdot \frac{t}{\lambda}$ erfüllt ist.

Wir behaupten, dass $B_\delta(x) \subset E$. Sobald dies gezeigt ist, haben wir die Offenheit von E_λ nachgewiesen. Für einen beliebigen Punkt $y \in B_\delta(x)$ gilt $B_r(x) \subset B_{r+\delta}(y)$. Also folgt:

$$\mu(B_{r+\delta}(y)) \geq \mu(B_r(x)) = t \cdot m(B_r(x)) = t \cdot \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n \cdot m(B_{r+\delta}(x)) > \lambda \cdot m(B_{r+\delta}(y)).$$

Wir schließen, dass $M\mu(y) > \lambda$ gilt, also $y \in E$. $\square$

Beispiel. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (-1,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$Mf(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (-1,0) \\ \frac{1}{2\cdot(x+1)} & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{1}{2\cdot|x|} & \text{für } x \leq -1. \end{cases}$$

Die Funktion Mf ist nur unterhalbstetig.

Lemma 7.5 (Ein Überdeckungssatz)**.** *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ überdeckt mit endlich vielen Kugeln, $W \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r_i}(x_i)$. Dann existiert eine Teilmenge $S \subset \{1, 2, ..., N\}$, so dass für diese Teilmenge S und die vergrößerten Kugeln $\hat{B}_j := B_{3\cdot r_j}(x_j)$ gilt:*

1. *$B_{r_i}(x_i) \cap B_{r_j}(x_j) = \emptyset$ für alle $i \neq j$, $i, j \in S$.*
2. *$W \subset \bigcup_{j\in S} \hat{B}_j$ und insbesondere*

$$m(W) \leq 3^n \cdot \sum_{j\in S} m(B_{r_j}(x_j)).$$

Aussage 2. folgt aus der Streckungseigenschaft des Lebesgue-Maßes. Wir bemerken dazu, dass die vergrößerten Kugeln im Allgemeinen nicht disjunkt sein werden.

Beweis. Wir können annehmen, dass die (endlich vielen) Radien angeordnet sind: $r_1 \geq r_2 \geq ... \geq r_N$. Wir wollen nun die Kugeln mit Überlapp wegwerfen. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} j_1 &:= 1 \\ j_2 &:= \min\{j > j_1 | B_j \cap (B_{j_1}) = \emptyset\} \\ &\vdots \\ j_{k+1} &:= \min\{j > j_k | B_j \cap (B_{j_1} \cup ... \cup B_{j_k}) = \emptyset.\} \end{aligned}$$

Dieses Verfahren bricht ab, da die Anzahl $N < \infty$ endlich ist. Für die Indexmenge $S = \{j_1, j_2, ...\}$ ist Eigenschaft 1 nach Konstruktion erfüllt. Für den Nachweis von Eigenschaft 2 sei $y \in W$ ein beliebiger Punkt. Nach Voraussetzung ist $y \in B_{r_i}(x_i)$ für ein $i \in \{1, \ldots, N\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $i = j_k$ für ein k. In diesem Fall gilt $y \in B_{r_i}(x_i) = B_{r_{j_k}}(x_{j_k}) \subset \hat{B}_{j_k}$.

Fall 2: $i \neq j_k$ für alle k. Dann wurde die Kugel B_i nicht ausgewählt; das bedeutet, dass $B_i \cap (B_{j_1} \cup ... \cup B_{j_k}) \neq \emptyset$ für alle $j_k < i$ gilt. Also gilt $B_i \cap B_{j_{k_0}} \neq \emptyset$ für ein $j_{k_0} < i$. Da der Radius der j_{k_0}-Kugel größer ist, $r_{j_{k_0}} \geq r_i$, umfasst die dreifache j_{k_0}-Kugel die i-Kugel, da für $y \in B_{r_i}(x_i)$

$$\left|y - x_{j_{k_0}}\right| \leq |y - x_i| + |x_i - x_{j_{k_0}}| < r_i + (r_i + r_{j_{k_0}}) \leq 3r_{j_{k_0}},$$

also $y \in \hat{B}_{j_{k_0}}$.

In beiden Fällen gilt $y \in \bigcup_k \hat{B}_{j_k}$ und das Lemma ist bewiesen. □

Satz 7.6 (Abschätzung der Maximalfunktion)**.** *Sei μ ein signiertes Maß, $M\mu$ sei die Maximalfunktion, $\lambda > 0$ ein Parameter. Dann gilt*

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : M\mu(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} 3^n \|\mu\|_{\mathcal{M}}\,.$$

Beweis. Die Menge $E := \{x \in \mathbb{R}^n : M\mu(x) > \lambda\}$ ist offen. Darin sei $K \subset E$ eine beliebige kompakte Teilmenge. Wir wollen $|K|$ abschätzen.

Für alle $x \in K$ ist $M\mu(x) > \lambda$, also existiert ein Radius $r = r(x)$, so dass $|\mu|(B_r(x)) > \lambda \cdot m(B_r(x))$. Die offenen Kugeln $B_r(x)$ mit $x \in K$ überdecken K. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $K \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r_i}(x_i)$, wobei $r_i = r(x_i)$.

Der Überdeckungssatz 7.5 liefert die Existenz einer Indexmenge $S \subset \{1, \ldots, N\}$ mit $B_{r_i}(x_i) \cap B_{r_j}(x_j) = \emptyset$ für $i, j \in S$ mit $i \neq j$ sowie

$$m(K) \leq \sum_{j \in S} m(B_{3 \cdot r_j}(x_j)) = 3^n \cdot \sum_{j \in S} m(B_{r_j}(x_j)) \leq 3^n \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in S} |\mu|(B_{r_j}) \leq 3^n \frac{1}{\lambda} \|\mu\|_{\mathcal{M}},$$

wobei wir in der letzten Ungleichung die Disjunktheit der Kugeln verwendet haben. Wegen der inneren Regulatitätseigenschaft von Radon-Maßen gilt $m(E) = \sup\{m(K) | K \subset E, K \text{ kompakt}\}$ und damit die Behauptung. □

Definition 7.7 (Schwach-L^1). *Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar schreiben wir $f \in$ weak-$L^1(\Omega)$, falls ein $C > 0$ existiert, so dass*

$$m\left(\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}\right) \leq C \cdot \frac{1}{\lambda} \qquad \forall \lambda > 0\,.$$

Bemerkung. *Es gilt:*

1. $f \in L^1(\Omega, m) \Rightarrow f \in$ *weak-*$L^1(\Omega)$. *Sei dazu $0 < \lambda$ beliebig. Dann gilt*

$$m(\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}) = \int_{\{|f|>\lambda\}} 1 \leq \int_{\{|f|>\lambda\}} \frac{|f|}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{\Omega} |f| = \frac{1}{\lambda} \cdot \|f\|_{L^1(\Omega)}\,. \tag{7.1}$$

2. *weak-*L^1 *ist nicht dasselbe wie* L^1. *Betrachte dazu das folgende Beispiel:* *Sei $\Omega = (0, \infty)$ und $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist $f \notin L^1(\Omega)$. Aber für $\lambda > 0$ gilt $m(\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}) = m((0, \frac{1}{\lambda})) = \frac{1}{\lambda}$, also ist $f \in$ weak-$L^1(\Omega)$.*

Nach Satz 7.6 ist für $f \in L^1$ die Maximalfunktion Mf in weak-L^1 (mit der Konstanten $3^n \|f\|_{L^1}$).

Definition 7.8. *Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann heißt $x \in \Omega$ ein* ***schwacher Lebesgue-Punkt****, falls*

$$⨍_{B_r(x)} f(y)\, dy \to f(x) \text{ für } r \to 0.$$

Der Punkt x heißt ***Lebesgue-Punkt****, falls*

$$⨍_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy \to 0 \text{ für } r \to 0.$$

Jeder Lebesgue-Punkt ist ein schwacher Lebesgue-Punkt. Der Beweis ist eine Übung.

Satz 7.9. *Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sind fast alle Punkte Lebesgue-Punkte.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, siehe Bemerkung 7.10 unten. Setze

$$(T_r f)(x) := ⨍_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy \quad \text{und} \quad Tf(x) := \limsup_{r \to 0} (T_r f)(x).$$

Wir werden zeigen, dass $Tf = 0$ fast überall.

Da $C(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt, finden wir zu $\varepsilon > 0$ beliebig ein $g \in C(\mathbb{R}^n)$ so, dass $h := f - g$ die Kleinheit $\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$ erfüllt. Dann ist

$$|T_r f(x)| = \left| ⨍ |g(y) - g(x) + h(y) - h(x)\, dy \right| \leq |(T_r g)(x)| + |(T_r h)(x)|.$$

Für $r \to 0$ gilt wegen der Stetigkeit $T_r g(x) \to 0$. Also ist $|Tf(x)| \leq |Th(x)|$. Weiterhin ist nach Definition von T_r

$$|T_r h(x)| \leq |h(x)| + \left| ⨍_{B_r(x)} h(y)\, dy \right|,$$

also $Th(x) \leq |h(x)| + Mh(x)$.

Sei nun $\lambda > 0$ beliebig. Aufgrund der obigen Ungleichungen gelten die Mengeninklusionen

$$\{|Tf| > \lambda\} \subset \{|Th| > \lambda\} \subset \left\{|h| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{Mh > \frac{\lambda}{2}\right\},$$

also auch

$$\begin{aligned}\Big|\{|Tf| > \lambda\}\Big| &\leq \left|\left\{|h| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{|Mh| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\leq \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\frac{2}{\lambda} + 3^n\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\frac{2}{\lambda} = C\frac{1}{\lambda}\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C\varepsilon}{\lambda}\end{aligned}$$

mit $C = 2(1 + 3^n)$. Dabei haben wir in der zweiten Zeile Ungleichung (7.1) und die Abschätzung der Maximalfunktion aus Satz 7.6 verwendet. Wir können nun $\varepsilon > 0$ in Abhängigkeit von λ klein wählen. Wir schließen, dass für beliebiges $\lambda > 0$ die Menge $\{|Tf| > \lambda\}$ ein verschwindendes Maß haben muss. Also gilt $Tf = 0$ fast überall. $\square$

Bemerkung 7.10. *Ist $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, so ist $f \cdot \mathbf{1}_{B_R(0)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, fast alle Punkte in $B_r(0)$ sind damit Lebesgue-Punkte. Die abzählbare Vereinigung über $R \in \mathbb{N}$ liefert, dass fast alle Punkte Legesgue-Punkte sind.*

Beispiel. *Sei $f = \mathbf{1}_{(0,\infty)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind Lebesgue-Punkte.*

Korollar 7.11. *Sei $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dann erfüllen fast alle $x \in \Omega$*

$$⨍_{B_r(x)} |f - f(x)|^p \overset{r\to 0}{\to} 0.$$

Beweis. Wir behaupten zunächst: Für alle $0 \leq s \leq t$ gilt $|t - s|^p \leq t^p - s^p$. Für $t = s$ ist dies klar. Für $t > s$ gilt

$$\partial_t[|t - s|^p] = p \cdot (t - s)^{p-1} \leq p \cdot t^{p-1} = \partial_t[t^p - s^p].$$

und damit die Behauptung. Setze nun $g := |f|^p$. Dann ist $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Also sind fast alle $x \in \Omega$ Lebesgue-Punkte von g. Für einen Legesgue-Punkt x von g gilt

$$⨍_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|^p \, dy \leq ⨍_{B_r(x)} ||f(y)|^p - |f(x)|^p| \, dy = ⨍_{B_r(x)} |g(y) - g(x)| \, dy \overset{r\to 0}{\to} 0.$$

$\square$

Ist nun $d\mu = f\,dm$ für ein $f \in L^1$, so gilt $D\mu = f$ fast überall (in allen Lebesgue-Punkten).

Man kann sich Folgendes leicht überlegen: Falls $d\mu = f\,dm + d\nu$ mit $f\,dm \ll dm$ und $d\nu \perp dm$ (μ hat einen singulären Anteil), dann gilt trotzdem $D\mu(x) = f(x)$ für m-fast alle x. Ist außerdem ν ein (positives) Maß, so ist $D\mu(x) = \infty$ für ν-fast alle x. Der Beweis ist eine Übung.

7.2. Punktweises Differenzieren von Funktionen

Wir betrachten in diesem Kapitel Sobolevfunktionen $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Dies bedeutet, dass für alle Richtungen $i = 1, ..., n$ die Distributionsableitung $\partial_i f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Genauer, existiert zu jedem $i = 1, ..., n$ ein $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $g = \partial_i f$ im Distributionssinn, d.h. für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$-\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \partial_i \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} g \cdot \varphi.$$

Natürlich sind Sobolevfunktionen nicht zwingend klassisch differenzierbar. Unsere Frage lautet daher: Gilt der Grenzübergang

$$\frac{f(x + h \cdot e_i) - f(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \partial_i f(x),$$

zumindest für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$? Unser Ziel ist der Beweis des Theorems von Rademacher, wonach die obige Aussage für $p = \infty$ gilt. Wir werden sehen, dass sogar $p > n$ ausreicht.

Idee des Beweises: Der Grenzübergang ist möglich in den Lebesgue-Punkten von ∇f.

Ein zentraler Bestandteil wird dabei der Satz von Morrey bzw. die Sobolev-Einbettung sein, wonach

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) \text{ für } p > n,\ \alpha = 1 - \frac{n}{p} > 0.$$

Es existiert also eine stetige Einbettung des linken Raumes in den rechten. Die Zahl $1 - \frac{n}{p}$ wird als Sobolev-Index von $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Sie entspricht der (gebrochenen) Differenzierbarkeitsordnug der Funktionen in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Wir erinnern, dass die $C^{0,\alpha}$-Norm die Summe aus dem Hölder-typischen Term (wie im Satz unten) und der Supremumsnorm ist. Die $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$-Norm ist gegeben durch

$$\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Die folgende Abschätzung ist die zentrale Aussage der Morrey-Einbettung.

Satz (Morrey)**.** *Sei $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $n < p < \infty$. Dann hat f einen stetigen Repräsentanten und es existiert ein $C > 0$ mit*

$$|f(x) - f(y)| \leq C r^\alpha \left(\int_{B_r(x)} |\nabla f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = C r^\alpha \ \|\nabla f\|_{L^p(B_r(x))}$$

für alle $r > 0$ und alle $y \in B_r(x)$. Dabei ist $\nabla f = (\partial_1 f, ..., \partial_n f)$ der distributionelle Gradient.

Wir werden den Satz nur für $n = 1$ beweisen. In einer Dimension lautet dieser wie folgt.

Satz 7.12 (Morrey, 1-dimensional)**.** *Sei $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$. Insbesondere existiere ein $v \in L^p(\Omega)$, so dass*

$$-\int_a^b u \cdot \partial_x \varphi = \int_a^b v \cdot \varphi$$

für alle $\varphi \in C_c^1(\Omega)$.
Dann hat u einen stetigen Repräsentanten und es gilt

$$|u(x) - u(y)| \leq r^{(p-1)/p} \|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))}$$

für alle $r > 0$ und $y \in \Omega$ mit $|x - y| < r$.

Beweis. Wie im n-dimensionalen Fall setzen wir $\alpha = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$.

Schritt 1. Abschätzung für glatte Funktionen. Seien $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ und $r > 0$. Für $x, y \in \Omega = (a, b)$ mit $|x - y| < r$ ist

$$\begin{aligned}
|u(y) - u(x)| &= \left| \int_x^y \partial_x u(t)\, dt \right| && (\text{ ohne Einschränkung sei } y > x) \\
&\leq \left(\int_x^y |\partial_x u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^y 1^q \right)^{\frac{1}{q}} && (\text{Hölderungleichung mit } p \text{ und } q = \frac{p}{p-1}) \\
&\leq \left(\int_{B_r(x)} |\partial_x u|^p \right)^{\frac{1}{p}} r^\alpha,
\end{aligned}$$

also die geforderte Morrey-Abschätzung.

Schritt 2. $u \in W^{1,p}$. Wir verwenden die Faltung mit einer glatten Dirac-Folge, $u_\varepsilon(x) := u * \Phi_\varepsilon$. Für eine geeignete Folge Φ_ε und $\varepsilon \to 0$ gilt

1. $u_\varepsilon \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.
2. Für fast alle $x \in \Omega$ gilt $u_\varepsilon(x) \to u(x)$.

Damit ist u_ε eine Cauchy-Folge in $W^{1,p}(\Omega)$, d.h. $\|u_\varepsilon - u_{\tilde{\varepsilon}}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$ für $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \to 0$. Sei $x_0 \in \Omega$ ein Punkt mit $u_\varepsilon(x_0) \to u(x_0)$ (das ist für fast alle Punkte der Fall). Da u_ε glatt ist, liefert die Abschätzung aus Schritt 1.

$$|(u_\varepsilon - u_{\tilde{\varepsilon}})(y) - \underbrace{(u_\varepsilon - u_{\tilde{\varepsilon}})(x_0)}_{\to 0}| \leq r^\alpha \underbrace{\|u_\varepsilon - u_{\tilde{\varepsilon}}\|_{W^{1,p}(B_r(x_0))}}_{\to 0}$$

für alle $y \in B_r(x_0)$. Damit ist $u_\varepsilon(y)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und für alle $y \in \Omega$ existiert ein $\tilde{u}(y)$, so dass $u_\varepsilon(y) \to \tilde{u}(y)$ für $\varepsilon \to 0$. Da auch $u_\varepsilon \to u$ punktweise fast überall, gilt $\tilde{u} = u$ fast überall.

Nun verwenden wir nochmals die Abschätzung aus Schritt 1. Für $r > 0$ und $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| < r$ gilt

$$|\underbrace{u_\varepsilon(y)}_{\to \tilde{u}(y)} - \underbrace{u_\varepsilon(x)}_{\to \tilde{u}(x)}| \leq r^\alpha \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(B_r(x))},$$

also auch

$$|\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x)| \leq r^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))}.$$

Insbesondere ist $\tilde{u}$ stetig. □

Definition 7.13. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$.*

1. *u ist Lipschitz* $:\Longleftrightarrow u \in C^{0,1}(\Omega) :\Longleftrightarrow$ *Es existiert ein* $C > 0$, *so dass*

$$|u(y) - u(x)| \leq |y - x| \quad \forall x, y \in \Omega.$$

2. $u \in W^{1,\infty}(\Omega) :\Longleftrightarrow u \in L^\infty(\Omega)$ *und es existiert* $v \in L^\infty(\Omega)$ *mit*

$$-\int_\Omega u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega v \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Wir schreiben dann $\nabla u := v$.

Satz 7.14. *Es gilt*

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) = C^{0,1}(\mathbb{R}^n).$$

Genauer gilt: $u \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. *Umgekehrt existiert für jedes* $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *ein Repräsentant* $\tilde{u}$ *(d.h.* $\tilde{u} = u$ *fast überall) mit* $\tilde{u} \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung.

1. *Satz 7.14 gilt auch in der lokalen Form, also* $W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n) = C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
2. *Die Einbettung* $C^{0,1} \hookrightarrow W^{1,\infty}$ *ist erstaunlich, da die Definition von* $C^{0,1}$ *keine Forderung an die Ableitungen stellt. Umgekehrt ist* $W^{1,\infty} \hookrightarrow C^{0,1}$ *formal die Morrey-Einbettung mit* $p = \infty$.

Beweis. Schritt 1. $W^{1,\infty} \hookrightarrow C^{0,1}$.

Sei $u \in W^{1,\infty}$ mit Distributionsgradient $\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Setze

$$u_\varepsilon := u * \Phi_\varepsilon, \qquad \nabla u_\varepsilon = \nabla u * \Phi_\varepsilon,$$

wobei Φ_ε wieder eine glatte Dirac-Folge ist. Die Funktion u_ε ist glatt, daher ist ∇u_ε die klassische Ableitung. Es gilt (Eigenschaft der Glättung), dass $(u_\varepsilon - u) \to 0$ in $W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Wegen der Morrey-Einbettung (wähle $p > n$) ist u_ε eine Cauchy-Folge in $C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$\sup_{x,y\in B} \frac{|u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x)|}{|x - y|^\alpha}$$

ist beschränkt (mit $\alpha = 1 - n/p$) und

$$\sup_{x,y\in B} \frac{|(u_\varepsilon - u_{\tilde{\varepsilon}})(y) - (u_\varepsilon - u_{\tilde{\varepsilon}})(x)|}{|y - x|^\alpha} \to 0 \text{ für } \tilde{\varepsilon}, \varepsilon \to 0$$

für alle Kugeln $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Wir schließen $u_\varepsilon|_B \to u|_B$ in $C^{0,\alpha}(B)$ und $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wobei u ein stetiger Repräsentant der Äquivalenzklasse von u ist.

Für die Glättungen gilt

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\nabla u * \Phi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

und daher

$$|u(y) - u(x)| \xleftarrow[\varepsilon\to 0]{} |u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x)| = \left| \int_0^1 \underbrace{\nabla u_\varepsilon(x + t \cdot (y - x))}_{\leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}} \cdot (y - x)\, dt \right| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot |y - x|.$$

Also ist der Repräsentant von u Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $\|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Schritt 2. $C^{0,1} \hookrightarrow W^{1,\infty}$.

Sei $u \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Betrachte

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \partial_i \varphi &= \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot \frac{\varphi(x + h \cdot e_i) - \varphi(x)}{h}\, dx \\ &= \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{u(x - h \cdot e_i) - u(x)}{h}}_{|\cdot| \le \|u\|_{\mathrm{Lip}}} \cdot \varphi(x)\, dx,\end{aligned}$$

wobei $\|u\|_{\mathrm{Lip}}$ die Lipschitz-Konstante von u bezeichnet. Wir erhalten also

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \partial_i \varphi\right| \le \|u\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Die Abbildung $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \partial_i \varphi$ kann also zu einem stetigen linearen Funktional auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ erweitert werden. Nach Satz 4.12 existiert ein $v_i \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$-\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \partial_i \varphi = \int v_i \cdot \varphi$$

für alle $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Das heißt aber gerade, dass $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i u = v_i$. □

Bemerkung. *Für beschränkte Gebiete gilt der Satz lokal:* $W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega) = C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Für Aussagen bis zum Rand und* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt fordern wir* $\partial\Omega \in C^1$. *Dann gilt wieder* $W^{1,\infty}(\Omega) = C^{0,1}(\Omega)$.

Satz 7.15 ($W^{1,p}$-Funktionen sind differenzierbar)**.** *Sei* $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $p > n$. *Dann gilt für fast alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *und den distributionellen Gradienten* $\xi := \nabla u(x)$

$$|u(y) - u(x) - \xi \cdot (y - x)| = \mathbf{o}(|y - x|)$$

für $y \to x$. *Dies bedeutet, dass* u *in* x *klassisch differenzierbar ist mit Ableitung* $\nabla u(x)$.

Beweis. Die Morrey Einbettung 7.2 liefert einen Repräsentanten $u \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ für $\alpha = 1 - \frac{n}{p} > 0$. Wegen $\nabla u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ können wir die Aussage über Lebesgue-Punkte aus Satz 7.9 verwenden: Für fast alle x gilt

$$⨍_{B_r(x)} |\nabla u - \nabla u(x)|^p \to 0 \text{ für } r \to 0.$$

Sei x so ein Punkt und $\xi = \nabla u(x)$. Setze $v(y) := u(y) - u(x) - \xi \cdot (y - x)$. Zu zeigen ist $|v(y)| = \mathbf{o}(|y - x|)$. Mit der Morrey-Abschätzung können wir rechnen

$$\begin{aligned}|v(y) - v(x)| &\le Cr^\alpha \cdot \left(\int_{B_r(x)} |\nabla v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \tilde{C} r^{1-\frac{n}{p}} \cdot r^{\frac{n}{p}} \left(⨍_{B_r(x)} |\nabla v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \tilde{C} r^1 \left(⨍_{B_r(x)} |\nabla u - \xi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \mathbf{o}(r).\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

Als Korollar erhalten wir sofort den Satz von Rademacher.

Satz 7.16 (Rademacher)**.** *Lipschitzfunktionen sind fast überall differenzierbar.*

Beweis. $C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) = W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. □

Bemerkung. *Wir weisen auf Folgendes hin. Eine Funktion kann schwach differenzierbar und fast überall klassisch differenzierbar sein. Diese beiden Ableitungen müssen allerdings nicht übereinstimmen. Es kann passieren, dass die distributionelle Ableitung ein Maß ist, welches in den nicht klassisch differenzierbaren Punkten konzentriert ist.*

Ein Beispiel ist die charakteristische Funktion eines Intervalles, deren klassische Ableitung fast überall existiert und verschwindet, während die schwache Ableitung zwei Dirac-Maße (unterschiedlichen Vorzeichens) enthält.

8. Hausdorff-Maße

Motivation: Wir wollen niederdimensionale Maße auf $\mathbb{R}^n$ definieren. Für Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ und $s \in [0, n]$ soll grob gesagt gelten:

$$0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \text{ ist eine } s\text{-dimensionale Menge in } \mathbb{R}^n.$$

Für $s \notin \mathbb{N}$ ist dabei zunächst nicht klar, was mit der Dimension gemeint ist. Wir werden sie mit Hilfe des Hausdorff-Maßes definieren. Unser Ziel bei der Konstruktion muss sein: Es gilt die Identität $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$ für $n \in \mathbb{N}$.

8.1. Definition und elementare Eigenschaften

Wir beginnen mit der Definition für ganzzahlige Dimensionen $s \in \mathbb{N}_0$.

Definition 8.1. *Seien $A \subset \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \delta \leq \infty$. Setze*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^s \middle| A \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j,\ \operatorname{diam}(C_j) \leq \delta \right\}$$

und $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) := 0$. Hierbei ist ω_s das Volumen der s-dimensionalen Einheitskugel, also $\omega_s = \mathcal{L}^s(B_1(0))$ für $s > 0$ und $\omega_0 = 1$. Setze weiter

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

*Die Abbildung $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ heißt (äußeres) **s-dimensionales Hausdorff-Maß** auf $\mathbb{R}^n$.*

Wir beginnen mit einigen elementaren Beispielen.

Strecke in $\mathbb{R}^1$. Sei $s = 1$ und $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Dann ist

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \operatorname{diam}(C_j) \middle| A \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j,\ \operatorname{diam}(C_j) \leq \delta \right\}.$$

Wir überdecken A mit N abgeschlossenen Intervallen I_j mit $|I_j| = \delta$. Dies ist mit $N \leq \frac{1}{\delta} + 1$ Intervallen möglich. Es gilt daher

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) \leq \sum_{j=1}^N |I_j| = N \cdot \delta \leq \left(\frac{1}{\delta} + 1 \right) \cdot \delta \overset{\delta \to 0}{\to} 1,$$

also $\mathcal{H}^1(A) \le 1$. Man kann auch zeigen, dass dieser Wert optimal ist; das liefert $\mathcal{H}^1(A) = 1$.

Strecke in $\mathbb{R}^2$. Sei $s = 1$ und $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Strecke im $\mathbb{R}^2$. Überdecke wie zuvor A mit δ-Kugeln (mit Radius $\delta/2$): $A \subset \bigcup_{j=1}^N B_j^\delta(x_j)$. Dann ist $N \le \frac{1}{\delta} + 1$. Damit folgt wieder $\mathcal{H}_\delta^1(A) \le 1 + \delta \to 1$ für $\delta \to 0$ und somit $\mathcal{H}^1(A) \le 1$. Auch hier ist die Überdeckung optimal, weswegen wir insgesamt $\mathcal{H}^1(A) = 1$ erhalten. Wichtig dabei ist: "Die Dimension der Umgebung wird nicht gesehen!"

Halbkreisbogen in $\mathbb{R}^2$. Sei $s = 1$ und $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$. Setze $x_k := e^{i\delta k\pi}$ für $k = 0, 1, ..., N$, wobei $N = \mathbf{O}(\frac{1}{\delta})$. Die Mengen C_k sollen jeweils das Bogenstück zwischen x_k und x_{k+1} überdecken, wähle z.B. das Bogenstück selbst. Mit dieser Wahl gilt

$$\operatorname{diam}(C_k) = |x_{k+1} - x_k| = \underbrace{|e^{i\delta k\pi}|}_{=1} \cdot |e^{i\delta\pi} - 1| \overset{\text{Taylor}}{=} \left| i\delta\pi + \frac{(i\delta\pi)^2}{2} + ... \right| = \pi\delta + \mathbf{o}(\delta)\,.$$

Wir schließen

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{diam}(C_k) = \frac{1}{\delta} \cdot \pi\delta + \mathbf{o}(1) \overset{\delta\to 0}{\to} \pi.$$

Achtung: Der Grenzwert $\delta \to 0$ in der Definition des Hausdorffmaßes ist tatsächlich notwendig. Betrachten wir z.B $\delta = 2$, so gilt $\mathcal{H}_\delta^1(A) = 2 < \pi = \mathcal{H}^1(A)$.

Weitere Beispiele.

1. Sei $\mu_1 = \mathcal{H}^1 \lfloor S^1$, das heißt $\mu_1(A) = \mathcal{H}^1(A \cap S^1)$. Dann ist $\mu_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2) = C_0(\mathbb{R}^2)'$. Wir definieren ein lineares Funktional $L\mu_1 : C_0(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ durch

$$L\mu_1(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi\, d\mu_1 = \int_{S^1} \varphi\, d\mathcal{H}^1 = \int_{S^1} \varphi\, dS.$$

2. Sei $\mu_r = \mathcal{H}^1 \lfloor \partial B_r(0)$. Dann gilt $\mu_r \overset{*}{\rightharpoonup} \mu_1$ für $r \to 1$, da

$$\mu_r(\varphi) = \int_{\partial B_r(0)} \varphi\, d\mathcal{H}^1 \to \int_{\partial B_1(0)} \varphi\, d\mathcal{H}^1 = \mu_1(\varphi)$$

   für alle $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^2)$ gilt.

Eine partielle Differentialgleichung. Wir betrachten ein niederdimensionales Objekt, die eindimensionale Linie $\Gamma := \mathbb{R} \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^2$. Zu einer glatten Gewichtsfunktion $\lambda : \Gamma \to \mathbb{R}$ definieren wir das Maß $\mu = \lambda \cdot \mathcal{H}^1 \lfloor \Gamma$, also

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi\, d\mu = \int_\Gamma \lambda(x)\varphi(x)\, d\mathcal{H}^1(x).$$

Nun wollen wir eine partielle Differentialgleichung lösen, in der die rechte Seite ein Maß ist, nämlich

$$\Delta u = \mu.$$

Diese Gleichung lautet in der distributionellen Form

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = \int_\Gamma \lambda(x)\varphi(x)\,d\mathcal{H}^1(x) \qquad \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Wir wollen nun verstehen, was diese Gleichung in klassischer Schreibweise fordert. Sei dazu $n = (0,1)^\top$ der Normalenvektor von Γ. Wir bezeichnen im Folgenden mit $\mathbb{R}^2_+$ die Halbebene $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 > 0\}$ und mit $\mathbb{R}^2_-$ die Halbebene mit $x_2 < 0$. Außerdem schreiben wir u_+ für die Spur von u auf Γ von oben, d.h von $\mathbb{R}^2_+$ aus, und enrsprechend u_- für die Spur von u von unten. $[u] := u_+ - u_-$ bezeichnet den Sprung von u entlang Γ.

Testfunktionen mit $\operatorname{supp}(\varphi) \cap \Gamma = \emptyset$ liefern direkt $\Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Für allgemeine Testfunktionen φ erhält man

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \lambda\cdot\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} u\Delta\varphi &= \int_{\mathbb{R}^2_+} u\Delta\varphi + \int_{\mathbb{R}^2_-} u\Delta\varphi \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2_+} \nabla u\cdot\nabla\varphi + \int_\Gamma u_+\nabla\varphi\cdot(-n) - \int_{\mathbb{R}^2_-} \nabla u\cdot\nabla\varphi + \int_\Gamma u_-\nabla\varphi\cdot n \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2_+} \nabla u\cdot\nabla\varphi - \int_{\mathbb{R}^2_-} \nabla u\cdot\nabla\varphi - \int_\Gamma [u]\nabla\varphi\cdot n \\
&= \int_{\mathbb{R}^2_+} \Delta u\cdot\varphi - \int_\Gamma \varphi(\nabla u\cdot(-n))_+ + \int_{\mathbb{R}^2_-} \Delta u\cdot\varphi - \int_\Gamma \varphi(\nabla u\cdot n)_- - \int_\Gamma [u]\nabla\varphi\cdot n \\
&= \int_{\mathbb{R}^2\setminus\Gamma} \Delta u\cdot\varphi + \int_\Gamma \varphi[\nabla u\cdot n] - \int_\Gamma [u]\nabla\varphi\cdot n.
\end{aligned}$$

Das erste Integral verschwindet, in den anderen Integralen können φ und $\partial_n\varphi$ unabhängig voneinander variiert werden. Also ist unsere PDE formal äquivalent zu

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2\setminus\Gamma \\ [\nabla u\cdot n] &= \lambda \quad \text{auf } \Gamma \\ [u] &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

Die physikalische Interpretation ist eine singuläre Quelle auf Γ, die einen Sprung in der Flussrate bewirkt.

Gebrochenes Hausdorff-Maß Wir wollen nun Definition 8.1 auf nicht ganzzahlige Dimensionen erweitern. Dazu sei $0 \le s \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \infty$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Wir ersetzen in Definition 8.1 lediglich die Zahl $\omega_s = \mathcal{L}^s(B_1(0))$ durch

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)},$$

wobei $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{s-1}\,dx$ für $0 < s < \infty$ die Gamma-Funktion ist. Insbesondere gilt $\alpha(n) = \omega_n$ für $n \in \mathbb{N}$, so dass wir für ganzzahlige Dimension die alte Definition wiederfinden.

Satz 8.2. *$\mathcal{H}^s$ ist ein Borel-Maß. Genauer gilt: $\mathcal{H}^s$ ist ein äußeres Maß und die Borel-Mengen sind messbar. Es gilt die Regularität, dass zu jedem $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Borel-Menge $B \supset A$ existiert mit $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$.*

Bemerkung. *Zur Erinnerung: Borel-Maße μ auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$ (Eigenschaft (R3)) sind automatisch Radon-Maße (vergleiche Korollar 3.5). Für $0 \le s < n$ ist $\mathcal{H}^s$ jedoch kein Radon-Maß, siehe Beispiel unten.*

Beispiel. *Sei $n = 2$ und $s = 1$. Betrachte $Q := [0,1] \times [0,1]$. Wir behaupten $\mathcal{H}^1(Q) = \infty$. Um den Quader Q mit Quadraten C_j der Seitenlänge δ zu überdecken, benötigt man mindestens die Anzahl $N \ge \left(\frac{1}{\delta}\right)^2$. Für eine solche Überdeckung gilt*

$$\sum_{j=1}^{N} \operatorname{diam}(C_j) = N\sqrt{2}\delta \ge \frac{1}{\delta^2}\sqrt{2}\delta = \frac{\sqrt{2}}{\delta} \overset{\delta\to 0}{\to} \infty\,.$$

Da keine bessere Überdeckung möglich ist, gilt $\mathcal{H}^1(Q) = \infty$. Da die Menge Q kompakt ist, ist für das Maß $\mathcal{H}^1$ Bedingung (R3) nicht erfüllt.

Auch Bedingung (R2) ist nicht erfüllt: Für das Intervall $M = [0,1] \times \{0\}$ ist das Maß jeder offenen Umgebung unendlich, obwohl das Maß von M endlich ist.

Das Maß $\mathcal{H}^1$ misst Längen im Eindimensionalen, daher haben 2-dimensionale Mengen unendliches Volumen. Vergleiche auch Lemma 8.4 unten.

Beweis von Satz 8.2. Schritt 1. $\mathcal{H}^s$ ist ein äußeres Maß.

A1) Es gilt $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ per Definition.
A2) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \subset B$. Dann ist jede Überdeckung $(C_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von B auch eine Überdeckung von A. Daher gilt $\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \mathcal{H}^s_\delta(B)$ für alle $\delta > 0$ und somit auch $\mathcal{H}^s(A) \le \mathcal{H}^s(B)$.
A3) Sei $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ eine Familie von Mengen und $A_k \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j^k$ mit $\operatorname{diam}(C_j^k) \le \delta$ eine beliebige Überdeckung von A_k. Dann überdeckt $\left\{C_j^k\right\}_{j,k=1}^\infty$ die Vereinigung $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Also ist

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \le \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j^k)}{2}\right)^s.$$

Da die Überdeckung der A_k beliebig war, folgt

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \xleftarrow[\delta\to 0]{} \mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_k) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s(A_k).$$

Schritt 2. $\mathcal{H}^s$ ist Borel-Maß. Wir zeigen dies mit dem Caratheodory-Kriterium aus Proposition 1.10.

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A,B) > 0$. Zu zeigen ist, dass dann

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

Die Ungleichung „$\le$“ gilt dabei automatisch, da $\mathcal{H}^s$ ein äußeres Maß und daher monoton ist. Für die umgekehrte Ungleichung „$\ge$“ wähle $0 < \delta < \frac{1}{4}\operatorname{dist}(A,B)$ und eine beliebige Überdeckung $(A \cup B) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ mit $\operatorname{diam}(C_k) \le \delta$.

Setze $\mathcal{A} := \{j \in \mathbb{N} | C_j \cap A \neq \emptyset\}$, $\mathcal{B} := \{j \in \mathbb{N} | C_j \cap B \neq \emptyset\}$. Damit ist $A \subset \bigcup_{j\in\mathcal{A}} C_j$, $B \subset \bigcup_{j\in\mathcal{B}} C_j$, da nach Konstruktion $C_i \cap C_j = \emptyset$ für $i \in \mathcal{A}$ und $j \in \mathcal{B}$. Es folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2}\right)^s \geq \sum_{j\in\mathcal{A}} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2}\right)^s + \sum_{j\in\mathcal{B}} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2}\right)^s \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B).$$

Da die Überdeckung von $A \cup B$ beliebig war, erhalten wir $\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$ für $0 < \delta < \frac{1}{4}\operatorname{dist}(A, B)$. Für $\delta \to 0$ folgt somit $\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$.

Schritt 3. Regularität. Es gilt $\operatorname{diam}\left(\overline{C}\right) = \operatorname{diam}(C)$ für alle $C \in \mathbb{R}^n$. Also ist

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2}\right)^s \middle| A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j,\ \operatorname{diam}(C_j) \leq \delta,\ C_j \text{ abgeschlossen}\right\}.$$

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Dann ist $\mathcal{H}^s_\delta(A) < \infty$ für alle $\delta > 0$. Wähle für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung $A_k \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C^k_j$ mit C^k_j abgeschlossen, $\operatorname{diam}\left(C^k_j\right) \leq \frac{1}{k}$ und

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C^k_j)}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}\,.$$

Setze nun $A_k := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C^k_j$ und $B := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Damit ist B eine Borel-Menge und es gilt

$$\mathcal{H}^s(B) \longleftarrow \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(B) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C^k_j)}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k} \overset{k\to\infty}{\to} \mathcal{H}^s(A),$$

also $\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A)$. Weiterhin ist $A \subset A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $A \subset B$ und wegen der Monotonieeigenschaft auch $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$. □

Satz 8.3 (Elementare Eigenschaften)**.** *Es gilt:*

1. *$\mathcal{H}^0$ ist das Zählmaß, das heißt $\mathcal{H}^s(A)$ = Anzahl der Elemente von A*
2. *$\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ auf $\mathbb{R}$*
3. *$\mathcal{H}^s = 0$ auf $\mathbb{R}^n$ für alle $s > n$.*
4. *$\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ für alle $\lambda > 0$, $A \subset \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Wir zeigen hier nur Eigenschaft 2. Die Überprüfung der übrigen Punkte ist eine Übung.

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. Nach Definition des (äußeren) Lebesgue-Maßes gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(A) &= \inf\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(C_j) \middle| A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j,\ C_j \text{ Intervall}\right\} \\
&\leq \inf\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(C_j) \middle| A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j,\ C_j \text{ Intervall},\ \operatorname{diam}(C_j) \leq \delta\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(C_j) \middle| A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j,\ \operatorname{diam}(C_j) \leq \delta\right\} = \mathcal{H}^1_\delta(A)\,.
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir ausgenutzt, dass jede Menge $C_j \subset \mathbb{R}$ mir endlichem Durchmesser in einem Intervall mit gleichem Durchmesser enthalten ist. Die Limesbildung $\delta \to 0$ liefert dann $\mathcal{L}^1(A) \leq \mathcal{H}^1(A)$.

Andererseits gilt für $I_k := [k \cdot \delta, (k+1) \cdot \delta]$, $k \in \mathbb{Z}$, dass $\operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \leq \delta$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \leq \operatorname{diam}(C_j)$. Daher ist

$$\mathcal{L}^1(A) \geq \inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \,\middle|\, A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j,\ C_j \text{ Intervall} \right\} \geq \mathcal{H}^1_\delta(A) \overset{\delta\to 0}{\to} \mathcal{H}^1(A)\,.$$

Insgesamt folgt $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$ auf $\mathbb{R}$ (nach Einschränkung auf die Lebesgue-messbaren Mengen). $\square$

Die Hausdorff-Dimension

Wir wollen nun beliebigen Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Dimension zuordnen. Dabei werden wir feststellen, dass diese nicht zwangsläufig ganzzahlig sein muss.

Lemma 8.4. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < t < \infty$. Dann gilt*

1. *Falls $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, dann ist $\mathcal{H}^t(A) = 0$*
2. *Falls $\mathcal{H}^t(A) > 0$, dann ist $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.*

Beweis. 1. Sei $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ und $\delta > 0$ beliebig. Wähle eine Überedeckung $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j$ mit $\operatorname{diam}(C_j) \leq \delta$ und

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(A) &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(t) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^t \\
&= \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{s-t} \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^s \cdot (\operatorname{diam}(C_j))^{t-s} \\
&\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{s-t} \underbrace{\delta^{t-s}}_{\overset{t>s}{\to} 0} \cdot \underbrace{(\mathcal{H}^s(A) + 1)}_{\text{beschränkt}} \to 0.
\end{aligned}$$

Aussage 2 folgt direkt aus Aussage 1. $\square$

Definition 8.5. *Für $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt die Zahl*

$$\mathcal{H}_{\dim}(A) := \inf\{0 \leq s < \infty \,|\, \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

die Hausdorff-Dimension der Menge $A \subset \mathbb{R}^n$.

Bemerkung. *Für $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

1. *$\mathcal{H}_{\dim}(A) \leq n$*
2. *Sei $s = \mathcal{H}_{\dim}(A)$ die Hausdorff-Dimension von A. Dann ist $\mathcal{H}^t(A) = 0$ für alle $t > s$ und $\mathcal{H}^t(A) = \infty$ für alle $t < s$. Es gilt $\mathcal{H}^s(A) \in [0, \infty]$, wobei auch die Grenzfälle 0 und ∞ möglich sind.*

8.2. Isodiametrische Ungleichung und $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$

Ziel: Wir wollen zeigen, dass das n-dimensionale Hausdorff-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgue-Maß übereinstimmt, also $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$.

Unser erstes Ziel ist die isodiametrische Ungleichung

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2}\right)^n$$

für alle $A \subset \mathbb{R}^n$. Die Idee hierfür ist, die Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ durch eine zum Ursprung symmetrische Menge A^* zu ersetzen.

Die Steiner–Symmetrisierung

Notation: Sei $a \in \mathbb{R}^n$ mit $|a| = 1$ ein Richtungsvektor. Dieser Vektor definiert eine Ebene senkrecht zu a,

$$E_a := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a\rangle = 0\}.$$

Weiterhin können wir für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ eine Gerade durch x definieren als

$$L_x^a \ := \ \{ta + x \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Die orthogonale Projektion auf die Ebene E_a ist gegeben durch $P_a x := x - \langle x, a\rangle a$.

Definition 8.6. *Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $|a| = 1$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt*

$$S_a(A) := \bigcup_{\substack{b \in E_a \\ A \cap L_b^a \neq \emptyset}} \left\{ta + b \ : \ |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)\right\}$$

die Steiner–Symmetrisierung von A bzgl. der Ebene E_a.

Lemma 8.7 (Eigenschaften der Steiner–Symmetrisierung)**.** *Es gilt*

1. $\operatorname{diam}(S_a(A)) \leq \operatorname{diam}(A)$.
2. *Falls A $\mathcal{L}^n$-messbar ist, dann ist auch $S_a(A)$ $\mathcal{L}^n$-messbar und es gilt $\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \mathcal{L}^n(A)$.*

Beweis. Zu 1. Sei $\operatorname{diam}(A) < \infty$ und ohne Einschränkung A abgeschlossen. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ seien $x, y \in S_a(A)$ zwei Punkte, die den Diameter annähernd realisieren, also $\operatorname{diam}(S_a(A)) \leq |x-y|+\varepsilon$. Wir betrachten zu diesen beiden Punkten auch die Projektionen $\bar{x} = P_a x$ und $\bar{y} = P_a y$. Zusätzlich wollen wir noch den E_a-Abstand des äußersten rechten und linken Punktes auf L_x^a definieren. Wir setzen

$$r_x = \sup\{t \mid ta + \bar{x} \in A\},$$
$$l_x = \inf\{t \mid ta + \bar{x} \in A\}.$$

Analog definieren wir r_y und l_y zum Punkt y. Ohne Einschränkung sei $r_x - l_y \geq r_y - l_x$, ansonsten vertauschen wir x und y. Wir rechnen nun

$$\begin{aligned} r_x - l_y &\geq \frac{1}{2}(r_x - l_y) + \frac{1}{2}(r_y - l_x) = \frac{1}{2}(r_x - l_x) + \frac{1}{2}(r_y - l_y) \\ &\geq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_x^a) + \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_y^a) \\ &\geq |\langle x, a\rangle| + |\langle y, a\rangle| \geq |\langle x, a\rangle - \langle y, a\rangle| = |\langle x - y, a\rangle|, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile $x, y \in S_a(A)$ ausgenutzt haben. Dann folgt

$$\begin{aligned}(\mathrm{diam}(S_a(A)) - \varepsilon)^2 &\leq |x-y|^2 = |\bar{x}-\bar{y}|^2 + |\langle x-y, a\rangle|^2 \leq |\bar{x}-\bar{y}|^2 + (r_x - l_y)^2 \\ &= |(\bar{x}+r_x a) - (\bar{y}+l_y a)|^2 \leq (\mathrm{diam}(A))^2.\end{aligned}$$

Da ε beliebig war, ist die Behauptung damit gezeigt.

Zu 2. Diese Eigenschaft ist im Wesentlichen eine Konsequenz aus dem Satz von Fubini.

Sei ohne Einschränkung $a = e_n = (0, ..., 0, 1)$ (denn $\mathcal{L}^n$ ist invariant unter Rotation). Dann ist die zugehörige Ebene $E_a = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Wir werden im Folgenden verwenden, dass $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$ auf $\mathbb{R}$ gilt.

Wir definieren zunächst $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ als die Höhenfunktion zu $S_a(A)$, also $f(b) := \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)$. Dann ist f nach dem Satz von Fubini $\mathcal{L}^{n-1}$-messbar und es gilt, mit $A_x := \{y \in \mathbb{R} | (x, y) \in A\}$,

$$\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{L}^1(A_x)\, d\mathcal{L}^{n-1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{H}^1(A_x)\, d\mathcal{L}^{n-1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 2f(x)\, d\mathcal{L}^{n-1}(x).$$

Weiterhin ist

$$S_a(A) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} | -f(x) \leq y \leq f(x)\big\} \setminus \{(x, 0) | L_x^a \cap A = \emptyset\}.$$

Es gilt daher

$$\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 2f(x)\, d\mathcal{L}^{n-1}(x),$$

insgesamt also die Behauptung $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(S_a(A))$. □

Satz 8.8 (Isodiametrische Ungleichung)**.** *Für alle Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n) \left(\frac{\mathrm{diam}(A)}{2}\right)^n. \tag{8.1}$$

Bemerkung. *Der Beweis kann nicht elementar geometrisch geführt werden: Eine Menge A ist nicht notwendigerweise in einer Kugel mit Durchmesser* $\mathrm{diam}(A)$ *enthalten. Ein gleichseitiges Dreieck liefert ein Gegenbeispiel.*

Beweis. Sei $\mathrm{diam}(A) < \infty$ und $\{e_1, ..., e_n\}$ die Standard-Basis von $\mathbb{R}^n$. Setze $A_1 := S_{e_1}(A)$, $A_2 := S_{e_2}(A_1)$ und so weiter bis zu $A^* := A_n := S_{e_n}(A_{n-1})$.

Schritt 1. A^* ist symmetrisch zum Ursprung. Wir führen einen induktiven Beweis und zeigen, dass A_k symmetrisch bzgl. $E_{e_1}, ..., E_{e_k}$ für alle $k = 1, \dots, n$ ist.

Die Menge A_1 ist nach Konstruktion symmetrisch bezüglich E_{e_1}. Sei nun $1 \leq k < n$ und A_k symmetrisch bzgl. $E_{e_1}, ..., E_{e_k}$. Dann ist $A_{k+1} = S_{e_{k+1}}(A_k)$ symmetrisch bezüglich $E_{e_{k+1}}$. Wir müssen nur noch einsehen, dass die vorher erzielten Symmetrien nicht zerstört werden.

Dazu sei $1 \leq j \leq k$ fest gewählt. Wir definieren $S_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ als die Spiegelung an der Ebene E_{e_j}. Ein Punkt $b \in E_{e_{k+1}}$ sei beliebig gewählt. Da $S_j(A_k) = A_k$ ist, folgt

$$\mathcal{H}^1\left(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}\right) = \mathcal{H}^1\left(A_k \cap L_{S_j(b)}^{e_{k+1}}\right).$$

Also ist $\{t \in \mathbb{R} : b + te_{k+1} \in A_{k+1}\} = \{t \in \mathbb{R} : S_j(b) + te_{k+1} \in A_{k+1}\}$ und damit $S_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$. Da dies für alle $1 \leq j \leq k$ gilt, folgt, dass $A^* = A_n$ bzgl. $E_{e_1}, ..., E_{e_n}$ symmetrisch ist.

Die Hintereinanderausführung aller Spiegelsymmetrien entspricht der Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs, also $x \in A^* \Leftrightarrow -x \in A^*$.

Schritt 2. $\mathcal{L}^n(A^*) \leq \alpha(n)\,(\mathrm{diam}(A^*)/2)^n$.

Für jeden Punkt $x \in A^*$ ist auch $-x \in A^*$ nach Schritt 1. Daher gilt $\mathrm{diam}(A^*) \geq 2 \cdot |x|$ für jedes $x \in A^*$. Wir schließen, dass $A^* \subset B_r(0)$ mit $r := \frac{\mathrm{diam}(A^*)}{2}$. Es gilt also $\mathcal{L}^n(A^*) \leq \mathcal{L}^n(B_r(0))$.

Schritt 3. $\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n)\,(\mathrm{diam}(A)/2)^n$.

Der Abschluss $\overline{A}$ ist $\mathcal{L}^n$-messbar. Wir können daher Lemma 8.7 auf $\bar{A}$ anwenden und erhalten

$$\mathcal{L}^n\left(\left(\overline{A}\right)^*\right) = \mathcal{L}^n\left(S_{e_n}\left(\left(\overline{A}\right)_{n-1}\right)\right) = \mathcal{L}^n\left(\left(\overline{A}\right)_{n-1}\right) = ... = \mathcal{L}^n(S_{e_1}\left(\overline{A}\right) = \mathcal{L}^n\left(\overline{A}\right).$$

Weiterhin ist $\mathrm{diam}\left(\overline{A}^*\right) \leq \mathrm{diam}\left(\overline{A}\right)$. Also gilt auch

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(A) &\leq \mathcal{L}^n\left(\overline{A}\right) = \mathcal{L}^n\left(\left(\overline{A}\right)^*\right) \overset{\text{Schritt 2}}{\leq} \alpha(n)\left(\frac{\mathrm{diam}\left(\overline{A}^*\right)}{2}\right)^n \\
&\leq \alpha(n)\left(\frac{\mathrm{diam}\left(\overline{A}\right)}{2}\right)^n = \alpha(n)\left(\frac{\mathrm{diam}(A)}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

□

Satz 8.9. *Es gilt* $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ *auf* $\mathbb{R}^n$. *Genauer gilt die Gleichheit der äußere Maße* $\mathcal{H}^n$ *und* $\mathcal{L}^n$ *auf* $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Schritt 1. $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n(A)$ *für alle* $A \subset \mathbb{R}^n$.

Sei $\delta > 0$. Wähle eine Überdeckung $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j$ mit $\mathrm{diam}(C_j) \leq \delta$. Nach Satz 8.8 ist

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(C_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(n)\left(\frac{\mathrm{diam}(C_j)}{2}\right)^n.$$

Infimumsbildung ergibt

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n_\delta(A)$$

und der Limes $\delta \to 0$ liefert die Behauptung.

Schritt 2. $\mathcal{H}^n$ *ist absolut stetig bezüglich* $\mathcal{L}^n$. $\mathcal{H}^n$ *lässt sich durch* $\mathcal{L}^n$ *abschätzen.*

Setze $C_n := \alpha(n)\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n$. Dann gilt für Würfel $Q \subset \mathbb{R}^n$

$$\alpha(n)\left(\frac{\mathrm{diam}(Q)}{2}\right)^n = C_n\mathcal{L}^n(Q).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\delta(A) &\le \inf\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(n)\left(\frac{\operatorname{diam}(Q_j)}{2}\right)^n \,\middle|\, Q_j \textit{ Würfel, } A\subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j,\ \operatorname{diam}(Q_j)\le\delta\right\}\\
&= \inf\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} C_n\mathcal{L}^n(Q_j) \,\middle|\, Q_j \textit{ Würfel, } A\subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j,\ \operatorname{diam}(Q_j)\le\delta\right\}\\
&= C_n\mathcal{L}^n(A) \qquad \text{(nach Definition des äußeren Lebesgue-Maßes).}
\end{aligned}$$

Für $\delta\to 0$ folgt die Abschätzung auch für $\mathcal{H}^n$ und damit insbesondere auch die Absolutstetigkeit.

Schritt 3. $\mathcal{H}^n(A)\le\mathcal{L}^n(A)$ *für alle* $A\subset\mathbb{R}^n$.

Seien $\delta>0$ und $\varepsilon_L>0$ kleine Parameter. Nach Konstruktion des Lebesgue-Maßes können wir A mit Würfeln wie folgt überdecken: $A\subset\bigcup_j Q_j$ mit $\operatorname{diam}(Q_j)<\delta$ und $\sum_j \mathcal{L}^n(Q_j)\le \mathcal{L}^n(A)+\varepsilon_L$. Wir verwenden folgendes Lemma:

Lemma 8.10. *Für alle* $i\in\mathbb{N}$ *existiert eine Familie von abgeschlossenen Kugeln* $\{B^i_k\}_{k=1}^\infty\subset Q_i$ *mit* B^i_k *paarweise disjunkt,* $\operatorname{diam}(B^i_k)\le\delta$ *und*

$$\mathcal{L}^n\left(Q_i\setminus\bigcup_{k=1}^\infty B^i_k\right)=0.$$

Das Lemma ist eine Folgerung aus dem Vitali-Überdeckungssatz und wird hier nicht bewiesen. Wir verwenden das Lemma im Beweis von Satzes 8.9 wie folgt: Nach Schritt 2 ist auch $\mathcal{H}^n_\delta\left(Q_i\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B^i_k\right)=0$. Es gilt daher

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\delta(A) &\le \sum_{j\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^n_\delta(Q_j)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^n_\delta\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B^j_k\right)\\
&\le \sum_{j,k=1}^\infty \mathcal{H}^n_\delta(B^j_k)\le\sum_{j,k=1}^\infty\alpha(n)\left(\frac{\operatorname{diam}(B^j_k)}{2}\right)^n\\
&= \sum_{j,k=1}^\infty\mathcal{L}^n(B^j_k)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B^j_k\right)\\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}}\mathcal{L}^n(Q_j)\le\mathcal{L}^n(A)+\varepsilon_L.
\end{aligned}$$

Wir haben dabei nacheinander verwendet: Subadditivität von $\mathcal{H}^n_\delta$, obiges Lemma 8.10, wieder die Subadditivität von $\mathcal{H}^n_\delta$, die Definition des δ-Hausdorff-Maßes (die Kugeln liefern eine Überdeckung), das Lebesgue-Maß von Kugeln, Disjunktheit der Kugeln, wieder Lemma 8.10 und schließlich die Wahl der Quader.

Da $\varepsilon_L>0$ beliebig war, folgt für $\delta\to 0$ die Behauptung des Satzes. □

Wir schließen dieses Kapitel mit dem Beispiel einer Menge, deren Hausdorff-Dimension nicht ganzzahlig ist.

Beispiel 8.11 (Dimension der Cantor-Menge)**.** *Sei* $C \subset [0,1]$ *die Cantor-Menge. Die Menge* C *ist selbstähnlich, es gilt* $C = \frac{1}{3}C \cup [\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C]$.
Für $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ *gilt*

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s\left(\frac{1}{3}C \cup \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C\right]\right) = 2\mathcal{H}^s\left(\frac{1}{3}C\right) \overset{8.3}{=} 2\left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C).$$

Also folgt $2(\frac{1}{3})^s = 1$ *oder* $\mathcal{H}^s(C) \in \{0, \infty\}$. *Im ersten Fall erhalten wir*

$$s\ln(\frac{1}{3}) = \ln(\frac{1}{2}) \Longleftrightarrow s = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \in (0,1).$$

Tatsachlich kann man zeigen, dass $\mathcal{H}_{\dim}(C) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

9. Der Raum BV

Die uns vertrauten Funktionenräume sind

- $C^{k,\alpha}$ (Hölder-stetige Funktionen)
- $W^{k,p}$ (Lebesgue-integrierbare Funktionen)

Die L^p-Räume sind für $p \in (1,\infty)$ separabel und reflexiv und gut geeignet in vielen Anwendungen. Für die Grenzfälle $p = 1$ und $p = \infty$ gehen jedoch wichtige Eigenschaften verloren: L^∞ ist weder separabel noch reflexiv, L^1 ist nicht reflexiv. Es gilt zwar $(L^1)' = L^\infty$, aber $(L^\infty)' \neq L^1$.

In manchen Situationen erhält man nur die Kontrolle der L^1-Norm einen Funktionenfolge. In diesen Fäll bettet man den Raum L^1 in den Raum $\mathcal{M}$, also den Raum der signierten Radon-Maße ein und nutzt die Dualität $\mathcal{M} = (C_0)'$.

In diesem Kapitel wollen wir analog den Raum $W^{1,1}$ in den (noch zu definierenden) Raum BV einbetten. Dabei steht BV für **beschränkte Variation**.

Bemerkung 9.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R}^m) &:= \mathcal{M}(\Omega)^m \overset{(1)}{=} C_0(\Omega,\mathbb{R}^m)' \\ &\overset{(2)}{=} \{(\mu_1,...,\mu_m) \in \mathcal{M}(\Omega)^m : \exists \nu \in \mathcal{M}(\Omega) \text{ positiv und } \sigma \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m,\nu) \text{ mit } d\mu_i = \sigma_i \, d\nu\}.\end{aligned}$$

Beweis. (1) Für $\varphi \in C_0(\Omega,\mathbb{R}^m)$ und $\mu = (\mu_1,...,\mu_m) \in \mathcal{M}(\Omega)^m$ setze

$$\langle \mu, \varphi\rangle = \langle (\mu_1,...,\mu_m), \varphi\rangle := \sum_{j=1}^m \int_\Omega \varphi_j \, d\mu_j.$$

Dann ist dadurch ein stetiges lineares Funktional auf $C_0(\Omega,\mathbb{R}^m)$ definiert. Sei andersrum $L \in C_0(\Omega,\mathbb{R}^m)'$ und $\psi \in C_0(\Omega,\mathbb{R})$. Definiere für $j = 1,\dots,m$ die Funktionale $L_j(\psi) := L(\psi e_j)$. Dann ist jedes $L_j \in (C_0(\Omega))'$. Es existiert also ein zugehöriges Radonmaß $\mu_j \in \mathcal{M}(\Omega)$, welches mit L_j identifieziert werden kann und für $\varphi \in C_0(\Omega,\mathbb{R}^m)$ gilt

$$L(\varphi) = \sum_{j=1}^m L(\varphi_j e_j) = \sum_{j=1}^m L_j(\varphi_j) = \sum_{j=1}^m \int_\Omega \varphi_j \, d\mu_j = \langle (\mu_1,...,\mu_m), \varphi\rangle.$$

(2) Die Inklusion „$\supset$“ ist klar. Zur Inklusion „$\subset$“: Sei $(\mu_1,...,\mu_m) \in \mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R}^m)$. Setze $\nu := \sum_{j=1}^m |\mu_j|$. Dann ist $\mu_j \ll \nu$. Nach dem Satz von Radon-Nikodym existiert ein $\sigma_j \in L^1(\Omega,\mu)$ mit $d\mu_j = \sigma_j \, d\nu$. Es bleibt zeigen, dass $\sigma_j \in L^\infty(\Omega,\nu)$.

Sei dazu $E \subset \Omega$ eine Testmenge mit $\nu(E) > 0$. Dann ist

$$\frac{1}{\nu(E)} \int_E \sigma_j \, d\nu = \frac{1}{\nu(E)} \int_E d\mu_j = \frac{\mu_j(E)}{\nu(E)} \in [-1,1]$$

wegen $\nu(E) \geq |\mu_j|(E) \geq \mu_j(E)$. Da E beliebig war nimmt nach Lemma 4.5 die Funktion σ_j nur Werte in $[-1,1]$ an und ist insbesondere in $L^\infty(\Omega,\nu)$. $\square$

9.1. Definitionen und BV im Eindimensionalen

Definition 9.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren den Banachraum der Funktionen mit* ***beschränkter Variation*** *durch*

$$\mathrm{BV}(\Omega) := \left\{ u \in L^1(\Omega) \,|\, \nabla u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^n) \right\},$$

wobei mit ∇u der distributionelle Gradient gemeint ist. Genauer fordert man:
Es existiert ein $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so dass

$$-\int_\Omega u(x)\, div(\varphi)(x)\, dx = \langle (\mu_1, ..., \mu_n), \varphi \rangle \quad \textit{für alle } \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Wir schreiben dann $\nabla u = \mu$. Der Raum BV ist mit der folgenden Norm ausgestattet:

$$\|u\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Bemerkung. *Die Menge* $\mathrm{BV}(\Omega)$ *ist tatsächlich ein Banachraum. Zur Vollständigkeit bemerken wir, dass für eine Cauchy-Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in* $\mathrm{BV}(\Omega)$ *die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^1(\Omega)$ und die Folge $(\nabla u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Raum der Maße $\mathcal{M}(\Omega)$ ist. Entsprechend sind diese beiden Folgen konvergent. Für die Limiten u und μ erhält man $\nabla u = \mu$ im Distribitionssinn, da für $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ beliebig*

$$-\int_\Omega u_k(x)\, div(\varphi)(x)\, dx \leftarrow -\int_\Omega u_k(x)\, div(\varphi)(x)\, dx = \langle \nabla u_k, \varphi \rangle \to \langle \mu, \varphi \rangle.$$

Lemma 9.3. *Eine äquivalente Beschreibung des Raumes* BV *kann mit der Variation*

$$V_\Omega(u) := \sup \left\{ \int_\Omega u\, div(\varphi) \,\middle|\, \varphi \in C_c^1(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}$$

angegeben werden. Es gilt

$$\mathrm{BV}(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \,|\, V_\Omega(u) < \infty \right\}.$$

und

$$\|\nabla u\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = V_\Omega(u).$$

Beweis. „$\subset$“ Sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ und $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ eine Testfunktion mit $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Dann gilt für $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\left| \int_\Omega u\, div(\varphi) \right| = |\langle \nabla u, \varphi \rangle| = \left| \sum_{j=1}^n \int_\Omega \varphi_j\, d(\partial_{x_j} u) \right| \leq \|\nabla u\|_{\mathcal{M}} \|\varphi\|_\infty \leq \|\nabla u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$$

und somit $V_\Omega(u) \le \|\nabla u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$.

„$\supset$“ Sei $u \in L^1(\Omega)$ eine Funktion mit

$$V_\Omega(u) = \sup\left\{ \int_\Omega u\, div(\varphi) \,\middle|\, \varphi \in C_c^1(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\} < \infty\,. \tag{9.1}$$

Dann gilt für $\varphi \in C_c^1(\Omega)$

$$L(\varphi) := -\int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi) \le V_\Omega(u)\|\varphi\|_\infty$$

Diese Abschätzung impliziert, dass L zu einem stetigen linearen Funktional $L : C_0(\Omega,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ mit $\|L\|_{\mathcal{L}(C_0,\mathbb{R})} \le V_\Omega(u)$ fortgesetzt werden kann. Also gilt $L \in C_0(\Omega,\mathbb{R}^n)'$ und damit $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$.

Insbesondere erhalten wir die Gleichheit $\|\nabla u\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = V_\Omega(u)$. □

Bemerkung 9.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen*

$$\begin{aligned}\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \big\{ u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \,|\, \forall K \subset \Omega \textit{ kompakt gilt: }& \\ \sup\left\{ \int_\Omega u\, div(\varphi) \,\middle|\, \varphi \in C_c^1(K),\ \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\} < \infty \big\}& \\ = \{ u \,|\, u\eta \in \mathrm{BV}(\Omega)\ \forall \eta \in C_c^\infty(\Omega) \}.&\end{aligned}$$

Beispiel 9.5. *Es gilt $W^{1,1}(\Omega) \subset \mathrm{BV}(\Omega)$. Für alle $p \in [1,\infty]$ gilt $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Beweis. Für $u \in W^{1,1}(\Omega)$ gilt $\partial_{x_i} u \in L^1(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$, also $u \in BV(\Omega)$. Falls alle Ableitungen von der Klasse $\partial_i u \in L^p(K)$ sind für alle kompakten Teilmengen $K \subset \Omega$, dann gilt $\partial_i u \in L^1(K) \subset \mathcal{M}(K)$, also $u \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. □

Mit Hilfe von BV-Funktionen können wir nun ein geometrisches Objekt einführen: den Umfang oder Perimeter einer Menge E.

Definition 9.6. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$. Wir sagen, dass E einen **endlichen Perimeter** besitzt, falls die Funktion $\chi_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für } x \in E \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

eine $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$-Funktion ist. Ähnlich definiert man: E hat einen lokal-endlichen Perimeter, falls $\chi_E \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Beispiel 9.7. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge mit Lipschitz-Rand und $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x)\, div(\varphi)(x)\, dx = -\int_E div(\varphi)(x)\, dx \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_{\partial E} n \cdot \varphi\, d\mathcal{H}^{n-1} = \langle -n\, \mathcal{H}^{n-1} \lfloor \partial E, \varphi \rangle$$

mit dem äußeren Normalenvektor n auf ∂E. Diese Rechnung liefert, dass der distributionelle Gradient von χ_E ein Maß ist, nämlich

$$\nabla \chi_E = -n \cdot \mathcal{H}^{n-1} \lfloor \partial E\,.$$

Für Mengen E mit endlichem Perimeter gilt $\nabla \chi_E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Wir bemerken, dass das Maß $\nabla \chi_E$ sowohl Rand als auch Normalenvektor kodiert.

Der Raum BV im Eindimensionalen

Im Folgenden sei stets $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ ein Intervall. Wir betrachten Funktionen $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$, also insbesondere $\mu := \partial_x u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$.

Beispiel 9.8. *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Setze*

$$u(x) := ax + bH_c(x) \quad \text{mit} \quad H_c(y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y \geq c \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\partial_x u = a + b\delta_c$. Genauer: Die distributionelle Ableitung $\partial_x u$ entspricht dem Maß $\mu = a\,\mathcal{L}^1 + b\,\delta_c = a\,\mathcal{L}^1 + b\,\mathcal{H}^0\lfloor\{c\}$.

Die Funktion im obigen Beispiel ist eine typische BV-Funktion. Sie ist stückweise glatt, zusätzlich treten Sprünge auf. Dass allerdings die Ableitung auch andere Anteile enthalten kann, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 9.9 (Cantor-Teil der Ableitung)**.** *Sei $C \subset [0,1]$ die Cantor-Menge, $C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k$ in der natürlichen Konstruktion. In jedem Konstruktionsschritt können wir das Cantor-Maß der k-ten Stufe betrachten,*

$$\mu_k = \frac{\chi_{E_k}}{|E_k|}\,\mathcal{L}^1 = \frac{1}{|E_k|}\mathcal{L}^1\lfloor E_k$$

mit $|\mu_k|([0,1]) = 1$. Wegen der Kompaktheit von $\mathcal{M}([0,1])$ in der schwach- Topologie finden wir ein Grenzmaß $\mu \in \mathcal{M}([0,1])$, so dass $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ bis auf eine Teilfoge. Dieses Grenzmaß heißt das Cantor-Maß. Es ist konzentriert auf C, insbesondere also $\mu \perp \mathcal{L}^1$. Außerdem gilt $\mu([0,1]) = 1$.*

Da C überabzählbar ist, lässt sich μ nicht dals abzählbare Summe von Dirac-Maßen schreiben.

Cantor-Funktion: *Sei $F : [0,1] \to [0,1]$ der gleichmäßige Limes der Verteilungsfunktionen $F_k(x) = \mu_k([0,x])$. Für die Distributionsableitung der F_k gilt $\partial_x F_k = \mu_k$ und entsprechend $\partial_x F = \mu \in \mathcal{M}([0,1])$. Insbesondere ist $F \in \mathrm{BV}((0,1))$. Die Ableitung lässt sich aber nicht als Kombination von glatten Anteilen mit Sprüngen schreiben.*

Ausblick: Mit SBV bezeichnet man den Raum "special BV", den Raum der Funktionen in BV ohne Cantor-Teil in der Ableitung.

Lemma 9.10 (Extraktion des Sprung-Anteils)**.** *Sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. Dann gibt es eine Funktion $s : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass für alle $z \in \Omega$ gilt*

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_z^{z+\varepsilon} u\,d\mathcal{L}^1 - \frac{1}{\varepsilon}\int_{z-\varepsilon}^{z} u\,d\mathcal{L}^1 \to s(z) \text{ für } \varepsilon \to 0$$

und

$$\sum_{z\in\Omega} |s(z)| < \infty.$$

Insbesondere ist $s(z) = 0$ bis auf abzählbar viele Stellen.

Beweis. Betrachte die Hütchenfunktion

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 - \frac{z-x}{\varepsilon} & \text{für } x \in (z-\varepsilon, z] \\ 1 - \frac{x-z}{\varepsilon} & \text{für } x \in (z, z+\varepsilon) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für diese gilt $\partial_x \eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\chi_{(z-\varepsilon,z)} - \frac{1}{\varepsilon}\chi_{(z,z+\varepsilon)}$. Damit folgt für $\mu := \delta_x u \in \mathcal{M}(\Omega)$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_z^{z+\varepsilon} u\, d\mathcal{L}^1 - \frac{1}{\varepsilon}\int_{z-\varepsilon}^{z} u\, d\mathcal{L}^1 = -\int_\Omega u\, \partial_x \eta_\varepsilon\, d\mathcal{L}^1 = \langle \partial_x u, \eta_\varepsilon \rangle \overset{\varepsilon \to 0}{\to} \mu(\{z\}) =: s(z).$$

Bei dem Grenzübergang haben wir die punktweise Konvergenz $\eta_\varepsilon \to \chi_{\{z\}}$ und den Satz von der majorisierten Konvergenz ausgenutzt. Für alle Punktmengen $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abzählbar und disjunkt gilt außerdem

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |s(z_k)| = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\mu(\{z_k\})| = |\mu| \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{z_k\} \right) \leq |\mu|(\Omega) < \infty,$$

da μ ein beschränktes Radon-Maß ist. $\square$

Bemerkung. *Für ein Maß $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ gilt $\|\mu\|_{\mathcal{M}} < \infty$ und daher ist*

$$\mathcal{A} := \{x \in \Omega : \mu(\{x\}) \neq 0\}$$

*abzählbar. Es gibt nur endlich viele x mit $|\mu(x)| > 1$, endlich viele x mit $|\mu(x)| > \frac{1}{2}$, usw. Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen die **Atome** von μ.*

Satz 9.11. *Sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. Dann gibt es Repräsentanten u_ℓ und u_r von u mit u_ℓ (u_r) links- (rechts-) stetig, $u_r(x) \neq u_\ell(x)$ in höchstens abzählbar vielen Punkten und $\sum_{x\in\Omega} |u_r - u_\ell|(x) < \infty$.*

Beweis. Wähle $x_0 \in \Omega$ mit

$$\begin{cases} x_0 \text{ ist Lebesgue-Punkt von } u \textbf{ und} \\ \mu(\{x_0\}) = 0, \text{ also kein Atom für } \partial_x u =: \mu. \end{cases}$$

Setze

$$u_r(x) := \begin{cases} u(x_0) + \mu([x_0, x]) & \text{für } x \geq x_0 \\ u(x_0) - \mu((x, x_0]) & \text{für } x < x_0. \end{cases}$$

Betrachte für $x > x_0 + \varepsilon$ fest die Funktion

$$\eta_\varepsilon(z) := \begin{cases} \frac{z-(x_0-\varepsilon)}{2\varepsilon} & \text{für } z \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \\ 1 & \text{für } z \in [x_0+\varepsilon, x] \\ \frac{x+\varepsilon-z}{\varepsilon} & \text{für } z \in (x, x+\varepsilon] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\partial_z \eta_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\chi_{(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)} - \frac{1}{\varepsilon}\chi_{(x,x+\varepsilon)}$. Also folgt

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} u\, d\mathcal{L}^1 - \underbrace{\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} u\, d\mathcal{L}^1}_{\to u(x_0)} = -\int_\Omega u(z)\, \partial_z \eta_\varepsilon(z)\, d\mathcal{L}^1(z) = \langle \partial_z u, \eta_\varepsilon \rangle \to \mu([x_0, x])$$

und damit
$$\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} u\, d\mathcal{L}^1 \to u(x_0) + \mu([x_0, x]) = u_r(x).$$
Bei dem Grenzübergang haben wir die punktweise Konvergenz $\eta_\varepsilon \to \chi_{(x_0,x]} + \frac{1}{2}\chi_{\{x_0\}}$ und majorisierte Konvergenz ausgenutzt. Weiterhin haben wir verwendet, dass x_0 kein Atom ist und daher $\mu((x_0, x]) + \frac{1}{2}\mu(\{x_0\}) = \mu([x_0, x])$ gilt. Wir weisen nun nach, dass u_r die geforderten Eigenschaften hat (für $x > x_0$, der Nachweis für $x \leq x_0$ funktioniert analog).

1. Sei $x > x_0$ ein Lebesgue-Punkt von u und es gelte $\mu(\{x\}) = 0$ (dies ist für fast alle x der Fall) Dann gilt
$$\underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} u\, d\mathcal{L}^1}_{\to u_r(x)} = \underbrace{\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} u\, d\mathcal{L}^1}_{\to u(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} u\, d\mathcal{L}^1 - \frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x} u\, d\mathcal{L}^1\right\}}_{\overset{9.10}{\to} 0}.$$
Also ist $u_r = u$ fast überall. Damit ist u_r ein Repräsentant von u.
2. u_r rechtsstetig: Sei $\delta > 0$. Dann gilt
$$u_r(x+\delta) - u_r(x) \overset{x \geq x_0}{=} \mu([x_0, x+\delta]) - \mu([x_0, x]) = \mu(\underbrace{(x, x+\delta]}_{=:A_\delta}) \to 0,$$
denn $\bigcap_{\delta>0} A_\delta = \emptyset$.

Damit hat u_r die geforderten Eigenschaften.

Den linksstetigen Repräsentanten u_l definieren wir analog als
$$u_l(x) := \begin{cases} u(x_0) + \mu([x_0, x)) & \text{für } x > x_0 \\ u(x_0) - \mu([x, x_0]) & \text{für } x \leq x_0. \end{cases}$$
Dann ist $u_r(x) - u_\ell(x) = \mu(\{x\})$ und damit $\sum_{x\in\Omega} |u_r - u_\ell|(x) = \sum_{x\in\Omega} |\mu(\{x\})| < \infty$ □

Satz 9.12 (Charakterisierung von BV in 1D)**.** *Definiere*
$$\mathrm{BV}_{1D}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \middle| \sup\left\{\sum_{k=1}^{n-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| : a \leq x_1 < x_2 < ... < x_n \leq b\right\} < \infty \right\}.$$
Dann ist $\mathrm{BV}_{1D}(\Omega) = \mathrm{BV}(\Omega)$ *in dem Sinne, dass*

1. $\mathrm{BV}_{1D}(\Omega) \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ *und*
2. Jedes $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ *hat einen Repräsentanten in* $\mathrm{BV}_{1D}(\Omega)$.

Beweisskizze. Zu 2. Wähle zu $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ den linksstetigen Repräsentanten u_ℓ. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(x_k)_{k=1,\ldots,n}$ mit $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$ beliebig. Setze $I_k := (x_k, x_{k+1})$. Dann ist
$$\sum_{k=1}^{n-1} |u_\ell(x_{k+1}) - u_\ell(x_k)| = \sum_{k=1}^{n-1} |\mu([x_k, x_{k+1}))| \leq |\mu|(\Omega) \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}}.$$

Zu 1. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| : a \le x_1 < x_2 < ... < x_n \le b \right\} < \infty. \tag{9.2}$$

Man kann zeigen, dass u einen Repräsentanten hat, der „gleichmäßig rechtsstetig“ ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \Omega$ gilt $|u(x+y) - u(x)| < \varepsilon$ für alle $y \in (0, \delta)$.

Die stückweise affinen Funktionen sind dicht in $C_0(\Omega)$. Sei nun φ stückweise affin. Dann hat φ Stützstellen x_j, ist also affin auf (x_j, x_{j+1}). Wir wählen nun eine feinere Unterteilung von Ω mit Stützstellen z_k für $k = 1, \dots M$ und $I_k := (z_k, z_{k+1})$, so dass $|z_{k+1} - z_k| < \delta$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega u\, \partial_x \varphi \, d\mathcal{L}^1 &= -\sum_{k=1}^{M-1} \int_{I_k} u\, \partial_x \varphi = -\sum_{k=1}^{M-1} \int_{I_k} u \frac{\varphi(z_{k+1}) - \varphi_m(z_k)}{z_{k+1} - z_k} \, d\mathcal{L}^1 \\
&= -\sum_{k=1}^{M-1} (\varphi_m(z_{k+1}) - \varphi_m(z_k)) \underbrace{\fint_{I_k} u}_{\substack{=u(z_k)+\mathbf{O}(\varepsilon) \\ \text{Rechtstetigkeit}}} \\
&= \sum_{k=2}^{M-1} \varphi(z_k) \cdot (u(z_k) - u(z_{k-1})) + \mathbf{O}(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\varphi(x_1) = \varphi(x_M) = 0$ (denn φ approximiert C_0-Funktionen und kann daher mit Nullrandwerten gewählt werden). Also ist

$$\left| \int_\Omega u\, \partial_x \varphi \, d\mathcal{L}^1 \right| \le \|\varphi\|_\infty \underbrace{\sum_{k=2}^{M-1} |u(z_k) - u(z_{k-1})|}_{\overset{(9.2)}{\le} C} + \mathbf{O}(\varepsilon).$$

Aus obiger Abschätzung kïnnen wir folgern, dass die Abbildung $\varphi \mapsto -\int_\Omega u\, \partial_x \varphi \, d\mathcal{L}^1$ stetig bzgl. der Supremumsnorm ist und daher auf ganz $C_0(\Omega)$ fortgesetzt werden kann. Insbesondere gilt $\partial_x u \in \mathcal{M}(\Omega)$ und damit $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. □

9.2. Approximation und Kompaktheit

Im Folgenden betrachten wir wieder beliebige Dimensionen $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Satz 9.13 (Norm ist unterhalbstetig). *Sei $u_k \in \mathrm{BV}(\Omega)$ mit $\|u_k\|_{\mathrm{BV}} \le C$ und $u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$. Dann gilt $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ und*

$$\|u\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \le \liminf_{k \to \infty} \|u_k\|_{\mathrm{BV}(\Omega)}. \tag{9.3}$$

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$,mit $\|\varphi\|_\infty \le 1$. Wir betrachten

$$-\int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi) \, d\mathcal{L}^1 = -\lim_{k \to \infty} \int_\Omega u_k \operatorname{div}(\varphi) \, d\mathcal{L}^1 = \lim_{k \to \infty} \langle \nabla u_k, \varphi \rangle.$$

Dann gilt

$$|\langle \nabla u_k, \varphi \rangle| \le \|\nabla u_k\|_{\mathcal{L}(C_0,\mathbb{R})} \cdot \|\varphi\|_\infty \overset{\text{Riesz}}{=} \|\nabla u_k\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \cdot \|\varphi\|_\infty \le \|u_k\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \cdot \|\varphi\|_\infty.$$

Dies liefert die Unterhalbstetigkeit (9.3). Insbesondere ist der distributionelle Gradient von u, also die Abbildung $\varphi \mapsto -\int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi)\, d\mathcal{L}^1$ stetig auf allen $C_0(\Omega)$-Funktionen und daher ein Maß. Es gilt also $u \in BV(\Omega)$. □

Satz 9.14 (Approximierbarkeit)**.** *Sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. Dann existiert eine approximierende Folge $u_k \in C^\infty(\Omega)$ mit $u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$ und*

$$\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u \quad \textit{schwach-* im Raum } \mathcal{M}(\Omega). \tag{9.4}$$

Zusätzlich konvergiert die Norm,

$$\|\nabla u_k\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \to \|\nabla u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}. \tag{9.5}$$

Bemerkung 9.15. *Man muss sehr vorsichtig bei der Interpretation der Funktionen sein. Für eine glatte Funktion $f \in C_c^\infty(\Omega)$ ist einerseits ∇f der klassische Gradient, also die vektorwertige Funktion der partiellen Ableitungen. Andererseits identifizieren wir ∇f auch mit der Distribution $\varphi \to \int \nabla f \cdot \varphi$ bzw. einem Maß $\nabla f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Der klassische Gradient ∇f ist dabei die Dichte des Maßes ∇f bezüglich des Lebesgue-Maßes.*

Beweis von Satz 9.14. Einen vollständigen Beweis findet man im Buch von Evans-Gariepy. Die Schwierigkeit ist der Rand von Ω, was den Beweis technisch macht. Wir beweisen hier den Satz nur für $\Omega = \mathbb{R}^n$, wodurch die Randproblematik vermieden wird.

Sei $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$, also $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\nabla u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen eine glatte Funktion $\Phi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1 = 1$ und konstruieren daraus eine Diracfolge durch $\Phi_k(x) := k^n\, \Phi_1(k\,x)$. Die approximierenden Funktionen definieren wir mit Hilfe der Faltung als

$$u_k(x) = (u * \Phi_k)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) \cdot \Phi_k(y)\, dy.$$

Dann gilt $u_k \to u$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und $u_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es lässt sich sogar die Norm der Gradienten abschätzen: Für beliebiges $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \nabla u_k, \varphi \rangle &= -\int_{\mathbb{R}^n} u_k \operatorname{div}(\varphi)\, d\mathcal{L}^1 = -\int_{\mathbb{R}^n} (u * \Phi_k) \operatorname{div}(\varphi)\, d\mathcal{L}^1 \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} u\, (\operatorname{div}(\varphi) * \Phi_k)\, d\mathcal{L}^1 = -\int_{\mathbb{R}^n} u \operatorname{div}(\varphi * \Phi_k)\, d\mathcal{L}^1 = \langle \nabla u, \varphi * \Phi_k \rangle.
\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\|\nabla u_k\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)} = \sup\{\langle \nabla u_k, \varphi \rangle \,|\varphi \in C_0(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \le 1\} \le \|\nabla u\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}.$$

Damit ist hinsichtlich der Konvergenz (9.5) bereits die Relation $\limsup_k \|\nabla u_k\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)} \le \|\nabla u\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$ gezeigt. Die umgekehrte Aussage, nämlich $\liminf_k \|\nabla u_k\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)} \ge \|\nabla u\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$, wurde in Satz 9.13 gezeigt. Damit ist (9.5) verifiziert.

Wir wollen nun die schwach-* Konvergenz der Gradienten im Raum der Maße zeigen. Sei dazu $\varphi \in C_0(\Omega)$ eine beliebige Testfunktion. Wir wählen eine Approximation $\varphi_1 \in C_c^1(\Omega)$ mit $\|\varphi_1 - \varphi\|_\infty$ hinreichend klein. Dann ist

$$\begin{aligned}
&|\langle \nabla u_k, \varphi\rangle - \langle \nabla u, \varphi\rangle| \\
&\quad \le |\langle \nabla u_k, \varphi - \varphi_1\rangle| + |\langle \nabla u, \varphi - \varphi_1\rangle| + |\langle \nabla u_k - \nabla u, \varphi_1\rangle| \\
&\quad \le \underbrace{\|\nabla u_k\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}}_{\le C} \cdot \underbrace{\|\varphi - \varphi_1\|_\infty}_{\text{klein}} + \|\nabla u\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)} \cdot \underbrace{\|\varphi - \varphi_1\|_\infty}_{\text{klein}} + \underbrace{\langle \nabla u, \underbrace{\varphi_1 * \Phi_k - \varphi_1}_{\overset{L^\infty}{\to} 0}\rangle}_{\overset{k\to\infty}{\to} 0} \le \varepsilon,
\end{aligned}$$

für $\varepsilon > 0$ beliebig, falls φ_1 geeignet und k hinreichend groß. Damit ist (9.4) gezeigt. □

Warnung: Man kann durch Glättung keine normkonvergente Funktionenfolge erzeugen. Wir überlegen uns das mit dem folgenden Beispiel.

Beispiel (Keine Normkonvergenz)**.** *Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Betrachte $u := \chi_{(0,1)} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R})$ mit $\nabla u = \delta_{\{0\}} - \delta_{\{1\}}$. Sei $C^\infty \ni u_k \to u$ in $L^1(\mathbb{R})$ eine Glättung und k groß. Dann ist*

$$\underbrace{\|\nabla u_k - \nabla u\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})}}_{\ge 2} \not\to 0.$$

Satz 9.16 (Kompaktheit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Sei u_k eine Funktionenfolge mit $\|u_k\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \le C$. Dann existiert ein $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ und eine Teilfolge mit $u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$.*

Beweis. Wir approximieren zunächst die Folgenglieder u_k und wählen $g_k \in C^\infty(\Omega)$ mit $\|u_k - g_k\|_{L^1(\Omega)} \le \frac{1}{k}$ und $\|\nabla g_k\|_{L^1(\Omega)} = \|\nabla g_k\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \le C + 1$ gemäß Satz 9.14. Damit ist die Folge $g_k \in W^{1,1}(\Omega)$ beschränkt.

Wir verwenden nun die Kompaktheit der Einbettung $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$. Sie impliziert, dass es eine Teilfolge und eine Funktion $u \in L^1(\Omega)$ existiern, so dass $g_k \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $k \to \infty$. Dann gilt auch $\|u_k - u\|_{L^1(\Omega)} \le \|u_k - g_k\|_{L^1(\Omega)} + \|g_k - u\|_{L^1(\Omega)} \to 0$, also $u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$.

Die Kompaktheitsaussage für Maße impliziert, dass für ein Grenzmaß μ die Gradienten konvergieren, $\nabla g_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $\mathcal{M}(\Omega)$, wobei das Grenzmaß als $\mu = \nabla u$, der schwache Gradent von u, identifiziert werden kann. Dies zeigt $u \in BV(\Omega)$. □

Index

σ-Algebra, 8
σ-endlich, 32
Überdeckungssatz, 63
äußeres Maß, 11

absolut stetig, 28

beschränkte Variation, 84
Borel-σ-Algebra, 8
BV-Funktion, 83

Cantor-Funktion, 86
Cantor-Menge, 81

Dirac-Maß, 9
Dualraum von L^p, 35

Egoroff, Satz von, 51
einfache Funktion, 18
endlicher Perimeter, 85

fast überall, 18

Hölderungleichung, 29
Hahn-Zerlegung, 34
Hausdorff-Dimension, 77
Hausdorff-Maß, 72

isodiametrische Ungleichung, 78

Jordan-Zerlegung, 28

konzentriert, 28

Lebesgue äußeres Maß, 12
Lebesgue-Maß, 14
Lebesgue-Punkt, 65
Lemma
    von Fatou, 20

Maß, signiertes, 27
Maß, 8
Maß, äußeres, 11
Majorisierte Konvergenz, 20
Maximalfunktion, 62
messbare Funktion, 17
monotone Konvergenz, 19
Morrey, Satz von, 67

Nullmenge, 18

Polarzerlegung, 33

Rademacher, 71
Radon-Maß, 21

Schwach-L^1, 64
signiertes Maß, 27
singulär, 28
Steiner–Symmetrisierung, 78

Variationsmaß, 27

Young-Maß, 57