Asymptotisches Verhalten für eine Familie nichtlinearer, elliptischer Differentialgleichungen im Minkowski Raum

DIPLOMARBEIT

von

Karin Everschor

angefertigt im Mathematischen Institut
der Universität zu Köln
unter Anleitung von

Herrn Prof. Dr. Bernd Kawohl

Köln, Sommersemester 2008

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist es, die Arbeit von Herrn Yin Xi Huang

„A note on the asymptotic behavior of positive solutions for some elliptic equation“ [12]

auf Situationen zu erweitern, in denen ein Gebiet Ω des $\mathbb{R}^N$ nicht mehr mit einer euklidischen Norm sondern mit einer allgemeinen Minkowski-Norm ausgestattet ist.

Diese Arbeit ist in drei Kapitel gegliedert:

- Das erste Kapitel beinhaltet eine Einführung in das Randwertproblem. Dieses beinhaltet den p-Laplace Operator, einen im allgemeinen nichtlinearen, elliptischen Differentialoperator, der für $p = 2$ in den gewöhnlichen Laplace Operator übergeht. Zudem werden Situationen aufgezeigt, in denen dieses Randwertproblem zur Beschreibung von nichtlinearer Physik von Nutzen ist.

- Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Ausarbeitung der Resultate der Arbeit von Herrn Yin Xi Huang.

- Im dritten Kapitel befindet sich dann die Erweiterung der Resultate auf den Minkowski Raum. Dies führt zu einem verallgemeinerten p-Laplace Operator. Es hat sich gezeigt, dass sich alle Ergebnisse auch im Falle einer Minkowski Norm beweisen lassen. Von großem Nutzen war dabei die Äquivalenz aller Normen auf dem $\mathbb{R}^N$.

1 Einführung und physikalische Motivation

1.1 Das Randwertproblem

In der Arbeit *„A note on the asymptotic behavior of positive solutions for some elliptic equation“* [12] beschäftigt sich Herr Yin Xi Huang mit dem Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda(q)\,|u|^{q-2}u & \text{für } x \in \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $p \in (1, \infty)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 1.1.1: Die partielle Differentialgleichung ist die Euler-Lagrange-Gleichung zu folgendem Energiefunktional

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{p}\,|\nabla u(x)|^p - \frac{\lambda(q)}{q}\,|u(x)|^q\,dx \tag{1.2}$$

mit der Randbedinung $u = 0$ für alle $x \in \partial\Omega$.

Definition 1.1.2: Die **erste Variation** von u in Richtung v ist definiert durch:

$$\delta E(u, v) := \frac{d}{dt} E(u + tv)\Big|_{t=0}$$

Eine notwendige Bedingung für ein Minimum ist das Verschwinden der ersten Variation:

$$0 \stackrel{!}{=} \delta E(u, v), \qquad \text{für alle } v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Sei also $v \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} E(u + tv)\Big|_{t=0} \\ &= \int_\Omega \Big(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u \cdot \nabla v - \lambda(q)\,|u|^{q-2}\,u \cdot v \Big)\,dx. \end{aligned}$$

Dies ist zunächst die schwache Form der Euler-Lagrange-Gleichung. Durch partielle Integration (vorausgesetzt u sei differenzierbar) und mit anschließender Verwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung erhält man die starke Form der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$-\Delta_p u = \lambda\,(q)\,|u|^{q-2}\,u \tag{1.3}$$

Definition 1.1.3: Der **p-Laplace Operator** ist definiert durch:

$$\Delta_p u := \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(|\nabla u|^{p-2}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$$

Bemerkungen 1.1.4:

- Der p-Laplace Operator ist im Allgemeinen nichtlinear und positiv homogen vom Grade $(p-1)$, d.h. für alle $\alpha > 0$ gilt:

$$\Delta_p\,(\alpha u\,(x)) = \alpha^{p-1}\Delta_p u\,(x) \tag{1.4}$$

- Für den Fall $p = 2$ geht er in den herkömmlichen, linearen Laplace Operator $\Delta u = \operatorname{div}\,(\operatorname{grad} u)$ über.

- Für $p < 2$ wird der Exponent von $|\nabla u\,(x)|^{p-2}$ negativ. Damit divergiert der p-Laplace Operator an den Stellen, an denen $|\nabla u\,(x)|$ verschwindet oder unendlich groß wird, denn:

$$\begin{aligned}
\Delta_p u &= \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right)\\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(|\nabla u|^{p-2}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\\
&= |\nabla u|^{p-2}\,\Delta u + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(|\nabla u|^{p-2}\right)
\end{aligned}$$

1.2 Anwendungen in der Physik

Der p-Laplace Operator taucht in verschiedenen Bereichen der Physik auf, zum Beispiel in der Plasmaphysik, bei nicht linearen Diffusionsproblemen, Flüssen durch poröse Medien, so wie in nicht-Newtonschen Flüssigkeiten [7].

1.2.1 Newtonsche- und nicht-Newtonsche Flüssigkeiten

Im Wesentlichen gibt es bei der Beschreibung von Flüssigkeiten zwei diverse Ansätze: Die diskrete Theorie, bei der man die molekulare Struktur der untersuchten Materie berücksichtigt oder die Kontinuumstheorie, auf welcher die folgenden Überlegungen basieren. Um nicht-Newtonsche Flüssigkeiten von Newtonschen Flüssigkeiten abzugrenzen braucht man zunächst folgende Definition:

Definition 1.2.1: Eine Newtonsche Flüssigkeit ist dadurch charakterisiert, dass dessen Scherspannung proportional zur Scherrate ist. Ein Newtonsches Medium ist daher ein lineares Medium.

In der folgenden Situation beschränke ich mich auf den ebenen Fall [21]:

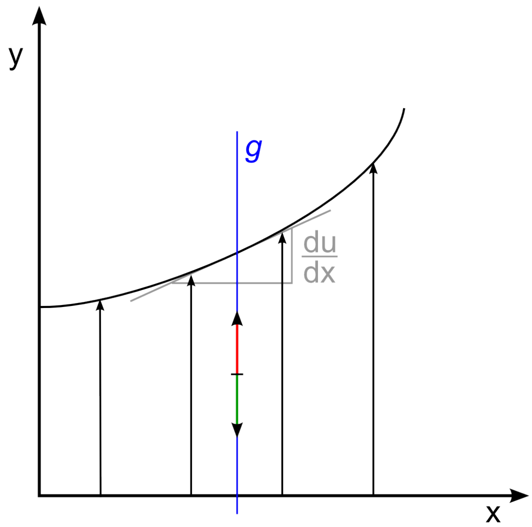

Abbildung 1.1: Schematisches Diagramm zur Scherspannung verursacht durch einen Geschwindigkeitsgradienten

Eine Flüssigkeit fließt entlang der y Richtung mit einer Geschwindigkeit u. Jedoch ist die Geschwindigkeit eines jeden Flüssigkeitstropfens von der entsprechenden x-Koordinate des Tropfens abhängig. Die Geschwindigkeit ist damit eine Funktion der x-Koordinate: $u = u(x)$. Betrachtet man nun eine beliebige Gerade g parallel zur y-Achse, so stellt man fest, dass entlang dieser eine (Scher-)Spannung wirkt: Rechts von der Geraden ist die Flüssigkeit schneller als links davon. Die schnellen Flüssigkeitstropfen werden die langsamen vorwärts ziehen und die langsameren Tropfen ziehen die schnellere Flüssigkeit zurück. Damit wirken gleichgroße aber entgegengesetzte Kräfte auf die Flüssigkeitstropfen auf der Geraden wie in der Abbildung 1.1 ersichtlich ist.

In einer Newtonschen Flüssigkeit ist wie schon erwähnt die Scherspannung direkt proportional zur Scherrate. Diese wird in der Physik oft mit $\dot{\gamma}$ bezeichnet und ist der Gradient des Geschwindigkeitsfeldes, also $\frac{du}{dx}$. Würde man sich nicht auf den obigen Fall beschränken, so ist die Geschwindigkeit im Allgemeinen eine vektorielle Größe und damit die Scherrate $\dot{\gamma}$ ein Tensor zweiter Stufe [15]:

$$\dot{\gamma} = \nabla\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Bezeichnet man mit τ die Kraft pro Einheitsfläche, so erfüllt eine Newtonsche Flüssigkeit im ebenen Fall folgende Gleichung:

$$\tau = \eta\frac{du}{dx} \tag{1.6}$$

Diese Gleichung wurde für laminare, nicht turbulente Strömungen empirisch ermittelt. Man bezeichnet sie auch als Newtonschen Reibungsansatz [15].

In (1.6) ist η der Viskositätskoeffizient, der oft einfach nur Viskosität genannt wird. Die Viskosität ist ein Maß für die Zähflüssigkeit eines Fluids. Die Scherspannung τ, als Kraft pro Fläche, hat die Dimension eines Drucks. Jedoch wirkt bei der Scherspannung die Kraft nicht senkrecht zur Fläche sondern entlang dieser.

Mit anderen Worten ist ein Newtonsches Fluid eine Flüssigkeit, dessen Viskosität konstant bleibt, wenn sich die auf das Medium einwirkenden Scherkräfte ändern. Die Viskosität einer Newtonschen Flüssigkeit darf sich jedoch mit der Temperatur (was gewöhnlich der Fall ist) und mit dem Druck (was selten auftritt) ändern.

Die meisten Flüssigkeiten (und Gase) mit kleinen Molekülen, die nur auf einfache Weise miteinander wechselwirken, verhalten sich in etwa Newtonsch. Ein simples Beispiel für eine Flüssigkeit, die in guter Näherung bei Zimmertemperatur und laminarem Fließzustand ein Newtonsches Fluid ist, ist Wasser [15]. Die Viskosität von Wasser bei 20 °C beträgt $1,00\ \mathrm{mPa \cdot s}$ [19].

Über hundert Jahre lang war es üblich Gleichung (1.6) als grundlegendes Modell für die Dynamik von Flüssigkeiten zu betrachten (siehe [9]). Dennoch gibt es eine Vielzahl von Medien bei denen dies nicht so ist. Diese nennt man **nicht-Newtonsch**. Nicht-Newtonsches Verhalten tritt insbesondere bei Flüssigkeiten mit langen Molekülen (Polymeren) auf. Die Ursache für dieses Verhalten ist eine Änderung der Stärke der Wechselwirkungen in der Flüssigkeit infolge einer veränderten mikroskopischen Struktur. Nicht-Newtonsche Flüssigkeiten werden im Gebiet der Rheologie behandelt. Das

Wort 'Rheologie' stammt aus dem Griechischen und heißt übersetzt Fließkunde. In ihr werden daher das Fließ- und Verformungsverhalten deformierbarer Materie unter der Einwirkung äußerer Kräfte untersucht [16].

Man teilt nicht-Newtonsche Fluide in drei Gruppen ein [15]:

1. Zeitunabhängige (bzw. viskose) nicht-Newtonsche Fluide: Flüssigkeiten, bei denen die Scherrate eine eindeutige Funktion der Scherspannung ist.

2. Zeitabhängige nicht-Newtonsche Fluide: Komplexere Systeme, für die die Relation zwischen der Scherrate und der Scherspannung von der Vorgeschichte des Systems abhängt.

3. Viskoelastische Fluide: Systeme, die sowohl charakteristische Merkmale von Flüssigkeiten als auch von Festkörpern besitzen.

Im Folgenden werde ich nur die erste Gruppe der nicht-Newtonschen Fluide betrachten. Diese können durch eine Gleichung der Form $\tau = f(\dot{\gamma})$ mit $\dot{\gamma} = \frac{du}{dx}$ beschrieben werden.

Eine der bekanntesten und meist genutzen empirischen Relation für solche Fluide ist das Potenzgesetz von Ostwald und de Waele [5]:

$$\eta = m\,|\dot{\gamma}|^{p-2} = m\left|\frac{du}{dx}\right|^{p-2}, \quad \text{mit } m > 0 \text{ und } p > 1 \tag{1.7}$$

Hierbei sind m, dessen physikalische Dimension $N\frac{s^p}{m^2}$ ist, und p, welches dimensionslos ist, für das jeweilige Fluid charakteristische Materialkonstanten. In Gleichung (1.7) taucht nur der Betrag der Scherrate auf, da man aus Symmetriegründen erwartet, dass die Viskosität nur von der Größe der Scherrate nicht aber von deren Richtung abhängt.

Somit hat man Gleichung (1.6) auf folgendes rheologisches Potenzgesetz verallgemeinert:

$$\tau = m\left|\frac{du}{dx}\right|^{p-2}\frac{du}{dx} \tag{1.8}$$

Für $p = 2$ erhält man den Spezialfall der Newtonschen Flüssigkeit, weshalb p häufig nicht-Newtonscher Index genannt wird.

Viskose Flüssigkeiten unterteilt man noch einmal entsprechend ihren Fließeigenschaften in zwei Gruppen [15]:

- Medien mit $p > 2$ heißen dilatante Flüssigkeiten. Diese weisen unter höherem Druck eine höhere Viskosität auf. Ein Beispiel hierfür ist eine Stärke-Wasser-Mischung.

- Medien mit $p < 2$ heißen pseudoplastische Flüssigkeiten. Unter größerem Druck weisen sie eine niedrigere Viskosität auf. Eine pseudoplastische Flüssigkeit ist zum Beispiel Blut.

Im sogenannten Fließdiagramm, welches die Abhängigkeit der Scherspannung von der Scherrate darstellt, ergeben sich damit folgende drei, schematisch verschiedene Graphen:

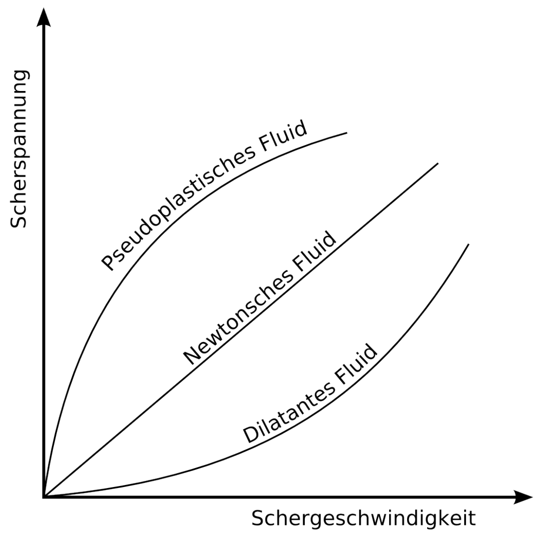

Abbildung 1.2: Schematische Darstellung der Fließkurven für ein Newtonsches, ein dilatantes und ein pseudoplastisches Fluid

Bei der Newtonschen Flüssigkeit ergibt sich aufgrund des linearen Zusammenhangs zwischen Scherspannung und Scherrate eine Gerade mit der Steigung η.

Das Potenzgesetz von Ostwald und de Waele wurde empirisch aufgestellt und ist nicht immer anwendbar. Zum Beispiel wird es unbrauchbar, wenn man Systeme in der Nähe von $\dot{\gamma} = 0$ betrachtet. Denn entsprechend Gleichung (1.7) wäre dann $\eta \approx 0$ anstelle einer positiven Konstanten η_0. Hier sind andere Modelle besser geeignet, wie zum Beispiel das Potenzgesetz von Spriggs oder auch das vier parametrige Carreau Modell [5].

Multipliziert man τ mit der Scherrate $\frac{du}{dx}$ und integriert über das Gebiet Ω so erhält man den zur Viskosität gehörenden Energieanteil:

$$E_{vis}(u) = \int_\Omega \tau \cdot \frac{du}{dx}\, dx \overset{(1.8)}{=} \int_\Omega m \left|\frac{du}{dx}\right|^{p-2} \frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dx}\, dx = \int_\Omega m \left|\frac{du}{dx}\right|^{p} dx$$

Addiert man zum viskosen Energiefunktional ein kinetisches Energiefunktional, welches typischer Weise (bei einer auf eins normierten Masse) die Gestalt

$$E_{kin}(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}\, u^2 \, dx$$

annimmt, so ergibt sich die Gesamtenergie zu:

$$E(u) = E_{vis}(u) + E_{kin}(u) = \int_\Omega \left(m \left| \frac{du}{dx} \right|^p + \frac{1}{2}\, u^2 \right) dx$$

Dies ist im Wesentlichen die eindimensionale Form des Energiefunktionals (1.2) für $q = 2$.

Um die Euler-Lagrange-Gleichung herzuleiten, setze ich die erste Variation von $E(u)$ in Richtung v für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gleich Null:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \frac{d}{dt} E(u + tv) \Big|_{t=0} \\ &= \int_\Omega \left[m \cdot p \left| \frac{du}{dx} \right|^{p-2} \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + u \cdot v \right] dx \\ &= \int_\Omega \left[-m \cdot p \frac{d}{dx} \left(\left| \frac{du}{dx} \right|^{p-2} \frac{du}{dx} \right) + u \right] \cdot v \, dx \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Fundamentallemmas der Variationsrechung erhält man folgende Euler-Lagrange-Gleichung:

$$-\frac{d}{dx} \left(\left| \frac{du}{dx} \right|^{p-2} \frac{du}{dx} \right) + \lambda u = 0, \qquad \text{mit } \lambda = \frac{1}{mp} \tag{1.9}$$

Verallgemeinert man die Herleitung auf höhere Dimensionen so erhält man statt (1.9)

$$-\operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) + \lambda u = 0$$

und damit Gleichung (1.3) für $q = 2$.

1.2.2 Elastische Membran

Im Fall $p = q$ kann man sich zum Beispiel eine isotrope, elastische Membran vorstellen (siehe [3]), die auf dem Rand $\partial\Omega$ eines ebenen Gebietes Ω fixiert ist. Bezeichnet man mit $u(x)$ die vertikale Verschiebung und sei $\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$ die nichtlineare Deformations-Energie so löst ein Minimierer des sogenanten Rayleigh-Quotienten

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx}$$

auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ die Euler-Lagrange-Gleichung

$$-\Delta_p u = \lambda(p)\,|u|^{p-2}\,u \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{1.10}$$

Gleichung (1.10) ist der Spezialfall von Gleichung (1.3) für $q = p$.

Diese beiden Beispiele zeigen, dass das betrachtete Randwertproblem (1.1) nicht nur von mathematischer sondern auch von physikalischer Signifikanz ist.

In Kapitel 3 betrachtet man anstelle der euklidischen Norm im Zähler des Rayleigh-Quotienten eine allgemeine Norm. Dies wäre beispielsweise dann von Nutzen, wenn die elastische Membran nicht isotrop, sondern etwa aus verschiedenen Materialien gewebt ist. Die sich ergebende anisotrope Deformationsenergie kann man so interpretieren, dass der euklidische Abstand in Ω verzerrt ist. Durch Verwendung einer geeigneteren Norm ist es möglich diese besser zu beschreiben.

2 Das elliptische Randwertproblem im Euklidischen Raum

Herr Yin Xi Huang betrachtet positive Lösungen, die man durch Minimierung von

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \tag{2.1}$$

auf der Menge

$$\Gamma_q = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega |u|^q \, dx = 1 \right\}$$

erhält.

2.1 Der Sobolevraum $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definition 2.1.1: Der **Sobolevraum** $W_0^{1,p}(\Omega)$ ist der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der $W^{1,p}$ Norm:

$$\|u\| = \left(\int_\Omega \left(|u|^p + |\nabla u|^p \right) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

und $C_0^\infty(\Omega)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω.

Anders ausgedrückt, minimiert Herr Yin Xi Huang das Funktional auf der Menge der Funktionen u mit kompaktem Träger, die in $L^p(\Omega)$ liegen, sowie eine schwache Ableitung in $L^p(\Omega)$ besitzen. Zudem sind sie bezüglich der L^q-Norm normiert. Sie liegen damit auch in $L^q(\Omega)$.

Bezeichnung 2.1.2: Normen in $W_0^{1,p}(\Omega)$ werden mit $\|\cdot\|$ bezeichnet; Normen in $L^q(\Omega)$ mit $\|\cdot\|_q$.

Satz 2.1.3: Für beschränktes Ω gilt in L^p Räumen:

$$0 < p_1 < p_2 \leq \infty \Longrightarrow L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega) \tag{2.2}$$

Beweis: Für eine Funktion $f \in L^p(\Omega)$ definiere die Mengen Ω_1 und Ω_2 mit $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ folgender Maßen:

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : |f(x)| \leq 1\} \text{ und } \Omega_2 = \{x \in \Omega : |f(x)| > 1\}$$

Für jedes $p \in (0, \infty)$ gilt

$$\int_\Omega |f|^p \, dx = \int_{\Omega_1} |f|^p \, dx + \int_{\Omega_2} |f|^p \, dx \leq |\Omega_1| + \int_{\Omega_2} |f|^p \, dx,$$

wobei das Integral über Ω_2 monoton wachsend in p ist.

- Für $p_1 < p_2 < \infty$ gilt: Sei $f \in L^{p_2}(\Omega)$, d.h. es gilt $\int_\Omega |f|^{p_2} \, dx < \infty$. Betrachte nun:

$$\int_\Omega |f|^{p_1} \, dx \leq |\Omega_1| + \int_{\Omega_2} |f|^{p_1} \, dx \overset{p_1 < p_2}{\leq} |\Omega_1| + \int_{\Omega_2} |f|^{p_2} \, dx < \infty$$
$$\Rightarrow f \in L^{p_1}(\Omega)$$

- Für $p_1 < p_2 = \infty$ benutzt man die Abschätzung $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ für fast alle $x \in \Omega$:

$$\int_\Omega |f|^{p_1} \, dx \leq |\Omega| \, \|f\|_\infty^{p_1} < \infty \quad \Rightarrow f \in L^{p_1}(\Omega)$$

□

Bemerkung 2.1.4: Für $q \leq p$ ist $\|u\|_q = 1$ keine wesentliche Zusatzvoraussetzung. Denn für $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt $u \in L^q(\Omega)$ aufgrund von (2.2). Durch Skalierung von u lässt sich $\|u\|_q = 1$ gewährleisten. Konkret heißt das: Sei u eine Lösung des Randwertproblems (1.1), dann löst die skalierte Funktion αu (mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) eine von der Struktur her gleiche Identität, jedoch mit einem skalierten $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(\alpha) = \lambda \cdot \alpha^{p-q}$. Mit u ist $-u$ ebenfalls eine Lösung. Sei daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} -\Delta_p(\alpha u) &= -\operatorname{div}\left(|\nabla(\alpha u)|^{p-2} \nabla(\alpha u)\right) \\ &= -\alpha^{p-1} \Delta_p u = \alpha^{p-1} \lambda |u|^{q-2} u \\ &= \widetilde{\lambda} \cdot |(\alpha u)|^{q-2} (\alpha u), \qquad \text{mit } \widetilde{\lambda} = \lambda \alpha^{p-q}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Für $q > p$ ist $\|u\|_q = 1$ jedoch eine zusätzliche Bedingung. Die Lösung u des Randwertproblems (1.1) muss nicht nur in $L^p(\Omega)$ sondern in dem kleineren Raum $L^q(\Omega)$ liegen.

Fügt man die einschränkenden Bedingungen aus Γ_q mit einem Lagrange-Multiplikator $\lambda(q)$ zum Funktional $I(u)$ hinzu so erhält man durch Nullsetzen der ersten Variation das Randwertproblem (1.1).

2.2 Der kritische Sobolev-Exponent und die Poincaré-Ungleichung

Definition 2.2.1: Der kritische Sobolev-Exponent p^* ist definiert durch:

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{für } p < N \\ \infty & \text{für } p \geq N \end{cases}$$

Bemerkung 2.2.2: Für festes $p > 1$ gilt:

- $p < p^* \leq \infty$ für alle N
- $p^* \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} p$.
- p^* trägt den Namen kritischer Sobolev-Exponent, da (zum Beispiel nach [8]) für alle $q \in [1, p^*)$ der folgende Satz, der unter dem Namen **Sobolevscher Einbettungssatz** bekannt ist, gilt:

Satz 2.2.3: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, beschränkt und $\partial\Omega$ sei von der Klasse C^1. Ferner sei $1 \leq p < N$. Dann gilt

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

für alle q aus $[1, p^*)$. Dies bedeutet, dass $W^{1,p}(\Omega)$ kompakt eingebettet ist in $L^q(\Omega)$. Insbesondere existiert also für alle q mit $1 \leq q < p^*$ eine Konstante K mit

$$\|u\|_q \leq K \cdot \|u\|.$$

<u>Zusatz:</u> Es gilt natürlich auch

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega).$$

Jedoch kann hierbei auf die Voraussetzung an $\partial\Omega$ verzichtet werden.

Satz 2.2.4: Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^N$ existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von Ω abhängt, so dass

$$\|u\|_p \leq C \, \||\nabla u|\|_p \tag{2.4}$$

für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt. Hierbei ist $1 \leq p \leq \infty$ beliebig. Diese Relation ist unter dem Namen **Poincaré-Ungleichung** bekannt.

Beweis durch Widerspruch:

1. Für den Fall $p \in (1, \infty)$:
   Angenommen (2.4) gilt nicht, dann existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $W_0^{1,p}(\Omega)$ mit:

   $$\|u_n\|_p > n \cdot \||\nabla u_n|\|_p$$

Setze $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_p}$. Dann gilt:

$$1 = \|v_n\|_p > n \left\| \left| \nabla \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_p} \right) \right| \right\|_p = n \, \| |\nabla v_n| \|_p$$

$$\Rightarrow \| |\nabla v_n| \|_p < \frac{1}{n}$$

Somit konvergiert $(\nabla v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^p(\Omega)$ gegen Null.

$$\nabla v_n \to 0 \text{ in } L^p(\Omega)$$

$\Rightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Da $W_0^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ kompakt eingebettet ist, existiert eine Teilfolge $\left(v_{n_j}\right)_{n_j \in \mathbb{N}}$ die gegen ein v aus $L^p(\Omega)$ in der L^p-Norm konvergiert:

$$v_{n_j} \to v \text{ in } L^p(\Omega)$$

Da $W_0^{1,p}(\Omega)$ für $p \in (1,\infty)$ reflexiv ist, besitzt $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge $(v_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$: $v_{n_k} \rightharpoonup w$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ [24]:

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{n_k} \rightharpoonup w & \text{in } L^p(\Omega) \\ \nabla v_{n_k} \rightharpoonup \nabla w & \text{in } L^p(\Omega) \end{cases}$$

Aus der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes folgt nun, dass $v = w$ und $\nabla w = 0$ gilt. Hieraus ergibt sich, dass w fast überall konstant sein muss. Mit den Nullranddaten erhält man: $w \equiv 0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Andererseits gilt jedoch

$$\|w\|_p = \|v\|_p = \lim_{k\to\infty} \|v_{n_k}\|_p = 1,$$

was zum Widerspruch führt.
Dieser Beweis klappt nicht für $p = 1$ oder $p = \infty$, da $W^{1,1}(\Omega)$ und $W^{1,\infty}(\Omega)$ nicht reflexiv sind.

2. Für den Fall $p = \infty$:
Da $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}}$ gilt, genügt es $u \in C_0^\infty(\Omega)$ zu betrachten. Jedes beschränkte Gebiet Ω aus $\mathbb{R}^N$ lässt sich in einem Quader der Kantenlänge $(b-a)$ unterbringen.

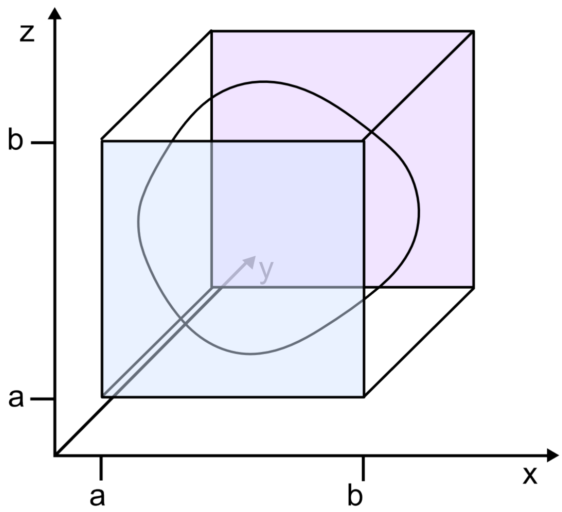

Abbildung 2.1: Beschränktes Gebiet Ω im Quader

$$
\begin{aligned}
|u(x)| &\leq \int_a^{x_i} |u_{x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_n)|\, dy \\
&\leq \int_a^b \underbrace{|u_{x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_n)|}_{\leq \|u_{x_i}\|_\infty} dy \leq (b-a) \cdot \|u_{x_i}\|_\infty
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq (b-a) \|u_{x_i}\|_\infty \leq C \, \||\nabla u|\|_\infty$$

Für eine geeignete Konstante $C > 0$.

3. Für den Fall $p = 1$:
Betrachte $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Wie im Fall $p = \infty$ gilt $|u(x)| \leq \int_a^b |u_{x_i}|\, dy$ und somit:

$$
\begin{aligned}
\|u\|_1 &= \int_\Omega |u(x)|\, dx &&\leq \int_\Omega \left(\int_a^b |u_{x_i}|\, dy \right) dx \\
&\overset{Fubini}{=} \int_a^b \left(\int_\Omega |u_{x_i}|\, dx \right) dy &&\leq \int_a^b \underbrace{\left(\int_\Omega |\nabla u|\, dx \right)}_{=\||\nabla u|\|_1 = konst.} dy \\
&= (b-a) \, \||\nabla u|\|_1 &&=: C \, \||\nabla u|\|_1
\end{aligned}
$$

□

2.3 Positivität der ersten Eigenfunktion

Definition 2.3.1: Eine Funktion $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$ heißt **Eigenfunktion** des Randwertproblems (1.1), falls

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda(q) \int_\Omega |u|^{q-2} u \cdot \phi \, dx \tag{2.5}$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt. $\lambda(q) \in \mathbb{R}$ heißt **Eigenwert**.

Aufgrund der Regularitätstheorie [20] weiß man, dass schwache Lösungen von (2.5) in $C^{1,\alpha}(\Omega)$ liegen. Sie sind damit insbesondere stetig.

Lemma 2.3.2: Die erste Eigenfunktion, die dem ersten Eigenwert entspricht, wechselt ihr Vorzeichen nicht.

Beweis des Lemmas: Zunächst einmal sieht man an Formel (1.2), dass sich die Energie $E(u)$ des Systems unter der Transformation $u \to -u$ nicht ändert. Setzt man $v = |u|$ so erfüllt v offensichtlich die Nullrandbedingung, d.h. $v = 0$ für alle $x \in \Omega$ und mit $u, -u \in W^{1,p}(\Omega)$ ist auch $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Zudem gilt:

$$1 = \int_\Omega |u|^q \, dx = \int_\Omega v^q dx = \int_\Omega |v|^q \, dx$$

$$\Rightarrow v \in \Gamma_q$$

Damit ist v eine zulässige Funktion zur Minimierung des Funktionals (2.1). Es gilt also $E(u) = E(|u|) = E(v)$ mit $v \geq 0$. D.h. falls u die Energie minimiert, so ist sie auch für $-u$ und v minimal.

Entsprechend des schwachen Minimumprinzips [18] nimmt die Funktion ihr Minimum auf dem Rand an. Das starke Minimumprinzip [18] besagt im Wesentlichen Folgendes: Nimmt eine Funktion v ihr Minimum im Inneren von Ω an, so ist sie auf ganz Ω konstant. Auf $\partial\Omega$ gilt jedoch $v = 0$ und damit würde $v \equiv 0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ folgen. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass v eine Eigenfunktion bzw. dass $\int_\Omega |v|^q \, dx = 1$ sein soll.

$$\Rightarrow v > 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega \quad \Rightarrow |u| > 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega.$$

Ein alternativer Beweis dazu, dass $v > 0$ für fast alle $x \in \Omega$ (statt $v \geq 0$) gilt, ist mittels Harnackscher Ungleichung:
Für die Funktion $v(x)$ gilt die Harnacksche Ungleichung [10], [22]. Dies bedeutet, dass ein $C > 0$ existiert, so dass

$$\max_{B_r} v(x) \leq C \min_{B_r} v(x)$$

ist, falls $B_{2r} \subset \Omega$ gilt. B_r und B_{2r} sind Kugeln in $\mathbb{R}^N$ mit den Radien r und $2r$. Die Konstante C hängt nur von p und N, der Dimension des Raumes, ab. Da $v \geq 0$ gilt, folgt aus der Harnackschen Ungleichung, dass $v(x) > 0$ fast überall sein muss. Denn angenommen es existiert ein $x \in B_r$ mit $v(x) = 0$ so ist $\min_{B_r} v(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 \leq \max_{B_r} v(x) \leq C \min_{B_r} v(x) = 0 \\
&\Rightarrow \max_{B_r} v(x) = 0 \\
&\Rightarrow v(x) \equiv 0 \quad \text{für alle } x \in B_r
\end{aligned}$$

Als Gebiet lässt sich Ω durch Kugeln überdecken und mit $v(x) = 0$ für alle $x \in \partial\Omega$ folgt:

$$\Rightarrow v(x) \equiv 0 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega$$

Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass v eine Eigenfunktion bzw. dass v aus Γ_q sein soll und damit $\int_\Omega |v|^q \, dx = 1$ gelten muss.

$$\Rightarrow v(x) > 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega \qquad \Rightarrow |u(x)| > 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega.$$

Damit ist die Behauptung, dass die erste Eigenfunktion ihr Vorzeichen nicht wechselt, bewiesen. □

Bemerkung 2.3.3: Da mit u auch $-u$ eine erste Eigenfunktion ist, reicht es positive Lösungen zu betrachten. Für $u > 0$ lautet (1.1):

$$-\Delta_p u = \lambda(q)\, u(q)^{q-1} \tag{2.6}$$

Ein positiver Minimierer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ des Energiefunktionals (1.2) muss damit Gleichung (2.6) erfüllen.

2.4 Existenz des Rayleigh-Quotienten

Satz 2.4.1: Es existiert ein $\lambda(q) > 0$ und ein $u(q) \in \Gamma_q$, $u(q) > 0$, die der Bedingung (1.1) genügen, mit

$$\lambda(q) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u|^q \, dx\right)^{p/q}}. \tag{2.7}$$

$\lambda(q)$ heißt Rayleigh-Quotient.

Definition 2.4.2: Ein Funktional $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ heißt **unterhalbstetig** genau dann, wenn für jede stark konvergente Folge $u_n \xrightarrow{n\to\infty} u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq F(u) \text{ gilt.[6]}$$

Analog definiert man die schwache Unterhalbstetigkeit [6]:

Definition 2.4.3: Ein Funktional $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ heißt **schwach unterhalbstetig** genau dann, wenn für jede schwach konvergente Folge $u_n \xrightharpoonup{n\to\infty} u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq F(u) \quad \text{gilt.}$$

Beweis des Satzes 2.4.1: Es sind insgesamt drei Eigenschaften zu zeigen:

(i) Das Infimum existiert, d.h. es gibt eine Funktion u bei der $\lambda(q)$ sein Minimum annimmt.

(ii) Das Minimum ist größer als Null.

(iii) Die Funktion, bei der das Minimum angenommen wird, ist eine Lösung des Randwertproblems (1.1).

Zu (i): Definiere die Funktion $B_q(u)$ folgender Maßen:

$$\lambda(q) = \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega), u\neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u|^q \, dx\right)^{p/q}} =: \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega), u\neq 0} B_q(u)$$

Ziel ist es $B_q(u)$ auf der Menge $\widetilde{A} := \left\{ u \,\middle|\, u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ u \neq 0 \right\}$ zu minimieren.

Dies ist äquivalent dazu $Z(u)$ auf der Menge

$$A := \left\{ u \,\middle|\, u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \int_\Omega |u|^q \, dx = 1 \right\}$$

zu minimieren. Hierbei ist $B_q(u) := \frac{Z(u)}{N_q(u)}$, wobei $Z(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$ der Zähler und $N_q(u) = \left(\int_\Omega |u|^q \, dx\right)^{p/q}$ der Nenner des Bruches $B_q(u)$ ist.

Um (i) zu beweisen, muss man daher zeigen, dass $\min_{u\in A} Z(u)$ existiert. Per Definition ist $\lambda(q)$ nicht negativ. Ebenso ist $Z(u) \geq 0$ und damit nach unten beschränkt. Folglich existiert eine Minimalfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit

$$\lim_{n\to\infty} Z(u_n) = \inf_{u\in A} Z(u) \geq 0.$$

Da $Z(u_n)$ konvergiert, ist es durch eine Konstante K nach oben beschränkt:

$$K \geq Z(u_n) = \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx = \||\nabla u_n|\|_p^p \overset{(2.4)}{\geq} C^p \|u_n\|_p^p$$

Damit sind die L^p-Normen von u_n und ∇u_n beschränkt.

$$\Rightarrow u_n \text{ ist beschränkt in } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Da $W_0^{1,p}(\Omega)$ für $p \in (1,\infty)$ reflexiv ist, existiert eine Teilfolge $(u_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ und ein $\widetilde{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit:

$$u_{n_k} \xrightharpoonup{n_k \to \infty} \widetilde{u} \;\text{ schwach in } W_0^{1,p}(\Omega) \quad [24]$$

Insbesondere gilt damit auch $u_{n_k} \xrightharpoonup{n_k \to \infty} \widetilde{u}$ schwach in $L^p(\Omega)$.

Ziel ist es zu zeigen, dass $\widetilde{u}$ einen Minimierer von $Z(u)$ auf der Menge A darstellt. Zeige daher zunächst, dass $\widetilde{u} \in A$ gilt.

Nutze hierzu, dass nach Satz 2.2.3 $W_0^{1,p}(\Omega)$ kompakt in $L^q(\Omega)$ eingebettet ist für alle q aus $[1,p^*)$. Daher existiert für alle q aus $[1,p^*)$ eine Teilfolge $(u_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ und ein $u \in L^q(\Omega)$, so dass

$$u_{n_k} \xrightarrow{n_k \to \infty} u \text{ stark in } L^q(\Omega) \;\text{ konvergiert.}$$

Da $u_{n_k} \in A$ und damit $\|u_{n_k}\|_q = 1$ für alle $n_k \in \mathbb{N}$ gilt, überträgt sich aufgrund der starken Konvergenz in $L^q(\Omega)$ und der Stetigkeit der Norm diese Eigenschaft auf u: $\|u\|_q = 1, \;\Rightarrow u \in A$.

Wegen Bemerkung 2.2.2 ist $p > p^*$ und damit gilt insbesondere, dass

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega).$$

Dies bedeutet, dass eine Teilfolge $(u_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ existiert mit $u \in L^p(\Omega)$, so dass

$$u_{n_k} \xrightarrow{n_k \to \infty} u \text{ stark in } L^p(\Omega)$$

konvergiert. Da aus starker Konvergenz schwache Konvergenz folgt, gilt auch

$$u_{n_k} \xrightharpoonup{n_k \to \infty} u \text{ schwach in } L^p(\Omega).$$

Die Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes impliziert, dass u in $L^p(\Omega)$ gleich $\widetilde{u}$ ist. Damit ist $\widetilde{u} \in A$ bewiesen. Zeige nun, dass $\widetilde{u}$ einen Minimierer darstellt.

Das Funktional $Z(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$ erfüllt folgende Eigenschaften:

- Es ist als Verkettung stetiger Funktionen stetig in u.
- $Z(u)$ ist konvex, d.h. für alle $t \in (0,1)$ gilt:

  $$Z(tu + (1-t)v) \le tZ(u) + (1-t)Z(v)$$

  Der Beweis hierzu ist in Lemma 2.5.4 enthalten.

Aus den beiden Eigenschaften folgt, dass $Z(u)$ schwach unterhalbstetig ist. Da $u_{n_k} \xrightarrow{n_k \to \infty} \widetilde{u}$ schwach in $W_0^{1,p}(\Omega)$ konvergiert, gilt $Z(\widetilde{u}) \leq \liminf_{n_k \to \infty} Z(u_{n_k})$.

Mit der Ungleichungskette

$$\inf_{u \in A} Z(u) \leq Z(\widetilde{u}) \leq \liminf_{n_k \to \infty} Z(u_{n_k}) = \inf_{u \in A} Z(u)$$

erhält man, dass $Z(\widetilde{u}) = \inf_{u \in A} Z(u)$ und somit $\widetilde{u}$ ein Minimierer von $Z(u)$ auf der Menge A ist.

Zu (ii): Es gilt $Z(u) > 0$. Denn angenommen $Z(u) = 0$, dann ist $|\nabla u| = 0$ fast überall in Ω, woraus $u = 0$ fast überall in Ω folgt. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $u \in A$.

Da $Z(u) > 0$ und $N_q(u) = 1$ aufgrund der Definition der Menge A gilt, ist $B_q(u)$ für einen Minimierer u positiv. Damit ist $\lambda(q) > 0$.

Zu (iii): Für einen Minimierer u von $B_q(u)$ muss $\delta B_q(u,v) = 0$ für alle v aus $C_0^\infty(\Omega)$gelten. Dies ist aufgrund der Quotientenregel äquivalent zu:

$$\begin{aligned} & N_q(u)\,\delta Z(u,v) - Z(u)\,\delta N_q(u,v) = 0 && \text{für alle } v \in C_0^\infty(\Omega) \\ \Leftrightarrow \quad & \delta Z(u,v) = B_q(u)\,\delta N_q(u,v) && \text{für alle } v \in C_0^\infty(\Omega) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Für einen Minimierer u von $B_q(u)$ gilt $\lambda(q) = B_q(u)$. Berechnet man die in (2.8) vorkommenden Funktionale explizit und nutzt, dass u ein Minimierer von $B_q(u)$ ist, so erhält man folgende Gleichung:

$$p \cdot \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda(q) \cdot \frac{p}{q} \cdot \left(\int_\Omega |u|^q \, dx \right)^{\frac{p}{q}-1} \cdot q \cdot \int_\Omega |u|^{q-2} u \cdot v \, dx$$

Für $u \in \Gamma_q$ gilt damit:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda(q) \int_\Omega |u|^{q-2} u \cdot v \, dx \\ \xRightarrow{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \quad & -\Delta_p u = \lambda(q)\,|u|^{q-2} u \end{aligned}$$

□

2.5 Eindeutigkeit der Lösung für $q \leq p$

Lemma 2.5.1: $\lambda(q)$ ist beschränkt, falls q aus einer beschränkten Menge ist.

Beweis: Dies lässt sich anhand von (2.7) direkt zeigen, denn man muss nur eine Funktion $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \neq 0$ finden, für die $\lambda(q) < \infty$ gilt. Für $B(0,R) \subset \Omega$ gibt Herr Yin Xi Huang in seiner Arbeit folgende Funktionen an:

(i) für $1 < p < N$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\frac{R}{2}\right)^{(p-N)/(p-1)} - R^{(p-N)/(p-1)} & \text{für } 0 \leq |x| \leq \frac{R}{2} \\ |x|^{(p-N)/(p-1)} - R^{(p-N)/(p-1)} & \text{für } \frac{R}{2} < |x| \leq R \\ 0 & \text{für } |x| > R \end{cases}$$

(ii) für $p = N$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} (\ln 2)^{(N-1)/N} & \text{für } 0 \leq |x| \leq \frac{R}{2} \\ (\ln R - \ln|x|)(\ln 2)^{-1/N} & \text{für } \frac{R}{2} < |x| \leq R \\ 0 & \text{für } |x| > R \end{cases}$$

(iii) für $p > N$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} R^{(p-N)/(p-1)} - \left(\frac{R}{2}\right)^{(p-N)/(p-1)} & \text{für } 0 \leq |x| \leq \frac{R}{2} \\ R^{(p-N)/(p-1)} - |x|(p-N)/(p-1) & \text{für } \frac{R}{2} < |x| \leq R \\ 0 & \text{für } |x| > R \end{cases}$$

□

Satz 2.5.2: Für $q \leq p$ ist die positive Lösung von (1.1) eindeutig.

Bemerkung 2.5.3: Für $q = p$ hat man folgenden Spezialfall:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda(p)|u|^{p-2}u & \text{für } x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.9}$$

Hierbei sieht man sofort oder an (2.3), dass mit u auch αu für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Lösung des Randwertproblems ist. (2.9) ist die Euler-Lagrange-Gleichung des speziellen Minimierungsproblems: Minimiere

$$J(v) := p \cdot I(v) = \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx$$

auf der Menge $\Gamma_p := \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1 \right\}$.

Herr Yin Xi Huang beweist den Satz (2.5.2) mittels Maximumprinzips. Er nutzt, dass die Normalenableitung einer Lösungsfunktion auf dem Rande von Ω negativ sein muss. Ein alternativer Beweis [2] basiert im Wesentlichen auf folgendem Lemma:

Lemma 2.5.4: Für $q \leq p$ ist das Funktional $J(v) = \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx$ konvex in $|v|^q$.

Beweis des Lemmas: Setzt man $w = |v|^q$, so folgt

$$\begin{aligned}
\nabla w &= q \cdot |v|^{q-1} \frac{v}{|v|} \nabla v \\
|\nabla w| &= q \cdot |v|^{q\left(1-\frac{1}{q}\right)} |\nabla v| \\
&= q \cdot w^{1-\frac{1}{q}} |\nabla v| \\
|\nabla w|^p &= q^p \cdot w^{p\left(1-\frac{1}{q}\right)} |\nabla v|^p ,
\end{aligned}$$

woraus man dann $|\nabla v|^p$ als Funktion von w bekommt:

$$\Rightarrow |\nabla v|^p = \frac{1}{q^p} \cdot w^{\frac{p}{q}(1-q)} |\nabla w|^p =: f(w)$$

Man muss daher die Konvexität der Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $w \mapsto f(w)$ in w zeigen, d.h. für $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in (0,1)$ gilt:

$$f(\alpha w_1 + (1-\alpha) w_2) \leq \alpha f(w_1) + (1-\alpha) f(w_2)$$

Substituiert man $z = \frac{\nabla w}{q}$ so ist es äquivalent zu zeigen, dass

$$k(w,z) = w^{p\left(1-\frac{1}{q}\right)} |z|^p \quad \text{ in } (w,z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$$

konvex ist.

Dies zeigt man am besten in zwei Schritten (vergleiche [13]):

1.) Man betrachte zunächst das eindimensionale Problem und zeigt, dass

$$h(w,y) = w^{p\left(1-\frac{1}{q}\right)} y^p \quad \text{ in } (w,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$$

konvex ist.

2.) Nun zeigt man mit Hilfe von 1.), dass k konvex ist.

zu 1.) Da die Funktion $h(w,y)$ differenzierbar ist, genügt es zu zeigen, dass die Hessematrix $D^2 h$ positiv semidefinit ist, d.h. dass die Eigenwerte λ_i, $i = 1,2$ der Hessematrix nicht negativ sind.

Behauptung: Bei einer 2×2 Matrix ist dies äquivalent dazu zu zeigen, dass die Spur und die Determinante der Hessematrix nicht negativ sind.

Dies ergibt sich aus folgenden Überlegungen: Die allgemeine Form einer 2×2 Hessematrix ist die Folgende:

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Denn aufgrund der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen ist H symmetrisch. Nehme $H \neq 0$ an, andernfalls ist H trivialer Weise positiv semidefinit.

Berechnung der Eigenwerte von H:

$$0 \overset{!}{=} \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - b^2$$

$$\Rightarrow \left(\lambda - \frac{a+d}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{d^2}{4} > 0$$

Die Eigenwerte von H sind also:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{d^2}{4}}$$

Die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ sind genau dann nicht negativ, wenn

$$\frac{a+d}{2} \overset{!}{\geq} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{d^2}{4}} > 0$$

gilt. Dies ist äquivalent zu (i) und (ii):

(i) $\frac{a+d}{2} > 0$

$$\Rightarrow \mathrm{Sp}\,(H) = a + d > 0$$

(ii) $\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \geq b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{d^2}{4}$

$$\Rightarrow \det\,(H) = ad - b^2 > 0$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Durch direkte Berechnung der Einträge aus $D^2 h$ bekommt man:

$$\begin{aligned} h_{ww}(w,y) &= \left(\frac{p}{q} - p\right)\left(\frac{p}{q} - p - 1\right) w^{\frac{p}{q}-p-2} y^p \\ h_{yy}(w,y) &= p\,(p-1)\, w^{\frac{p}{q}} y^{p-2} \\ h_{wy}(w,y) &= h_{yw} = p\left(\frac{p}{q} - p\right) w^{\frac{q}{p}-p-1} y^{p-1} \end{aligned}$$

Da $p > 1$ ist folgt, dass $h_{yy}(w, y) > 0$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ist. Zudem gilt

$$(1 - pq)^2 > 0 > q - q^2, \qquad \text{da } p > 1 \text{ und } q > 1 \text{ bzw. } q^2 > q \text{ ist.}$$

Durch Multiplikation mit $\frac{p}{q^2} > 0$ erhält man $\left(\frac{p}{q} - p\right)^2 > \left(\frac{p}{q} - p\right)$ und damit

$$\left(\frac{p}{q} - p\right)\left(\frac{p}{q} - p - 1\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad h_{ww}(w, y) > 0 \text{ in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Womit gezeigt ist, dass die Spur von $D^2 h$ positiv in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ist.

$$\begin{aligned}
\det\left(D^2 h\right) &= h_{ww} h_{yy} - h_{wy}^2 \\
&= \left(\frac{p}{q} - p\right)\left(\frac{p}{q} - p - 1\right) p\,(p-1)\, w^{\frac{p}{q} - p - 2 + \frac{p}{q}} y^{p+p-2} \\
&\quad - p^2 \left(\frac{p}{q} - p\right)^2 w^{2\left(\frac{q}{p} - p - 1\right)} y^{2(p-1)} \\
&= \left(\frac{p}{q} - p\right) \frac{p}{q} \left[p^2 - qp^2 - qp - p + qp + q - p^2 + qp^2\right] w^{2\left(\frac{q}{p} - p - 1\right)} y^{2(p-1)} \\
&= \left(\frac{p}{q} - p\right) \frac{p}{q} (p - q)\, w^{2\left(\frac{q}{p} - p - 1\right)} y^{2(p-1)} \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

Denn es gilt $1 < q \leq p \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q} < p$ bzw. $\frac{p}{q} - p < 0$ sowie $q - p \leq 0$. Somit ist der erste Teil bewiesen.

zu 2.) Sei nun $\alpha \in (0, 1)$ und $(w_i, z_i) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$, für $i = 1, 2$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung für die z_i bekommt man

$$|\alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2| \leq \alpha |z_1| + (1 - \alpha) |z_2| . \tag{2.10}$$

Die Funktion h ist monoton wachsend in y somit erhält man mit (2.10) und 1.) folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
& k\big(\alpha w_1 + (1 - \alpha) w_2, \alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2\big) \\
= \; & h\big(\alpha w_1 + (1 - \alpha) w_2, |\alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2|\big) \\
\overset{(2.10)}{\leq} \; & h\big(\alpha w_1 + (1 - \alpha) w_2, \alpha |z_1| + (1 - \alpha) |z_2|\big) \\
\overset{1.)}{\leq} \; & \alpha \cdot h(w_1, |z_1|) + (1 - \alpha) \cdot h(w_2, |z_2|) \\
= \; & \alpha \cdot k(w_1, z_1) + (1 - \alpha) \cdot k(w_2, z_2)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

□

Bemerkung 2.5.5: Gleichheit gilt in (2.11) nur genau dann, wenn in beiden Ungleichungen Gleichheit gilt. Für (2.10) bedeutet dies, dass z_1 parallel zu z_2 sein muss, d.h. $z_1 = \beta z_2$. Da α beliebig ist, impliziert 1.), dass $\beta = 1$ gilt.

Beweis des Satzes 2.5.2: Zunächst für $q = p$:
Angenommen es gibt zwei positive Lösungen u und z des Randwertproblems (2.9). Definiere die Funktionen $\eta := \frac{1}{2}(u^p + z^p)$ und $w = \eta^{1/p}$. Dann gilt

$$\int_\Omega w^p \, dx = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega u^p \, dx + \int_\Omega z^p \, dx\right) = 1.$$

$\Rightarrow w \in \Gamma_p$. Berechne nun $J(w)$:
Zunächst gilt $\nabla w = \frac{1}{2p}\,\eta^{\frac{1}{p}-1}\left(p\,u^{p-1}\nabla u + p\,z^{p-1}\nabla z\right)$, so dass:

$$\begin{aligned}
|\nabla w|^p &= \eta^{1-p}\left|\frac{1}{2}\left(u^{p-1}\nabla u + z^{p-1}\nabla z\right)\right|^p \\
&= \eta\left|\frac{1}{2}\left(\frac{u^p}{\eta}\frac{\nabla u}{u} + \frac{z^p}{\eta}\frac{\nabla z}{z}\right)\right|^p \\
&= \eta\left|\frac{u^p}{u^p + z^p}\frac{\nabla u}{u} + \frac{u^p + z^p - u^p}{u^p + z^p}\frac{\nabla z}{z}\right|^p \\
&= \eta\left|s(x)\frac{\nabla u}{u} + (1 - s(x))\,\frac{\nabla z}{z}\right|^p \qquad \text{mit } s(x) = \frac{u^p}{u^p + z^p} = \frac{u^p}{2\eta} \in (0,1) \\
&\leq \eta\left[s(x)\left|\frac{\nabla u}{u}\right|^p + (1 - s(x))\left|\frac{\nabla z}{z}\right|^p\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(u^p\left|\frac{\nabla u}{u}\right|^p + z^p\left|\frac{\nabla z}{z}\right|^p\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|u|^p + |z|^p\right)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Damit ergibt sich:

$$\int_\Omega |\nabla w|^p \, dx \leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla z|^p \, dx\right) \tag{2.13}$$

Nach Annahme minimieren u und z das Funktional $J(v)$, folglich muss in (2.13) Gleichheit gelten:

$$\int_\Omega |\nabla w|^p - \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^p + |\nabla z|^p\right) dx = 0$$

Da in der Rechnung (2.12) nur eine Ungleichung vorhanden ist, muss in dieser Gleichheit gelten. In dieser hat man die Konvexität des Funktionals $J(v)$ in v^p also Lemma 2.5.4 angewendet.
Damit in der Konvexitätsungleichung Gleichheit gilt, muss nach Bemerkung 2.5.5 gelten:

$$\frac{\nabla u}{u} = \frac{\nabla z}{z} \qquad \text{fast überall in } \Omega \tag{2.14}$$

Aus (2.14) folgt $z \cdot \nabla u - u \cdot \nabla z = 0$ fast überall in Ω und mit $z \neq 0$ ist

$$\nabla\left(\frac{u}{z}\right) = \frac{z\nabla u - u\nabla z}{z^2} = 0 \qquad \text{fast überall in } \Omega.$$

$$\Rightarrow u = \text{konstant} \cdot z \ =: c \cdot z \qquad \text{fast überall in } \Omega. \tag{2.15}$$

Beide Funktionen sind aus Γ_p und deshalb bezüglich der L^p -Norm normiert. Dementsprechend gilt:

$$\|z\| = \|u\| \overset{(2.15)}{=} \|cz\| = |c| \cdot \|z\|$$
$$\Rightarrow |c| = 1 \quad \Rightarrow c = \pm 1$$

Da u und z nach Annahme positiv waren folgt $c = +1$ und damit

$$\Rightarrow u = z \quad \text{fast überall in } \Omega. \qquad \Rightarrow u = z \quad \text{in } L^p(\Omega).$$

Im Falle $p = q$ ist damit die Eindeutigkeit bewiesen.
Die Grundidee des Beweises die Konvextität des Funktionals $J(v)$ in v^p zu verwenden funktioniert, wie in [2] erläutert wird, auch in folgendem allgemeineren Fall:

Positive (schwache) Lösungen von

$$\begin{cases} \Delta_p u + f(x,u) = 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

sind eindeutig vorausgesetzt $f : \Omega \times [0, \infty)$ genügt den Bedingungen:

1. Die Abbildung $r^{1-p} f(x,r)$ ist streng monoton fallend in $r \in [0, \infty)$.

2. Es existiert eine positive Konstante C, so dass $f(x,r) \leq C\left(r^{p-1} + 1\right)$ für fast alle $x \in \Omega$ und $r \in [0, \infty)$ gilt.

Damit lässt sich die Eindeutigkeit der positiven Lösung im Fall $q < p$ des Randwertproblems (1.1) zeigen. Hier ist $f(x,u) = \lambda(q)\, u(x)^{q-1}$. Zu zeigen ist, dass dieses f den Bedingungen 1. und 2. genügt: Sei $r \in [0, \infty)$.

Zu 1.: Die Abbildung $r^{1-p} f(x,r) = \lambda(q)\, r^{1-p}\, r^{q-1} = \lambda(q)\, r^{q-p}$ ist strikt monoton fallend in r, denn für $r < s$ mit $r, s \in [0, \infty)$ ist $r^{p-q} < s^{p-q}$, da für $q < p$ die Differenz $p - q$ positiv ist. Invertiert man diese Ungleichung und multipliziert mit der positiven Konstanten $\lambda(q)$ so erhält man das Gewünschte:

$$r < s \quad \Rightarrow \quad \lambda(q)\, r^{q-p} > \lambda(q)\, s^{q-p}$$

Zu 2.: $f(x,r) = \lambda(q)\, r^{q-1}$. Ist $r > 1$ so lässt sich $f(x,r)$ durch $\lambda(q)\, r^{p-1}$ nach oben hin abschätzen. Ist $0 \leq r < 1$ so gilt $r^{q-1} \leq 1$. Somit ist 2. für jede positive Konstante C erfüllt, die größer oder gleich $\lambda(q)$ ist:

$$f(x,r) = \lambda(q)\, r^{q-1} \leq \lambda(q)\left(r^{p-1} + 1\right) \leq C\left(r^{p-1} + 1\right)$$

Damit ist die Eindeutigkeit im Fall $q < p$ ebenfalls bewiesen. □

2.6 Konvergenzverhalten des Rayleigh-Quotienten und der Lösung des Randwertproblems

Satz 2.6.1: Sei $q < p^*$. Da $p < p^*$ gilt, gibt es für q zwei mögliche Fälle:

(a) Für $q \to q_0 < p$ gilt: $\lambda(q) \to \lambda(q_0)$ und $u(q) \to u(q_0)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$. D.h., dass $\lambda(q)$ und $u(q)$ stetig in q sind, falls $q < p$ ist.

(b) Für $q \to q_0 > p$ gibt es (λ_0, u_0), so dass $(\lambda(q), u(q)) \to (\lambda_0, u_0)$, mit $\lambda_0 \geq \lambda(q_0)$, $u_0 > 0$ und (λ_0, u_0) eine Lösung von (1.1) ist. Dies bedeutet insbesondere, dass $\lambda(q)$ in q oberhalbstetig ist, für $q > p$.

Bezeichnung 2.6.2:

$$\| \cdot \|_{\nabla,p} := \left(\int_\Omega |\nabla \cdot|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.16}$$

Behauptung: Die durch (2.16) definierte Abbildung ist eine Norm in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Beweis: (2.16) stellt sicherlich eine Halbnorm in $W_0^{1,p}(\Omega)$ dar. Die Eigenschaft, die noch zu überprüfen ist, ist die Folgende

$$\|u\|_{\nabla,p} = 0 \quad \Rightarrow u = 0 \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Sei also $0 = \|u\|_{\nabla,p} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$. Da $|\nabla u|^p$ nicht negativ ist, kann das Integral nur dann Null werden, wenn $|\nabla u| = 0$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt.
$\Rightarrow u$ ist fast überall konstant. Da $u = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt, folgt also $u = 0$ fast überall. □

Lemma 2.6.3: Sei $u(q)$ eine Lösung des Randwertproblems (1.1) mit beschränktem q, dann ist $u(q)$ beschränkt in $W_0^{1,p}(\Omega)$ bezüglich der $W^{1,p}$-Norm.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\|u(q)\|^p &= \left(\int_\Omega |u|^p + |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p} \cdot p} \\
&= \int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u \, dx \\
&\overset{\text{part. Integration}}{=} \int_\Omega |u|^p \, dx - \int_\Omega \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) \cdot u \, dx \\
&\overset{(1.1)}{=} \int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega \lambda(q) \, |u|^{q-2} u \cdot u \, dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u(q)\|_p^p + \||\nabla u(q)|\|_p^p = \|u(q)\|_p^p + \lambda(q)\,\|u(q)\|_q^q$$

Da $u \in \Gamma_q$ ist, gilt $\|u\|_q^q = 1$ und damit

$$\||\nabla u(q)|\|_p^p = \lambda(q)\,. \tag{2.17}$$

Ist q beschränkt, so folgt aus Lemma (2.5.1), dass $\lambda(q)$ beschränkt ist und man erhält zunächst: $u(q)$ ist in $W_0^{1,p}(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{\nabla,p}$ beschränkt.

Dass $u(q)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ bezüglich der $W^{1,p}$-Norm beschränkt ist, bekommt man aus der folgenden Ungleichungskette:

$$\|u(q)\|^p = \|u(q)\|_p^p + \||\nabla u(q)|\|_p^p \overset{(2.4)}{\leq} (C^p+1)\,\||\nabla u(q)|\|_p^p \overset{(2.17)}{=} (C^p+1)\,\lambda(q) < \infty$$

□

Lemma 2.6.4: Seien a, b zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^N$ und $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ das Standardskalarprodukt in $L^2(\Omega)$, dann gilt folgende Abschätzung:

$$\left(|a|^{p-2}\,a - |b|^{p-2}\,b, a-b\right) \geq \left(\|a\|_p - \|b\|_p\right)\cdot\left(\|a\|_p^{p-1} - \|b\|_p^{p-1}\right) \tag{2.18}$$

Beweis: Multipliziert man die Terme im Skalarprodukt aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} A &:= \left(|a|^{p-2}\,a - |b|^{p-2}\,b, a-b\right) \\ &= \left(|a|^{p-2}\,a, a\right) - \left(|a|^{p-2}\,a, b\right) - \left(|b|^{p-2}\,b, a\right) + \left(|b|^{p-2}\,b, b\right) \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\left(|a|^{p-2}\,a, a\right) = \int_\Omega |a|^{p-2}\,a\cdot a\,dx = \int_\Omega |a|^p\,dx = \|a\|_p^p$$

und die gemischten Terme lassen sich mit der Hölderschen Ungleichung abschätzen:

$$\begin{aligned} \left(|a|^{p-2}\,a, b\right) &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left\|a^{p-1}\right\|_{\frac{p}{p-1}}\cdot\|b\|_p \\ &= \left(\int_\Omega |a|^{p-1\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\cdot\|b\|_p \\ &= \|a\|_p^{p-1}\cdot\|b\|_p \end{aligned}$$

Insgesamt lässt sich A nach unten abschätzen zu:

$$\begin{aligned} A &\geq \|a\|_p^p - \|a\|_p^{p-1}\cdot\|b\|_p - \|b\|_p^{p-1}\cdot\|a\|_p + \|b\|_p^p \\ &= \left(\|a\|_p - \|b\|_p\right)\left(\|a\|_p^{p-1} - \|b\|_p^{p-1}\right) \end{aligned}$$

□

Beweis des Satzes 2.6.1: Dieser erfolgt in mehreren Schritten:

I: Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen q_0 konvergente Folge. Wegen Lemma (2.6.3) ist $u(q_n) := u_n$ eine beschränkte Folge und besitzt somit eine in $W_0^{1,p}(\Omega)$ schwach konvergente Teilfolge mit einem Grenzwert $u_0 < \infty$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte also:

$$q_n \to q_0,\ \lambda(q_n) \xrightarrow{q_n\to q_0} \lambda_0 \text{ und } u_n \xrightarrow{q_n\to q_0} u_0 \text{ schwach in } W_0^{1,p}(\Omega)\text{, stark in } L^{q_0}(\Omega)$$

Die starke Konvergenz von $u(q_n)$ gegen u_0 in $L^{q_0}(\Omega)$ gilt aufgrund des Sobolevschen Einbettungssatzes (Satz 2.2.3). Insbesondere ist damit $(u(q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^{q_0}(\Omega)$ eine Cauchyfolge.

II: Zeige dass $u(q_n) \xrightarrow{q_n\to q_0} u_0$ stark in $W_0^{1,p}(\Omega)$ konvergiert, d.h. dass $\|u(q_n) - u_0\|$ für $q_n \to q_0$ gegen Null konvergiert. Betrachte deswegen:

$$\begin{aligned}\|u(q_n) - u_0\|^p &= \|u(q_n) - u_0\|_p^p + \||\nabla u(q_n) - \nabla u_0|\|_p^p \\ &\overset{(2.4)}{\leq} (C^p + 1)\||\nabla u(q_n) - \nabla u_0|\|_p^p\end{aligned}$$

Daher ist es äquivalent zu zeigen, dass $\||\nabla u(q_n) - \nabla u_0|\|_p \xrightarrow{q_n\to q_0} 0$ gilt.

Hierfür ist es ausreichend folgende Eigenschaften nachzuweisen [1]:

(i) $\nabla u(q_n) \xrightarrow{q_n\to q_0} \nabla u_0$ in $L^p(\Omega)$

(ii) $\||\nabla u(q_n)|\|_p \xrightarrow{q_n\to q_0} \||\nabla u_0|\|_p$ in $\mathbb{R}$

Zu (i): Da $u(q_n) \xrightarrow{q_n\to q_0} u_0$ schwach in $W_0^{1,p}(\Omega)$ konvergiert, gilt insbesondere:

$$\nabla u(q_n) \xrightarrow{q_n\to q_0} \nabla u_0 \text{ in } L^p(\Omega)$$

Zu (ii): Zeige zunächst, dass $(\nabla u(q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ bildet, d.h. dass Folgendes gilt:

$$\||\nabla u(q_n) - \nabla u(q_m)|\|_p = \||(\nabla u(q_n) - \nabla u(q_m)) - 0|\|_p \xrightarrow{q_n,q_m\to q_0} 0$$

Es reicht wiederum aus die Eigenschaften (i) und (ii) für diesen Fall nachzuweisen. Aus

$$\nabla u(q_n) \xrightarrow{q_n\to q_0} \nabla u_0 \text{ in } L^p(\Omega)$$

und

$$\nabla u(q_m) \xrightarrow{q_m\to q_0} \nabla u_0 \text{ in } L^p(\Omega)$$

folgt

$$\nabla u(q_n) - \nabla u(q_m) \xrightarrow{q_n,q_m\to q_0} \nabla u_0 - \nabla u_0 = 0 \text{ in } L^p(\Omega).$$

Damit ist (i) erfüllt. Um zu zeigen, dass

$$\||\nabla u(q_n)|\|_p - \||\nabla u(q_m)|\|_p \xrightarrow{q_n, q_m \to q_0} 0 \text{ in } \mathbb{R} \tag{2.19}$$

gilt, betrachtet man q_n, q_m in der Nähe von q_0. $u(q_n)$ und $u(q_m)$ erfüllen die Gleichung:

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} \quad &:= \int_\Omega \left\{ |\nabla u(q_n)|^{p-2} \nabla u(q_n) - |\nabla u(q_m)|^{p-2} \nabla u(q_m) \right\} \\
&\qquad \cdot \nabla \left(u(q_n) - u(q_m) \right) \, dx \\
&= \int_\Omega - \operatorname{div} \left\{ |\nabla u(q_n)|^{p-2} \nabla u(q_n) - |\nabla u(q_m)|^{p-2} \nabla u(q_m) \right\} \\
&\qquad \cdot \left(u(q_n) - u(q_m) \right) \, dx \\
&= \int_\Omega - \left\{ \Delta_p u(q_n) - \Delta_p u(q_m) \right\} \left(u(q_n) - u(q_m) \right) \, dx \\
&\overset{(2.6)}{=} \int_\Omega \left\{ \lambda(q_n) u(q_n)^{q_n - 1} - \lambda(q_m) u(q_m)^{q_m - 1} \right\} \\
&\qquad \cdot \left(u(q_n) - u(q_m) \right) \, dx
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Die rechte Seite der Gleichung konvergiert für $n, m \to \infty$ gegen Null, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left\{ \lambda(q_n) u(q_n)^{q_n - 1} - \lambda(q_m) u(q_m)^{q_m - 1} \right\} \big(u(q_n) - u(q_m) \big) \, dx \\
\overset{\text{Hölder}}{\leq} \quad & \|u(q_n) - u(q_m)\|_{q_0} \cdot \Bigg(\int_\Omega \Big| \lambda(q_n) u(q_n)^{q_n - 1} \\
& -\lambda(q_m) u(q_m)^{q_m - 1} \Big|^{\frac{q_0}{q_0 - 1}} dx \Bigg)^{\frac{q_0 - 1}{q_0}}
\end{aligned}$$

Der erste Faktor $\|u(q_n) - u(q_m)\|_{q_0}$ konvergiert gegen Null für $n, m \to \infty$, da $u(q_n)$ in $L^{q_0}(\Omega)$ eine Cauchyfolge ist. Zu zeigen ist noch, dass der zweite Faktor beschränkt ist. Für jedes $x \in \Omega$ lässt sich die Differenz im Integral durch das Maximum der beiden (positiven) Beiträge abschätzen:

$$\left| \lambda(q_n) u(q_n)^{q_n - 1} - \lambda(q_m) u(q_m)^{q_m - 1} \right|^{\frac{q_0}{q_0 - 1}} \leq \max_{j = n, m} \left[\left(\lambda(q_j) u(q_j)^{q_j - 1} \right)^{q_0} \right]^{\frac{1}{q_0 - 1}}$$

$\lambda(q_j)$ konvergiert für $j \to \infty$ gegen λ_0 und ist damit beschränkt. $u(q_j)$ ist aufgrund der starken Konvergenz in $L^{q_0}(\Omega)$ gleichmäßig beschränkt in $L^{q_0}(\Omega)$.

$\widetilde{A}$, das heißt der erste Ausdruck aus Gleichung (2.20) lässt sich mit Hilfe des Lemmas 2.6.4 und $a = \nabla u(q_n)$, $b = \nabla u(q_m)$ wie folgt nach unten abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left\{ |\nabla u(q_n)|^{p-2} \nabla u(q_n) - |\nabla u(q_m)|^{p-2} \nabla u(q_m) \right\} \nabla \left(u(q_n) - u(q_m) \right) dx \\
&\leq \left(\||\nabla u(q_n)|\|_p - \||\nabla u(q_m)|\|_p \right) \cdot \left(\||\nabla u(q_n)|\|_p^{p-1} - \||\nabla u(q_m)|\|_p^{p-1} \right) \\
&=: B \geq 0
\end{aligned}$$

Für $n, m \to \infty$ konvergiert $\widetilde{A}$ gegen Null, daher muss auch der kleinere (positive) Ausdruck B in diesem Grenzwert gegen Null gehen. Damit folgt (2.19) und es ist bewiesen, dass $(\nabla u(q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ ist.

Da $L^p(\Omega)$ ein Banachraum ist, ist er insbesondere vollständig. Somit existiert eine Grenzfunktion, die aufgrund der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes mit ∇u_0 übereinstimmen muss,

$$\Rightarrow \| |\nabla u(q_n)| \|_p - \| |\nabla u_0| \|_p \xrightarrow{q_n \to q_0} 0.$$

Damit sind (i) und (ii) erfüllt und es gilt $u(q_n) \xrightarrow{q_n \to q_0} u_0$ stark in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

III: Aufgrund der starken Konvergenz überträgt sich auf u_0 die Eigenschaft $u_0 \geq 0$. Die Stetigkeit der Norm sorgt für $\|u_0\|_{q_0} = 1$. Daher ist u_0 nicht identisch Null. Zusätzlich impliziert $u(q_n) \xrightarrow{q_n \to q_0} u_0$ stark in $W_0^{1,p}(\Omega)$ dass u_0 eine schwache Lösung des folgenden Randwertproblems ist:

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 = \lambda_0 u_0^{q_0-1} & \text{für } x \in \Omega, \\ \quad u_0 = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Positivität von u_0 folgt erneut aus dem Minimumprinzip [18].

IV: Es gilt: $\lambda(q_0) \leq \lambda_0$. Denn (λ_0, u_0) ist eine Lösung von (1.1) und damit ist λ_0 nach Satz 2.4.1 durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\lambda_0 = \frac{\int_\Omega |\nabla u_0|^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u_0|^{q_0} \, dx\right)^{p/q_0}}$$

Und somit gilt:

$$\lambda(q_0) \overset{(2.7)}{=} \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u|^{q_0} \, dx\right)^{p/q_0}} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u_0|^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u_0|^{q_0} \, dx\right)^{p/q_0}} = \lambda_0$$

Hiermit ist Fall (b) aus Satz 2.6.1 bewiesen.

V: Für $q \leq p$ ist die Lösung des Randwertproblems (1.1) eindeutig. Damit folgt für $q \to q_0 < p$, dass $u_0 = u(q_0)$ und $\lambda_0 = \lambda(q_0)$ gilt, womit auch (a) aus Satz 2.6.1 bewiesen ist.

□

2.7 Der Fall q konvergiert gegen p

Insbesondere studiert Herr Yin Xi Huang das Randwertproblem (1.1) für den Fall, dass der Exponent q der rechten Seite der Differentialgleichung gegen die Konstante p des p-Laplace Operators konvergiert.

Satz 2.7.1: Sei

$$v(q) = \left(\frac{\lambda(q)}{\lambda}\right)^{1/(q-p)} u(q) \tag{2.21}$$

für ein $\lambda > 0$. Falls entweder

(*i*) $\lambda < \lambda(p)$ und $q \to p^+$ oder

(*ii*) $\lambda > \lambda(p)$ und $q \to p^-$

erfüllt ist, dann gilt $\|v(q)\| \xrightarrow{q \to p} \infty$.

Beweis: Da $u(q)$, λ und $\lambda(q)$ positiv sind, ist auch $v(q)$ positiv. Für $v(q)$ gilt:

$$\begin{aligned}
-\Delta_p v(q) &\overset{(2.21)}{=} -\Delta_p\left[\left(\frac{\lambda(q)}{\lambda}\right)^{1/(q-p)} \cdot u(q)\right] \\
&\overset{(1.4)}{=} \left(\frac{\lambda(q)}{\lambda}\right)^{\frac{p-1}{q-p}} \cdot (-1)\,\Delta_p u(q) \\
&\overset{(2.6)}{=} \left(\frac{\lambda(q)}{\lambda}\right)^{\frac{p-1}{q-p}} \lambda(q)\; u(q)^{q-1} \\
&\overset{(2.21)}{=} \left(\frac{\lambda(q)}{\lambda}\right)^{\frac{p-1}{q-p}} \lambda(q) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda(q)}\right)^{\frac{q-1}{q-p}} v(q)^{q-1} \\
&\overset{(\star)}{=} \lambda\, v(q)^{q-1}
\end{aligned}$$

Nebenrechnungen zu ($\star$): Es ist

$$\lambda(q)^{\frac{p-1}{q-p}-\frac{q-1}{q-p}+1} = \lambda(q)^{\frac{p-1-q+1}{q-p}+1} = \lambda(q)^{1-\frac{q-p}{q-p}} = 1$$

und

$$\lambda^{-\frac{p-1}{q-p}+\frac{q-1}{q-p}} = \lambda^{\frac{-p+1+q-1}{q-p}} = \lambda^{\frac{q-p}{q-p}} = \lambda.$$

Damit genügt $v(q)$ der Gleichung:

$$-\Delta_p v(q) = \lambda\, v(q)^{q-1} \tag{2.22}$$

Zudem gilt $v(q) = \left(\frac{\lambda(q)}{\lambda}\right)^{1/(q-p)} u(q) = 0$ auf dem Rand von Ω, da u eine Lösung von (1.1) ist.

Angenommen $\|v(q)\|$ divergiert nicht für $q \to p$. Dies bedeutet, dass $v(q)$ beschränkt ist. Folglich besitzt $v(q)$ für $q \to p$ eine in $W_0^{1,p}(\Omega)$ schwach konvergente Teilfolge mit einem schwachen Grenzwert v_0, der ebenfalls in $W_0^{1,p}(\Omega)$ liegt. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v(q_n) \xrightarrow{q_n \to p} v_0$ schwach konvergent in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Analog zu Schritt 2 im Beweis des Satzes 2.6.1 erhält man, dass $v(q_n) \to v_0$ stark in $W_0^{1,p}(\Omega)$ konvergiert. Hieraus ergibt sich ebenfalls analog (mit $q_0 = p$), dass v_0 positiv und eine schwache Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$\begin{cases} -\Delta_p v_0 = \lambda v_0^{p-1} & \text{für } x \in \Omega, \\ v_0 = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.23}$$

Zu Fall (i): $\lambda < \lambda(p)$ und $q \to p^+$, d.h. insbesondere gilt $q > p$. Nach Satz 2.4.1 ist

$$\lambda(p) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)}$$

der kleinste Eigenwert, welcher eine nicht triviale Lösung von (2.23) ermöglicht. Daher folgt für $\lambda < \lambda(p)$ dass $v_0 = 0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ gelten muss,

$$\Rightarrow v(q) \to 0 \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Insbesondere konvergiert $v(q)$ punktweise gegen die Nullfunktion und es genügt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v(q) < 1$ fast überall in Ω zu betrachten. Für $q > p$, $\lambda < \lambda(p)$, $v(q) < 1$ gilt:

$$-\Delta_p v(q) \overset{(2.22)}{=} \lambda v(q)^{q-1} < \lambda v(q)^{p-1}$$

Da mit $u(p)$ auch $\alpha \cdot u(p)$ eine Lösung von (2.9) ist, kann man $v(q) \leq u(p)$ für genügend kleines $\beta := (q-p) > 0$ annehmen. Dann gilt:

$$-\Delta_p u(p) \overset{(2.9)}{=} \lambda(p)\, u(p)^{p-1} \geq \lambda(p)\, v(q)^{p-1} > \lambda v(q)^{p-1}$$

Zusammengefasst hat man also:

$$v(q) \leq u(p) \quad \text{und}$$
$$-\Delta_p v(q) < \lambda v(q)^{p-1} < -\Delta_p u(p)$$

Hieraus lässt sich ableiten [17], [23], dass ein $\widetilde{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $v(q) \leq \widetilde{u} \leq u(p)$ existiert, so dass $\widetilde{u}$ folgende Gleichung löst:

$$-\Delta_p \widetilde{u} = \lambda\, \widetilde{u}^{\,p-1}$$

Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass $(\lambda(p), u(p))$ die eindeutige Lösung des Randwertproblems (2.9) ist. Damit ergibt sich im Fall (i): $\|v(q)\| \xrightarrow{q \to p} \infty$.

Zu Fall (ii): $\lambda > \lambda(p)$ und $q \to p^-$, d.h. insbesondere $q < p$. Für $p = q$ gilt nach [14] folgendes Lemma: Für $\lambda > \lambda(p)$ gibt es keine positiven Eigenfunktionen mit Eigenwert λ. Mit anderen Worten ist jede positive Eigenfunktion ein Minimierer des Rayleigh-Quotienten. Da hier $\lambda > \lambda(p)$ gilt, muss also $v_0 = 0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ sein, d.h. $v(q)$ konvergiert in $W_0^{1,p}(\Omega)$ gegen die Nullfunktion:

$$\Rightarrow v(q) \xrightarrow{q \to p} 0 \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega) .$$

Insbesondere konvergiert $v(q)$ punktweise gegen die Nullfunktion und es genügt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v(q) < 1$ fast überall in Ω zu betrachten:

$$p > q \quad \Rightarrow \; p - q > 0 \quad \Rightarrow \; v(q)^{p-q} < 1^{p-q} = 1 \quad \Rightarrow \; v(q)^{q-p} > 1$$

Mit $\lambda > \lambda(p)$ bzw. $\frac{\lambda}{\lambda(p)} > 1$ folgt durch Multiplikation beider Ungleichungen

$$\frac{\lambda}{\lambda(p)} v(q)^{p-q} > 1 \quad \Rightarrow \; \lambda v(q)^{p-q} > \lambda(p) \; .$$

Für kleines $\overline{\beta}$ kann man durch Skalierung von u analog zur Argumentation im ersten Fall $v(q) < u(p)$ annehmen.

Zudem gilt folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} 0 \; &\overset{(*)}{\leq} \; \int_\Omega \left(-\Delta_p v(q) \cdot \frac{v(q)^p - u(p)^p}{v(q)^{p-1}} \right) dx \\ &\quad - \int_\Omega \left(-\Delta_p u(p) \cdot \frac{v(q)^p - u(p)^p}{u(p)^{p-1}} \right) dx \\ &\overset{(2.22),(1.1)}{=} \; \int_\Omega \left(\lambda v(q)^{q-1} \cdot \frac{v(q)^p - u(p)^p}{v(q)^{p-1}} \right) dx \\ &\quad - \int_\Omega \left(\lambda(p) u(p)^{p-1} \cdot \frac{v(q)^p - u(p)^p}{u(p)^{p-1}} \right) dx \\ &= \; \int_\Omega \underbrace{\left(\lambda v(q)^{q-p} - \lambda(p) \right)}_{>0} \cdot \underbrace{\left(v(q)^p - u(p)^p \right)}_{<0} dx < 0 \end{aligned}$$

Aus dieser ergibt sich dann auch im Fall (ii) ein Widerspruch:

$$\Rightarrow \|v(q)\| \xrightarrow{q \to p} \infty$$

Zu $(*)$: Definiere $\widetilde{u} := u^p$ und

$$K(\widetilde{u}) := \int_\Omega \left| \nabla (\widetilde{u})^{\frac{1}{p}} \right|^p dx = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx = p \cdot I(u) .$$

Nach Lemma 2.5.4 ist $\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx$ konvex in $|v|^q$ für $q \leq p$. Insbesondere ist $K(\widetilde{u})$ konvex in $\widetilde{u}$. Damit ist $K'(\widetilde{u})$ monoton wachsend und dies impliziert

$$K'(\widetilde{u})(\widetilde{u} - \widetilde{v}) - K'(\widetilde{v})(\widetilde{u} - \widetilde{v}) = \left(K'(\widetilde{u}) - K'(\widetilde{v}) \right)(\widetilde{u} - \widetilde{v}) \geq 0 \; .$$

$K'(\widetilde{u}) \cdot (\widetilde{u} - \widetilde{v})$ ist die erste Variation von K in $\widetilde{u}$ in Richtung $(\widetilde{u} - \widetilde{v})$. Daher berechne ich nun die erste Variation von K in eine beliebige Richtung φ:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} K(\widetilde{u} + t\varphi)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \int_\Omega \left|\nabla (\widetilde{u} + t\varphi)^{\frac{1}{p}}\right|^p dx\Big|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \left|\nabla (\widetilde{u} + t\varphi)^{\frac{1}{p}}\right|^{p-2} \left[\nabla (\widetilde{u} + t\varphi)^{\frac{1}{p}}\right] \nabla \left((\widetilde{u} + t\varphi)^{\frac{1}{p}-1} \varphi\right) dx\Big|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \left|\nabla (\widetilde{u})^{\frac{1}{p}}\right|^{p-2} \cdot \nabla (\widetilde{u})^{\frac{1}{p}} \cdot \nabla \left((\widetilde{u})^{\frac{1-p}{p}} \cdot \varphi\right) dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u \cdot \nabla \left(u^{1-p} \cdot \varphi\right) dx \qquad \text{mit } \widetilde{u} = u^p \\
&= \int_\Omega -\Delta_p u \cdot u^{1-p} \cdot \varphi \, dx
\end{aligned}$$

Analog erhält man für $\widetilde{v}$

$$\frac{d}{dt} K(\widetilde{v} + t\varphi)\Big|_{t=0} = \int_\Omega -\Delta_p v \cdot \frac{1}{v^{p-1}} \cdot \varphi \, dx.$$

Nutzt man nun als Testfunktion $\varphi = (\widetilde{u} - \widetilde{v})$ so ergibt sich (✱):

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left(K'(\widetilde{u}) - K'(\widetilde{v})\right)(\widetilde{u} - \widetilde{v}) \\
&= \int_\Omega \left(-\Delta_p v(q) \cdot \frac{v(q)^p - u(p)^p}{v(q)^{p-1}}\right) dx - \int_\Omega \left(-\Delta_p u(p) \cdot \frac{v(q)^p - u(p)^p}{u(p)^{p-1}}\right) dx
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.7.2: Satz 2.7.1 besagt, dass Lösungen der partiellen Differentialgleichung (2.22) - bzw. skalierte Lösungen von (2.9) - unter der Bedingung (i) oder (ii) im Grenzwert q gegen p divergieren. Sie liegen damit nicht mehr in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

3 Das elliptische Randwertproblem im Minkowski Raum

Nun sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ nicht mehr mit einer Euklidischen Norm sondern mit einer allgemeinen, zweimal stetig differenzierbaren Norm H ausgestattet.

Die Abbildung $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ aus $C^2\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$ genüge daher den Eigenschaften:

1.) H sei nicht negativ: $H(\xi) \geq 0$, für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$ und $H(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$,

2.) H sei positiv homogen vom Grad eins, d.h. es gilt: $H(t\xi) = |t|\, H(\xi)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ und

3.) H genüge der Dreiecksungleichung: $H(\xi + \psi) \leq H(\xi) + H(\psi)$ für alle ψ, $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Bemerkungen 3.0.3: Insbesondere gilt dann:

- H ist konvex, d.h. für alle $t \in (0,1)$, ξ, $\psi \in \mathbb{R}^N$ gilt:
$$H(t\xi + (1-t)\psi) \leq tH(\xi) + (1-t)H(\psi)\,, \text{ denn}$$
$$\begin{aligned} H(t\xi + (1-t)\psi) &\overset{3.)}{\leq} H(t\xi) + H((1-t)\psi) \\ &\overset{2.)}{=} tH(\xi) + (1-t)H(\psi) \end{aligned}$$

- Für linear unabhängige ξ, $\psi \in \mathbb{R}^N$ ist H sogar strikt konvex. Dies liegt daran, dass in der Dreiecksungleichung nur genau dann Gleichheit gilt, wenn die beiden Variablen linear abhängig sind.

- H ist aufgrund von 2.) eine gerade Funktion in ξ: $H(-\xi) = H(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$.

- H nimmt bei $\xi = 0$ ein eindeutiges Minimum an, denn es ist $H(0) = 0$ und $H(\xi \neq 0) > 0$. Da $H \in C^2\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$ gilt somit
$$\frac{d}{d\xi_j} H|_{\xi=0} = 0 \text{ für alle } j = 1, ..., N.$$
Zudem ist die Hessematrix von H an der Stelle $\xi = 0$ positiv definit.

Beispiel: Man stattet den $\mathbb{R}^N$ mit der l_s-Norm aus:

$$H(\xi) = \left(\sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^s \right)^{\frac{1}{s}} \qquad \text{mit } s \in [1, \infty)$$

Für $s = 2$ entspricht dies der Euklidischen Norm und man kann die Ergebnisse aus Kapitel 2 benutzen.

Definition 3.0.4: In einem Vektorraum V heißen zwei Normen $\|\cdot\|_I$ und $\|\cdot\|_{II}$ äquivalent, wenn reelle, positive Konstanten $C, \widetilde{C}$ existieren, so dass für alle $x \in V$ gilt:

$$C\,\|x\|_I \leq \|x\|_{II} \leq \widetilde{C}\,\|x\|_I$$

Satz 3.0.5: Im $\mathbb{R}^N$ ist jede Norm $H(\cdot)$ äquivalent zur Euklidischen Norm $|\cdot| = \|\cdot\|_2$.

Beweis:

A) Zeige, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$H(x) \leq C\,\|x\|_2 \tag{3.1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^N$ gilt. Sei $x \in \mathbb{R}^N$ beliebig und e^j mit $j = 1, ..., N$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^N$, d.h. die k-te Komponente des j-ten Einheitsvektors sei gegeben durch

$$e^j_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{für } k \neq j. \end{cases}$$

In dieser Basis lässt sich x wie folgt darstellen:

$$x = \sum_{j=1}^{N} x_j e^j \qquad \text{wobei } x_j = \left(x, e^j\right) \in \mathbb{R}$$

und $(\cdot\,,\,\cdot)$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^N$ sein soll. Es ist

$$\begin{aligned} H(x) &= H\left(\sum_{j=1}^{N} x_j e^j \right) \overset{3.)}{\leq} \sum_{j=1}^{N} H\left(x_j e^j\right) \\ &\overset{2.)}{=} \sum_{j=1}^{N} |x_j|\, H\left(e^j\right) \overset{(\star)}{\leq} \sqrt{\sum_{j=1}^{N} H\left(e^j\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{N} |x_j|^2} \\ &\leq C\,\|x\|_2 \end{aligned}$$

für ein $C \geq \sqrt{\sum_{j=1}^{N} H(e_j)^2}$. In $(\star)$ wurde die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^N$ benutzt.

B) Zeige, dass eine Konstante $\widetilde{C} > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^N$

$$H(x) \geq \widetilde{C} \|x\|_2 \tag{3.2}$$

gilt. Für $x = 0$ ist dies trivialer Weise erfüllt. Beweise die Behauptung zuerst für alle $x \in \mathbb{R}^N$ mit $\|x\|_2 = 1$. Dann ist zu zeigen, dass eine Konstante $\widetilde{C} \geq 0$ existiert, so dass $H(x) \geq \widetilde{C}$ gilt. Definiere daher die Menge S und die Konstante $\widetilde{C}$ folgender Maßen:

$$S := \left\{x \in R^N \,|\, \|x\|_2 = 1\right\} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{C} := \inf_{x \in S} H(x)$$

Die Teilbehauptung lässt sich leicht durch einen Widerspruchsbeweis zeigen. Angenommen $\widetilde{C} = 0$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ mit $H(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Wegen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ gilt $\|x_n\|_2 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt bezüglich der Euklidischen Norm. Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$, die bezüglich $\|\cdot\|_2$ gegen ein $x \in S$ konvergiert. Also gilt $\|x\|_2 = 1$ und folglich insbesondere $x \neq 0$. Es ist:

$$H(x) = H(x - x_{n_k} + x_{n_k}) \overset{3.)}{\leq} H(x - x_{n_k}) + H(x_{n_k}) \overset{A)}{\leq} C\|x - x_{n_k}\|_2 + H(x_{n_k})$$

Die rechte Seite der Ungleichung konvergiert im Grenzwert $n_k \to \infty$ gegen Null, was $H(x) = 0$ impliziert. Aufgrund von 1.) folgt $x = 0$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu $x \in S$ bzw. $x \neq 0$. $\Rightarrow \widetilde{C} > 0$.

Nun ist die Ungleichung (3.2) für alle $x \in S$ gezeigt. Sei $y \in R^N \setminus \{0\}$ beliebig. Dann ist $x := \frac{y}{\|y\|_2} \in S$ und $y = x \cdot \|y\|_2$. Aus der folgenden Ungleichungskette ergibt sich die Behauptung für jeden Vektor $y \in \mathbb{R}^N$:

$$\widetilde{C}\|y\|_2 = \widetilde{C}\big\|x \cdot \|y\|_2\big\|_2 \overset{2.)}{=} \widetilde{C}\|y\|_2\|x\|_2 \leq \|y\|_2 H(x) \overset{2.)}{=} H(\|y\|_2 \cdot x) = H(y)$$

□

Korollar 3.0.6: Alle Normen auf dem $\mathbb{R}^N$ sind äquivalent.

3.1 Das verallgemeinerte Randwertproblem

Statt des von Herrn Yin Xi Huang betrachteten Funktionals $I(u)$ muss man nun in Gleichung (2.1) den Euklidischen Betrag $|\nabla u|$ durch die allgemeine Norm $H(u)$ ersetzen. Daher betrachte ich das Funktional

$$I_f(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega [H(\nabla u)]^p \, dx \tag{3.3}$$

und minimiere es ebenfalls auf der Menge

$$\Gamma_{f_q} := \Gamma_q = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega |u|^q \, dx = 1\right\}. \tag{3.4}$$

Fügt man die einschränkenden Bedingungen aus Γ_{f_q} mit dem Lagrange-Multiplikator $\lambda_f(q)$ zum Funktional $I_f(u)$ hinzu, so erhält man folgendes Energiefunktional:

$$E_f(u) = \int_\Omega \frac{1}{p} [H(\nabla u(x))]^p - \frac{\lambda_f(q)}{q} |u(x)|^q \, dx \tag{3.5}$$

Dabei ist wie zuvor $p \in (1, \infty)$, $\lambda_f(q) \in \mathbb{R}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Zudem gilt $u = 0$ für alle $x \in \partial\Omega$.

Um die entsprechende Euler-Lagrange-Gleichung zu erhalten, muss man die erste Variation in eine beliebige Richtung $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gleich Null setzen:

$$0 \overset{!}{=} \delta E_f(u, v) \quad \text{für alle } v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Sei also $v \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \frac{d}{dt} E_f(u + tv) \bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \int_\Omega \left(\frac{1}{p} [H(\nabla u + t\nabla v)]^p - \frac{\lambda_f(q)}{q} |u + tv|^q \right) dx \bigg|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^N \underbrace{[H(\nabla u)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u)}_{(*)} \frac{\partial v}{\partial x_k} - \lambda_f(q) |u|^{q-2} u \cdot v \right) dx, \quad \text{mit } \xi_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Dies ist zunächst die schwache Form der Euler-Lagrange-Gleichung. Da $H \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ ist, ist der Ausdruck in $(*)$ für genügend glattes u differenzierbar und man kann diesen partiell integrieren. Mit $u(x) = 0$ für alle $x \in \partial\Omega$ erhält man:

$$0 \overset{!}{=} \int_\Omega \left(-\sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ [H(\nabla u)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u) \right\} v - \lambda_f(q) |u|^{q-2} u \cdot v \right) dx$$

Durch Verwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechung bekommt man die starke Form der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$-\sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ [H(\nabla u)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u) \right\} = \lambda_f(q) |u|^{q-2} u \tag{3.6}$$

Bemerkung 3.1.1: Der zweite Teil des Energiefunktionals ist von der Struktur her identisch zu dem aus Kapitel 1 (siehe Formel (1.2)). Somit sind auch die rechten Seiten der Euler-Lagrange-Gleichungen (3.6) und (1.1) von der Struktur her gleich.

Definition 3.1.2:

$$Qu(x) := \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ [H(\nabla u(x))]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u(x)) \right\} \quad \text{mit } \xi_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}. \tag{3.7}$$

Im Folgenden bezeichne ich den Operator, der durch Gleichung (3.7) definiert ist, als **Q-Laplace Operator**.

Das zu (1.1) verallgemeinerte Randwertproblem lautet damit:

$$\begin{cases} -Qu = \lambda_f(q)\,|u|^{q-2}u & \text{für } x \in \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

Bemerkung 3.1.3: Der Q-Laplace Operator ist eine Verallgemeinerung des p-Laplace Operators, in dem Sinne, dass die Norm im $\mathbb{R}^N$ nicht zwangsläufig die Euklidische sein muss. Im Fall der Euklidischen Norm, d.h.

$$H(\xi) = \left(\sum_{k=1}^{N} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\xi\|_2 = |\xi|$$

gilt nämlich:

$$\begin{aligned} Qu(x) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{[H(\nabla u(x))]^{p-1}\frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u(x))\right\}, \quad \text{mit } \xi_k = \frac{\partial u}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{|\nabla u(x)|^{p-1}\frac{1}{|\nabla u(x)|}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{|\nabla u(x)|^{p-2}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right\} \\ &= \operatorname{div}\left(|\nabla u(x)|^{p-2}\,\nabla u(x)\right) = \Delta_p u \end{aligned}$$

Beispiel:

$$H(\xi) = \left(\sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

Durch direkte Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung aus dem speziellen Energiefunktional

$$E_f(u) = \int_\Omega \frac{1}{p}\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right|^s\right)^{\frac{p}{s}} - \frac{\lambda_f(q)}{q}\,|u(x)|^q\,dx$$

oder auch mittels Verwendung der allgemeinen Formel (3.7) für $Q(u)$ erhält man für die spezielle Wahl von $H(\xi)$ den folgenden Q-Laplace Operator:

$$\begin{aligned}
Qu(x) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^s \right)^{\frac{p-1}{s}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^s \right)^{\frac{p-1}{s}} \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^s \right)^{\frac{1}{s}-1} s \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{s-1} \frac{\frac{\partial u}{\partial x_k}}{\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^s \right)^{\frac{p-s}{s}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{s-2} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

An diesem Beispiel erkennt man erneut, dass im Fall der Euklidischen Norm ($s = 2$) der Q-Laplace Operator in den p-Laplace Operator übergeht, also $Qu = \Delta_p u$ gilt.

Definition 3.1.4: Der Pseudo-p-Laplace Operator ist definiert durch

$$\widetilde{\Delta}_p u = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right).$$

An (3.9) sieht man, dass der Pseudo-p-Laplace Operator ebenfalls als Spezialfall im Q-Laplace Operator $s = p$ enthalten ist.

Bemerkung 3.1.5: Da $Q(-u) = -Q(u)$ gilt, ist mit u auch $-u$ eine Lösung des Randwertproblems (3.8).

Sei $u \in \Gamma_{f_q}$ ein Minimierer des Funktionals (3.3), d.h. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\int_\Omega |u|^q \, dx = 1$ und u löst $-Qu = \lambda_f(q) |u|^{q-2} u$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Betrachte die skalierte Funktion $v = \alpha u$:

$$\begin{aligned}
-Qv &= -Q(\alpha u) \\
&= -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ [H(\nabla(\alpha u))]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k^\alpha} (\nabla(\alpha u)) \right\}, \text{ mit } \xi_k^\alpha = \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x_k} \\
&= -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \alpha^{p-1} [H(\nabla u(x))]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k} (\nabla u(x)) \right\} \\
&= -\alpha^{p-1} Qu = \alpha^{p-1} \lambda_f(q) |u|^{q-2} u \\
&= \alpha^{p-q} \lambda_f(q) |v|^{q-2} v \\
&=: \widetilde{\lambda}_f(q) |v|^{q-2} v
\end{aligned}$$

Damit löst die skalierte Funktion v ein von der Struktur her gleiches Randwertproblem wie (3.8), jedoch mit einem skalierten $\widetilde{\lambda}_f(q) = \alpha^{p-q} \cdot \lambda_f(q)$. Somit gilt analog zu Bemerkung 2.1.4, dass für $q \leq p$ die Bedingung $\|u\|_q = 1$ keine wesentliche Zusatzvoraussetzung darstellt.

Bemerkung 3.1.6: Aus obiger Rechnung ist ersichtlich, dass der Q-Laplace Operator homogen vom Grad $p-1$ ist, d.h. für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ genügt er der Gleichung

$$Q(\alpha) = \alpha^{p-1} Q(u). \tag{3.10}$$

3.2 Positivität der ersten Eigenfunktion

Definition 3.2.1: Eine Funktion $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$ heißt **Eigenfunktion** zur partiellen Differentialgleichung (3.8), falls

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{N} [H(\nabla u)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u) \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) dx = \lambda_f(q) \int_\Omega |u|^{q-2} u \cdot \phi \, dx \tag{3.11}$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt. Hierbei ist $\xi_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$. $\lambda_f(q) \in \mathbb{R}$ heißt **Eigenwert**.

Aufgrund der Regularitätstheorie [20] weiß man, dass schwache Lösungen von (3.11) in $C^{1,\alpha}(\Omega)$ liegen. Sie sind damit insbesondere stetig. Es lässt sich beim verallgemeinerten Randwertproblem (analog zu Kapitel 2) folgendes Lemma zeigen:

Lemma 3.2.2: Die erste Eigenfunktion zu (3.8), die dem ersten Eigenwert entspricht, wechselt ihr Vorzeichen nicht.

Beweis: An (3.5) erkennt man, dass sich die Energie $E_f(u)$ des Systems unter der Transformation $u \to -u$ nicht ändert. Setzt man wieder $v = |u|$ so gilt mit $u, -u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ auch $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Zudem zeigt man wie zuvor $v \in \Gamma_{f_q}$. Damit ist v eine zur Minimierung des Funktionals (3.3) zulässige Funktion. Es gilt also: Minimiert u die Energie, so auch $-u$ und v. Angenommen v würde im Inneren von Ω Null werden, also sein Minimum annehmen, so müsste entsprechend des starken Minimumprinzips [11] $v \equiv 0$ sein. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass v eine Eigenfunktion sein soll bzw. dass $\int_\Omega |v|^q \, dx = 1$ gelten soll.

$$\Rightarrow v > 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega \quad \Rightarrow |u| > 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega.$$

Damit ist die Behauptung, dass die erste Eigenfunktion ihr Vorzeichen nicht wechselt, bewiesen. □

Bemerkung 3.2.3: Da mit u auch $-u$ eine erste Eigenfunktion ist, genügt es positive Lösungen zu betrachten. Für $u > 0$ lautet (3.8):

$$\begin{cases} -Qu = \lambda(q)\, u(q)^{q-1} & \text{für } x \in \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.12}$$

Ein positiver Minimierer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ des Energiefunktionals (3.5) muss damit Gleichung (3.12) erfüllen.

3.3 Existenz des Rayleigh-Quotienten

Es lässt sich ein verallgemeinerter Rayleigh-Quotient für das Randwertproblem (3.8) definieren:

Definition 3.3.1:

$$\lambda_f(q) := \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega [H(\nabla u)]^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u|^q \, dx\right)^{p/q}} \tag{3.13}$$

Satz 3.3.2: Es existiert ein $\lambda_f(q) > 0$ und ein $u(q) \in \Gamma_{f_q}$, $u(q) > 0$, welches das verallgemeinerte Randwertproblem (3.8) mit $\lambda_f(q)$ als Rayleigh-Quotient (3.13) löst.

Dieser Satz ist völlig analog zum Satz 2.4.1. Der Beweis lässt sich ähnlich durchführen. Zunächst ist es jedoch nützlich folgendes Lemma zu beweisen:

Lemma 3.3.3: Sei v eine positive Funktion und $q \leq p$. Unter diesen Annahmen ist das Funktional $J_f(v) = \int_\Omega [H(\nabla v)]^p \, dx$ konvex in v^q.

Beweis: Sei also $v \geq 0$ und $q \leq p$. Setzt man $w = v^q$, so folgt:

$$\begin{aligned} \nabla w &= q \cdot v^{q-1} \cdot \nabla v \\ \nabla v &= \frac{1}{q} \cdot v^{1-q} \cdot \nabla w = \frac{1}{q} \cdot w^{\frac{1-q}{q}} \cdot \nabla w, \end{aligned}$$

woraus man dann $[H(\nabla v)]^p$ als Funktion von w bekommt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow [H(\nabla v)]^p &= \left[H\left(\frac{1}{q} \cdot w^{\frac{1-q}{q}} \cdot \nabla w \right) \right]^p \\ &\overset{2.)}{=} q^{-p} \cdot w^{\frac{p}{q}(1-q)} [H(\nabla w)]^p =: g(w) \end{aligned}$$

Man muss daher die Konvexität der Abbildung $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $w \mapsto g(w)$ in w zeigen, d.h. zu zeigen ist, dass für $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in (0,1)$ folgende Ungleichung gilt:

$$g(\alpha w_1 + (1-\alpha) w_2) \leq \alpha g(w_1) + (1-\alpha) g(w_2)$$

Substituiert man $z = \frac{\nabla w}{q}$ so ist es äquivalent zu zeigen, dass die Funktion

$$k_f(w,z) := w^{p\left(1-\frac{1}{q}\right)} [H(z)]^p \quad \text{ in } (w,z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$$

konvex ist. Sei nun $\alpha \in (0,1)$ und $(w_i, z_i) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$, $i = 1, 2$. Da H konvex ist gilt

$$H(\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2) \leq \alpha H(z_1) + (1-\alpha) H(z_2). \tag{3.14}$$

Aus dem Beweis des Lemmas 2.5.4 weiß man, dass

$$h\,(w,y) = w^{p\left(1-\frac{1}{q}\right)} y^p \quad \text{in } (w,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$$

konvex und monoton wachsend in y ist. Damit ergibt sich folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
& k_f\big(\alpha w_1 + (1-\alpha)\,w_2, \alpha z_1 + (1-\alpha)\,z_2\big) \\
= \quad & h\big(\alpha w_1 + (1-\alpha)\,w_2, H\,(\alpha z_1 + (1-\alpha)\,z_2)\big) \\
\overset{(3.14)}{\leq} \quad & h\big(\alpha w_1 + (1-\alpha)\,w_2, \alpha H\,(z_1) + (1-\alpha)\,H\,(z_2)\big) \\
\leq \quad & \alpha \cdot h\,(w_1, H\,(z_1)) + (1-\alpha)\,\cdot h\,(w_2, H\,(z_2)) \\
= \quad & \alpha \cdot k_f\,(w_1, z_1) + (1-\alpha)\,\cdot k_f\,(w_2, z_2)
\end{aligned}$$

□

Beweis des Satzes 3.3.2: Es sind wieder die drei Eigenschaften zu zeigen:

(i) Das Infimum existiert, d.h. es existiert eine Funktion u bei der $\lambda_f\,(q)$ sein Minimum annimmt.

(ii) Das Minimum ist größer als Null.

(iii) Die Funktion, bei der das Minimum angenommen wird, ist eine Lösung des Randwertproblems (3.8).

Zu (i): Definiere die Funktion $B_{f_q}\,(u)$ folgender Maßen:

$$\lambda_f(q) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega [H\,(\nabla u)]^p\,dx}{\left(\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{p/q}} =: \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} B_{f_q}\,(u)$$

Ziel ist es $B_{f_q}\,(u)$ auf der Menge $\widetilde{A}_f := \widetilde{A} = \left\{ u \mid u \in W_0^{1,p}\,(\Omega)\,,\, u \neq 0 \right\}$ zu minimieren. Dies ist äquivalent dazu das Funktional $Z_f\,(u)$ auf der Menge

$$A_f := A = \left\{ u \,\middle|\, u \in W_0^{1,p}\,(\Omega)\,,\, \int_\Omega |u|^q\,dx = 1 \right\}$$

zu minimieren. Hierbei ist $B_{f_q}\,(u) := \frac{Z_f(u)}{N_{f_q}(u)}$, wobei $Z_f\,(u) := \int_\Omega [H\,(\nabla u)]^p\,dx$ der Zähler und $N_{f_q}\,(u) := N_q\,(u) = \left(\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{p/q}$ der Nenner des Bruches $B_{f_q}\,(u)$ ist.

Um (i) zu beweisen, muss man daher zeigen, dass $\min_{u \in A_f} Z_f\,(u)$ existiert. Per Definition ist $\lambda_f\,(q)$ nicht negativ. Ebenso ist $Z_f\,(u) \geq 0$ und damit nach unten beschränkt. Folglich existiert eine Minimalfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_f$ mit

$$\lim_{n\to\infty} Z_f(u_n) = \inf_{u\in A_f} Z_f(u) \geq 0.$$

Da $Z_f(u_n)$ konvergiert, ist es durch eine Konstante K nach oben beschränkt:

$$\begin{aligned} K &\geq Z_f(u_n) = \int_\Omega [H(\nabla u_n)]^p \, dx \\ &\overset{(3.2)}{\geq} \int_\Omega \left(\widetilde{C}\,|\nabla u_n|\right)^p dx = \widetilde{C}^p \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx \\ &= \widetilde{C}^p \, \||\nabla u_n|\|_p^p \overset{(2.4)}{\geq} \widetilde{C}^p \cdot C^p \, \|u_n\|_p^p \end{aligned}$$

Damit sind die L^p-Normen von u_n und ∇u_n beschränkt.

$$\Rightarrow u_n \text{ ist beschränkt in } W_0^{1,p}(\Omega)$$

Da $W_0^{1,p}(\Omega)$ für $p \in (1,\infty)$ reflexiv ist, existiert eine Teilfolge $(u_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ und ein $\widetilde{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit:

$$u_{n_k} \xrightharpoonup{n_k\to\infty} \widetilde{u} \ \text{ schwach in } W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{(siehe [24])}$$

Dies impliziert insbesondere: $u_{n_k} \xrightharpoonup{n_k\to\infty} \widetilde{u}$ schwach in $L^p(\Omega)$. Dass $\widetilde{u} \in A_f$ gilt, zeigt man auf identische Weise wie im Beweis des Satzes 2.4.1.

Zeige nun, dass $\widetilde{u}$ ein Minimierer von $Z_f(u)$ auf der Menge A_f ist. Nutze hierzu, dass das Funktional $Z_f(u) = \int_\Omega [H(\nabla u)]^p \, dx$ folgende Eigenschaften erfüllt:

- ➢ $Z_f(u)$ ist als Verkettung stetiger Funktionen stetig in u.
- ➢ $Z_f(u)$ ist nach Lemma 3.3.3 konvex.

Aus den beiden Eigenschaften folgt, dass $Z_f(u)$ schwach unterhalbstetig ist. Da $u_{n_k} \xrightharpoonup{n_k\to\infty} \widetilde{u}$ schwach in $W_0^{1,p}(\Omega)$ konvergiert, gilt $Z_f(\widetilde{u}) \leq \liminf_{n_k\to\infty} Z_f(u_{n_k})$. Mit der Ungleichungskette

$$\inf_{u\in A_f} Z_f(u) \leq Z_f(\widetilde{u}) \leq \liminf_{n_k\to\infty} Z_f(u_{n_k}) = \inf_{u\in A_f} Z_f(u)$$

erhält man, dass $Z_f(\widetilde{u}) = \inf_{u\in A_f} Z_f(u)$ und somit $\widetilde{u}$ ein Minimierer von $Z_f(u)$ auf der Menge A_f darstellt.

Zu (ii): Es gilt $Z_f(u) > 0$. Denn angenommen $Z_f(u) = 0$, dann ist $H(\nabla u) = 0$ fast überall in Ω. Da H eine Norm ist, impliziert dies, dass $\nabla u = 0$ fast überall in Ω gilt und mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ folgt $u = 0$ fast überall in Ω. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $u \in A_f$.

Da $Z_f(u) > 0$ und $N_{f_q}(u) = 1$ für $u \in A_f$ gilt, ist $B_{f_q}(u)$ für einen Minimierer u positiv. Damit ist $\lambda_f(q) > 0$.

Zu (iii): Für einen Minimierer u von $B_{f_q}(u)$ muss $\delta B_{f_q}(u,v) = 0$ für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gelten. Dies ist aufgrund der Quotientenregel äquivalent zu:

$$\begin{aligned} N_{f_q}(u)\,\delta Z_f(u,v) - Z_f(u)\,\delta N_{f_q}(u,v) = 0 \qquad & \text{für alle } v \in C_0^\infty(\Omega) \\ \Leftrightarrow \quad \delta Z_f(u,v) = B_{f_q}(u)\,\delta N_{f_q}(u,v) \qquad & \text{für alle } v \in C_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \delta Z_f(u,v) &= \frac{d}{dt}\left\{Z_f(u+tv)\right\}\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega [H(\nabla u + t\cdot\nabla v)]^p\,dx\right\}\Bigg|_{t=0} \\ &= \int_\Omega \sum_{k=1}^N p\cdot [H(\nabla u)]^{p-1}\cdot\frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u)\cdot\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\,dx \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \delta N_q(u,v) &= \frac{d}{dt}\left\{N_q(u+tv)\right\}\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |u+tv|^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}}\Bigg|_{t=0} \\ &= \frac{p}{q}\left(\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}-1}\cdot q\int_\Omega |u|^{q-2}\,u\cdot v\,dx. \end{aligned}$$

Für einen Minimierer $u \in \Gamma_q$ von $B_q(u)$ gilt $\lambda_f(q) = B_{f_q}(u)$. Mit

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^N [H(\nabla u)]^{p-1}\cdot\frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u)\cdot\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\,dx = \lambda_f(q)\int_\Omega |u|^{q-2}\,u\cdot v\,dx$$

folgt, dass u eine schwache Lösung der Gleichung

$$-Qu = \lambda_f(q)\,|u|^{q-2}\,u$$

ist, was (iii) nachweist.

□

3.4 Eindeutigkeit der Lösung für $q \leq p$

Lemma 3.4.1: $\lambda_f(q)$ ist beschränkt, falls q aus einer beschränkten Menge ist.

Beweis: Sei q aus einer beschränkten Menge, dann ist nach Lemma 2.5.1 $\lambda(q)$ beschränkt. Zudem gilt

$$\int_\Omega [H(\nabla u)]^p \, dx \overset{(3.1)}{\leq} C^p \cdot \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$$

Dies impliziert:

$$\begin{aligned}
\lambda_f(q) &= \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega [H(\nabla u)]^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u|^q \, dx\right)^{p/q}} \\
&\leq \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} C^p \cdot \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u|^q \, dx\right)^{p/q}} \\
&= C^p \cdot \lambda_f(q) \quad < \infty
\end{aligned}$$

□

Satz 3.4.2: Für $q = p$ ist die positive Lösung von (3.8) eindeutig.

Bemerkung 3.4.3: Für $q = p$ hat man folgenden Spezialfall:

$$\begin{cases} -Qu = \lambda_f(p)\, u^{p-1} & \text{für } x \in \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

Hierbei sieht man sofort oder an (3.10), dass mit u auch αu für jedes $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Lösung des Randwertproblems ist. (3.15) ist die Euler-Lagrange-Gleichung des speziellen Minimierungsproblems: Minimiere

$$J_f(v) := p \cdot I_f(v) = \int_\Omega [H(\nabla v)]^p \, dx \tag{3.16}$$

auf der Menge $\Gamma_{f_p} := \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1 \right\}$.

Beweis des Satzes 3.4.2:
Analog zum Beweis des Satzes 2.5.2 nehme ich an, dass es zwei positive Minimierer u und z des Funktionals (3.16) gibt, wobei $u, z \in \Gamma_{f_q}$ gilt.

Wie in [4] definiere ich für $t \in (0,1)$ die Funktionen $\eta := t \cdot u^p + (1-t)\, z^p$ und $w := \eta^{1/p}$. Dann ist w ebenfalls eine zur Minimierung zulässige Funktion, denn es gilt:

$$\int_\Omega w^p dx = t \cdot \int_\Omega u^p dx + (1-t) \cdot \int_\Omega z^p dx = t + 1 - t = 1$$

$\Rightarrow w \in \Gamma_{f_p}$. Berechne nun $J(w)$. Betrachte dazu:

$$\begin{aligned}
\nabla w &= \nabla \left(\eta^{\frac{1}{p}} \right) \\
&= \frac{1}{p} \eta^{\frac{1}{p}-1} \left(t \cdot p\, u^{p-1} \nabla u + (1-t) \cdot p\, z^{p-1} \nabla z \right) \\
&= \eta^{\frac{1}{p}} \left(\frac{t \cdot u^p}{\eta} \cdot \frac{\nabla u}{u} + \frac{(1-t) \cdot z^p}{\eta} \cdot \frac{\nabla z}{z} \right)
\end{aligned}$$

Da $\eta \geq 0$ und H positiv homogen vom Grad eins ist, gilt:

$$H(\nabla w) = \eta^{\frac{1}{p}} H\left(\frac{t \cdot u^p}{\eta} \cdot \frac{\nabla u}{u} + \frac{(1-t) \cdot z^p}{\eta} \cdot \frac{\nabla z}{z}\right)$$

Definiere $s(x) := \frac{t \cdot u^p}{\eta}$. Offensichtlich ist $s(x)$ positiv. Zudem gilt:

$$[s(x)]^{-1} = \frac{t \cdot u^p + (1-t) \cdot z^p}{t \cdot u^p} = 1 + \frac{1-t}{t} \cdot \frac{z^p}{u^p} > 1$$

$$\Rightarrow s(x) \in (0,1) \quad \text{und} \quad (1 - s(x)) = 1 - \frac{t \cdot u^p}{\eta} = \frac{(1-t)\, z^p}{\eta}$$

Damit ergibt sich

$$H(\nabla w) = \eta^{\frac{1}{p}} H\left(s(x) \cdot \frac{\nabla u}{u} + (1 - s(x)) \cdot \frac{\nabla z}{z}\right).$$

Nach Lemma 3.3.3 ist das Funktional $J_f(v)$ insbesondere konvex in v^p. Wendet man zunächst die Konvextität und anschließend die Homogenität von H an, so erhält man:

$$\begin{aligned}
[H(w)]^p &= \eta \left[H\left(s(x) \cdot \frac{\nabla u}{u} + (1 - s(x)) \cdot \frac{\nabla z}{z}\right)\right]^p \\
&\leq \eta \left(s(x)\left[H\left(\frac{\nabla u}{u}\right)\right]^p + (1 - s(x))\left[H\left(\frac{\nabla z}{z}\right)\right]^p\right) \\
&= t \cdot u^p \left[H\left(\frac{\nabla u}{u}\right)\right]^p + (1-t) \cdot z^p \left[H\left(\frac{\nabla z}{z}\right)\right]^p \\
&= t \cdot [H(\nabla u)]^p + (1-t) \cdot [H(\nabla z)]^p
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Nach Annahme minimieren u und z das Funktional $J_f(v)$, d.h. es gilt:

$$\int_\Omega [H(\nabla u)]^p \, dx = \int_\Omega [H(\nabla z)]^p \, dx = \lambda_f(p)$$

Hiermit folgt, dass auch w das Funktional $J_f(v)$ minimieren muss, denn es ist:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [H(\nabla w)]^p \, dx &\leq t \cdot \int_\Omega [H(\nabla u)]^p \, dx + (1-t) \cdot \int_\Omega [H(\nabla z)]^p \, dx \\
&= t \cdot \lambda_f(q) + (1-t) \cdot \lambda_f(q) \\
&= \lambda_f(q)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Dies bedeutet, dass in (3.17) bzw. in (3.18) Gleichheit gelten muss. Beide Funktionen sind aus $\Gamma_{f_p} = \Gamma_p$ und deshalb bezüglich der L^p -Norm normiert. Dementsprechend folgt wie im Beweis des Satzes 2.5.2 $u = z$ in $L^p(\Omega)$. Im Falle $p = q$ ist damit die Eindeutigkeit bewiesen.

□

Lemma 3.4.4: Seien $a, b \in \mathbb{R}^N$ und $a \neq b$ Dann gilt:

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{N} \left\{ [H(a)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial a_k}(a) - [H(b)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial b_k}(b) \right\} \cdot (a_k - b_k) \right) dx > 0$$

Beweis: Sei $t \in \mathbb{R}^N$. Die Funktion

$$f(t) := [H(t)]^p$$

ist strikt konvex in t. Daher ist

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\left. \frac{\partial f(t)}{\partial t_k} \right|_{t=a} - \left. \frac{\partial f(t)}{\partial t_k} \right|_{t=b} \right) \cdot (a_k - b_k) > 0$$

für $a \neq b$. Es ist:

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t_k} = p \cdot [H(t)]^{p-1} \cdot \frac{\partial H(t)}{\partial t_k}$$

Somit ergibt sich nach Integration über Ω und mit der abgekürzten Schreibweise

$$\left. \frac{\partial H(t)}{\partial t_k} \right|_{t=x} = \frac{\partial H}{\partial x_k}(x) \qquad \text{für } x = a, b$$

die Behauptung. □

Satz 3.4.5: Für $\lambda_f > \lambda_f(p)$ gibt es keine positiven Eigenfunktionen von (3.8) mit Eigenwert λ_f. Mit anderen Worten ist jede positive Eigenfunktion von (3.8) ein Minimierer des Rayleigh-Quotienten.

Beweis durch Widerspruch: Sei $\lambda_f > \lambda_f(p)$. Angenommen es existiert eine positive Eigenfunktion v von (3.8) mit Eigenwert λ_f. Sei v_p die entsprechende Eigenfunktion zu $\lambda_f(q)$. Dann ist v_p insbesondere stetig und $v_p = 0$ auf $\partial\Omega$. Da v positiv ist, lässt sich v_p durch Multiplikation mit einer genügend kleinen Konstante so skalieren, dass

$$v_p(x) \leq v(x) \text{ für alle } x \in \Omega$$

gilt. Definiere

$$\kappa := \left(\frac{\lambda_f(p)}{\lambda_f} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Es ist $0 < \kappa < 1$. Sei ϕ eine positive Testfunktion, dann gilt mit $\rho = \nabla v_p$ und $\psi = \nabla(\kappa v)$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^N [H(\nabla v_p)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \rho_k}(\nabla v_p) \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) dx & \\
&= \lambda_f(p) \int_\Omega v_p^{p-1} \phi \, dx \\
&\leq \lambda_f(p) \int_\Omega v^{p-1} \phi \, dx \\
&= \lambda_f \int_\Omega (\kappa v)^{p-1} \phi \, dx \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^N [H(\nabla(\kappa v))]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \psi_k}(\nabla(\kappa v)) \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^N \left\{ [H(\nabla v_p)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \rho_k}(\nabla v_p) - [H(\nabla(\kappa v))]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \psi_k}(\nabla(\kappa v)) \right\} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) dx \leq 0$$

Wähle nun als Testfunktion $\phi = (v_p - \kappa v)_+$. Dann ergibt sich:

$$\int_{v_p \geq \kappa v} \sum_{k=1}^N \left\{ [H(\nabla v_p)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \rho_k}(\nabla v_p) - [H(\kappa \nabla v)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \psi_k}(\kappa \nabla v) \right\} \frac{\partial (v_p - \kappa v)}{\partial x_k} dx \leq 0$$

Nach Lemma 3.4.4 gilt jedoch mit $\nabla v_p = a$ und $\nabla(\kappa v) = b$, dass dieser Ausdruck für $\nabla v_p \neq \kappa v$ positiv ist. Folglich ist $(v_p - \kappa v)_+ = 0$, was bedeutet, dass $\nabla v_p \leq \kappa v$ gilt.

Zusammengefasst heißt das: Aus $v_p \leq v$ folgt $-Qv_p \leq -Q(\kappa v)$ und dies impliziert $v_p \leq \kappa v$. Wiederholt man nun das Argument für κv anstelle von v so erhält man $v_p \leq \kappa^2 v$. Für den $j - ten$ Schritt ergibt sich daher

$$0 \leq v_p \leq \kappa^j v.$$

Die rechte Seite konvergiert für $j \to \infty$ gegen Null, woraus $v_p \equiv 0$ folgt. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass v_p eine positive Eigenfunktion ist. □

Satz 3.4.6: Positive (schwache) Lösungen von

$$\begin{cases} Qu + f(x,u) = 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.19}$$

sind eindeutig vorausgesetzt $f : \Omega \times [0,\infty)$ genügt den Bedingungen:

1. Die Abbildung $r^{1-p} f(x,r)$ ist streng monoton fallend in $r \in [0,\infty)$.

2. Es existiert eine positive Konstante C, so dass $f(x,r) \leq C\left(r^{p-1} + 1\right)$ für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $r \in [0,\infty)$ gilt.

Beweis: Lösungen von (3.19) sind kritische Punkte des Funktionals

$$H(v) := \int_\Omega \left\{ \frac{1}{p} [H(\nabla v)]^p - F(x,v) \right\} dx$$

mit $F(x,v) := \int_0^v f(x,|s|)\, ds$. Aufgrund von 2. ist H auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ wohldefiniert. Zudem ist H per Konstruktion ein gerades Funktional in v, d.h. es gilt $H(v) = H(-v)$. Der erste Teil ist nach Lemma 3.3.3 konvex in v^p. Der zweite Teil $-\int_\Omega F(x,v)\ dx$ ist sogar strikt konvex in v^p. Denn mit $w := v^p$ gilt

$$F(x,w) = \int_0^{w^{\frac{1}{p}}} f(x,|x|)\, ds.$$

Differenziert man diesen Ausdruck nach w so erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial w} = f\left(x, w^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \frac{1}{p} w^{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{p} \cdot f(x,v) \cdot v^{1-p}.$$

Dies ist aufgrund von 1. strikt monoton fallend in v. Somit ist $-\frac{\partial F}{\partial v^p}$ strikt monoton wachsend in v, was die strikte Konvexität von $-\int_\Omega F(x,v)\ dx$ in v^p beweist. Zusammengenommen impliziert dies, dass das Funktional H maximal einen kritischen Punkt haben kann. □

Mit Hilfe des Satzes 3.4.6 lässt sich nun Folgendes beweisen:

Satz 3.4.7: Für $q < p$ ist die positive Lösung des folgenden Randwertproblems eindeutig:

$$\begin{cases} -Qu = \lambda_f(q)\,|u|^{q-2}u & \text{für } x \in \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Beweis: Hier ist $f(x,u) = \lambda_f(q)\,u(x)^{q-1}$. Dass dieses f den Bedingungen 1. und 2. genügt wurde bereits im Beweis des Satzes 2.5.2 gezeigt. Damit ist die Eindeutigkeit im Fall $q < p$ ebenfalls bewiesen. □

Bemerkung 3.4.8: Aus den Sätzen 3.4.2 und 3.4.7 folgt, wie in der Überschrift dieses Abschnittes angedeutet, die Eindeutigkeit der Lösung von (3.8) für $q \leq p$.

3.5 Konvergenzverhalten im allgemeineren Fall

Satz 3.5.1: Sei $q < p^*$. Da $p < p^*$ gilt, gibt es für q zwei mögliche Fälle:

(a) Für $q \to q_0 < p$ gilt: $\lambda_f(q) \to \lambda_f(q_0)$ und $u(q) \to u(q_0)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dies bedeutet, dass $\lambda_f(q)$ und $u(q)$ stetig in q sind, falls $q < p$ ist.

(b) Für $q \to q_0 > p$ gibt es (λ_{f_0}, u_0), so dass $(\lambda_f(q), u(q)) \to (\lambda_{f_0}, u_0)$, mit $\lambda_0 \geq \lambda(q_0)$, $u_0 > 0$ und (λ_{f_0}, u_0) eine Lösung von (3.8) ist. Dies bedeutet insbesondere, dass $\lambda_f(q)$ in q oberhalbstetig für $q > p$ ist.

Lemma 3.5.2: Es gilt die folgende Identität:

$$H(\xi) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\xi)\, \xi_k \tag{3.20}$$

Hierbei ist $\xi = \nabla u$.

Beweis: Da H positiv homogen vom Grad eins ist, gilt insbesondere

$$H(t\xi) = tH(\xi) \qquad \text{für alle positiven, reellen } t \text{ und für alle } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Differenziert man diese Gleichung bezüglich t und wertet sie anschließend bei $t = 1$ aus, so erhält man einerseits

$$\frac{d}{dt}\big(H(t\xi)\big)\Big|_{t=1} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial (t\xi_k)}(t\xi) \cdot \frac{\partial (t\xi_k)}{\partial t}\Big|_{t=1} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\xi) \cdot \xi_k$$

und andererseits

$$\frac{d}{dt}\big(tH(\xi)\big)\Big|_{t=1} = H(\xi).$$

Zusammen ergibt sich die Behauptung. □

Lemma 3.5.3: Sei $u(q)$ eine Lösung des Randwertproblems (3.8) mit beschränktem q, dann ist $u(q)$ bezüglich der $W^{1,p}$-Norm beschränkt in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \|u(q)\|^p &= \left(\int_\Omega |u|^p + |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p} \cdot p} \\ &\overset{(3.2)}{\leq} \|u(q)\|_p^p + \frac{1}{\widetilde{C}^p} \int_\Omega [H(\nabla u)]^p \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ \||\nabla u(q)\||_p^p &\leq \frac{1}{\widetilde{C}^p}\int_\Omega [H(\nabla u)]^p \, dx \\
&= \frac{1}{\widetilde{C}^p}\int_\Omega [H(\nabla u)]^{p-1} \cdot H(\nabla u) \, dx \\
&\overset{(3.20)}{=} \frac{1}{\widetilde{C}^p}\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^N [H(\nabla u)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) dx \\
&\overset{(3.11)}{=} \frac{1}{\widetilde{C}^p} \cdot \lambda_f(q) \int_\Omega |u|^{q-2} u \cdot u \, dx \\
&= \frac{1}{\widetilde{C}^p} \cdot \lambda_f(q) \, \|u(q)\|_q^q
\end{aligned}$$

Da $u \in \Gamma_{f_q}$, ist $\|u\|_q^q = 1$ und damit

$$\||\nabla u(q)\||_p^p \leq \frac{1}{\widetilde{C}^p} \cdot \lambda_f(q). \tag{3.21}$$

Ist q beschränkt, so folgt aus Lemma (3.4.1), dass $\lambda_f(q)$ beschränkt ist und man erhält, dass $u(q)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{\nabla,p}$ beschränkt ist. Dass $u(q)$ beschränkt in $W_0^{1,p}(\Omega)$ bezüglich der $W^{1,p}$-Norm ist, beweist man wie in Kapitel 2 mit folgender Ungleichungskette

$$\|u(q)\|^p = \|u(q)\|_p^p + \||\nabla u(q)\||_p^p \overset{(2.4)}{\leq} (C^p+1)\||\nabla u(q)\||_p^p \overset{(3.21)}{=} (C^p+1)\lambda_f(q) < \infty.$$

□

Beweis des Satzes 3.5.1:

I: Der erste Teil funktioniert analog zu dem ersten Schritt des Beweises von Satz 2.6.1: Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen q_0 konvergente Folge. Wegen Lemma (3.5.3) ist $u(q_n) := u_n$ eine beschränkte Folge und besitzt somit eine in $W_0^{1,p}(\Omega)$ schwach konvergente Teilfolge mit einem Grenzwert $u_0 < \infty$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte also $q_n \to q_0$, $\lambda_f(q_n) \xrightarrow{q_n \to q_0} \lambda_{f_0}$ und

$$u_n \xrightarrow{q_n \to q_0} u_0 \text{ schwach in } W_0^{1,p}(\Omega), \text{ stark in } L^{q_0}(\Omega).$$

Insbesondere ist damit $(u(q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^{q_0}(\Omega)$ eine Cauchyfolge.

II: Zeige, dass $u(q_n) \xrightarrow{q_n \to q_0} u_0$ stark in $W_0^{1,p}(\Omega)$ konvergiert.
Entsprechend des Beweises von Satz 2.6.1 genügt es die beiden Eigenschaften

(i) $\nabla u(q_n) \xrightarrow{q_n \to q_0} \nabla u_0$ in $L^p(\Omega)$

(ii) $\| |\nabla u(q_n)| \|_p \xrightarrow{q_n \to q_0} \| |\nabla u_0| \|_p$ in $\mathbb{R}$

nachzuweisen.

Zu (i): Da $u(q_n) \xrightharpoonup{q_n \to q_0} u_0$ schwach in $W_0^{1,p}(\Omega)$ konvergiert, gilt insbesondere

$$\nabla u(q_n) \xrightharpoonup{q_n \to q_0} \nabla u_0 \quad \text{in } L^p(\Omega).$$

Zu (ii): Zeige zunächst, dass $(\nabla u(q_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ bildet. Wobei es wiederum ausreicht die Eigenschaften (i) und (ii) für diesen Fall nachzuweisen. Aus der schwachen Konvergenz in $L^p(\Omega)$ von $\nabla u(q_n)$ gegen ∇u_0 folgt wie zuvor (i). Um zu zeigen, dass

$$\| |\nabla u(q_n)| \|_p - \| |\nabla u(q_m)| \|_p \xrightarrow{q_n, q_m \to q_0} 0 \text{ in } \mathbb{R} \tag{3.22}$$

gilt, betrachtet man q_n, q_m in der Nähe von q_0. $u(q_n)$ und $u(q_m)$ erfüllen die Gleichung:

$$\begin{aligned}
M \quad := \quad & \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} \Big\{ [H(\nabla u_n)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u_n) \\
& \qquad - [H(\nabla u_m)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k}(\nabla u_m) \Big\} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(u_n - u_m)\, dx \\
= \quad & \int_\Omega - \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big\{ [H(\nabla u_n)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u_n) \\
& \qquad - [H(\nabla u_m)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k}(\nabla u_m) \Big\} (u_n - u_m)\, dx \\
= \quad & \int_\Omega - \Big\{ Qu(q_n) - Qu(q_m) \Big\} (u(q_n) - u(q_m))\, dx \\
\overset{(3.8)}{=} \quad & \int_\Omega \Big\{ \lambda_f(q_n)\, u_n^{q_n - 1} - \lambda_f(q_m)\, u_m^{q_m - 1} \Big\} (u_n - u_m)\, dx
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Hierbei steht ξ_k als Abkürzung für $\frac{\partial u_n}{\partial x_k}$ und ζ_k für $\frac{\partial u_m}{\partial x_k}$. Die rechte Seite der Gleichung konvergiert wie in (2.20) für $n, m \to \infty$ gegen Null.

Multipliziert man M, d.h. den ersten Ausdruck aus Gleichung (3.23) aus, so erhält man qualitativ zwei verschiedene Terme:

$$\begin{aligned}
1.) \qquad & \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} [H(\nabla u_n)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u_n) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} u_n\, dx \\
\overset{(3.20)}{=} \quad & \int_\Omega [H(\nabla u_n)]^p\, dx = \|H(\nabla u_n)\|_p^p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{2.)} \qquad & \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} \left[H\left(\nabla u_n\right)\right]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}\left(\nabla u_n\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} u_m \, dx \\
= \quad & \int_\Omega \left[H\left(\nabla u_n\right)\right]^{p-1} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}\left(\nabla u_n\right) \cdot \zeta_k \, dx \\
\overset{\text{Hölder}}{\leq} \quad & \left\| \left[H\left(\nabla u_n\right)\right]^{p-1} \right\|_{\frac{p}{p-1}} \cdot \left\| \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}\left(\nabla u_n\right) \cdot \zeta_k \right\|_p \\
= \quad & \left\| H\left(\nabla u_n\right) \right\|_p^{p-1} \cdot \left\| \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}\left(\nabla u_n\right) \cdot \zeta_k \right\|_p \\
\overset{(❀)}{\leq} \quad & \left\| H\left(\nabla u_n\right) \right\|_p^{p-1} \left\| H\left(\nabla u_m\right) \right\|_p
\end{aligned}
$$

Hierbei gilt die Abschätzung (❀), denn es ist:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(H\left(\xi + t\zeta\right)\Big)\bigg|_{t=0} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial\left(\xi_k + t\zeta_k\right)}\left(\xi_k + t\zeta_k\right) \cdot \frac{\partial\left(\xi_k + t\zeta_k\right)}{\partial t}\bigg|_{t=0} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}\left(\xi_k\right) \cdot \zeta_k = H'\left(\xi\right) \cdot \zeta
\end{aligned}
$$

Das heißt $\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}\left(\xi_k\right) \cdot \zeta_k$ ist die erste Variation von H in ξ in Richtung ζ.

Zudem gilt $\frac{1}{t}\left[H\left(\xi + t\zeta\right) - H\left(\xi\right)\right] \leq \frac{1}{t}\left[H\left(\xi\right) + tH\left(\zeta\right) - H\left(\xi\right)\right] = H\left(\zeta\right)$ für jede positive, reelle Zahl t. Insgesamt erhält man

$$
\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}\left(\xi_k\right) \cdot \zeta_k = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[H\left(\xi + t\zeta\right) - H\left(\xi\right)\right] \leq H\left(\zeta\right)
$$

und damit die Abschätzung (❀)

$$
\left\| \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}\left(\nabla u_n\right) \cdot \zeta_k \right\|_p \leq \left\| H\left(\zeta\right) \right\|_p = \left\| H\left(\nabla u_m\right) \right\|_p .
$$

Die anderen beiden Terme ergeben sich analog. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
M &= \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} \left\{ [H(\nabla u_n)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u_n) \right. \\
&\qquad \left. - [H(\nabla u_m)]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}(\nabla u_m) \right\} \frac{\partial}{\partial x_k}(u_n - u_m)\, dx \\
&\geq \|H(\nabla u_n)\|_p^p - \|H(\nabla u_n)\|_p^{p-1} \cdot \|H(\nabla u_m)\|_p \\
&\qquad + \|H(\nabla u_m)\|_p^p - \|H(\nabla u_m)\|_p^{p-1} \cdot \|H(\nabla u_n)\|_p \\
&= \|H(\nabla u_n)\|_p^{p-1} \left(\|H(\nabla u_n)\|_p - \|H(\nabla u_m)\|_p \right) \\
&\qquad + \|H(\nabla u_m)\|_p^{p-1} \left(\|H(\nabla u_m)\|_p - \|H(\nabla u_n)\|_p \right) \\
&= \left(\|H(\nabla u_n)\|_p^{p-1} - \|H(\nabla u_m)\|_p^{p-1} \right) \cdot \left(\|H(\nabla u_n)\|_p - \|H(\nabla u_m)\|_p \right) \\
&=: N \geq 0
\end{aligned}$$

Für $n, m \to \infty$ konvergiert M gegen Null, daher muss auch der kleinere (positive) Ausdruck N in diesem Grenzwert gegen Null gehen:

$$\Rightarrow \|H(\nabla u_n)\|_p - \|H(\nabla u_m)\|_p \xrightarrow{q_n, q_m \to q_0} 0 \text{ in } \mathbb{R}$$

Da H eine stetige Norm ist und aufgrund der Äquivalenz aller Normen in $\mathbb{R}^N$ folgt damit (3.22) und es ist gezeigt, dass $(\nabla u(q_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ ist.

Als Banachraum ist $L^p(\Omega)$ insbesondere vollständig. Somit existiert eine Grenzfunktion, die aufgrund der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes mit ∇u_0 übereinstimmen muss:

$$\Rightarrow \| |\nabla u(q_n)| \|_p - \| |\nabla u_0| \|_p \xrightarrow{q_n \to q_0} 0$$

Damit sind (i) und (ii) erfüllt und es gilt $u(q_n) \xrightarrow{q_n \to q_0} u_0$ stark in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

III: Aufgrund der starken Konvergenz überträgt sich auf u_0 die Eigenschaft $u_0 \geq 0$. Die Stetigkeit der Norm sorgt für $\|u_0\|_{q_0} = 1$. Daher ist u_0 nicht identisch Null. Zusätzlich impliziert $u(q_n) \xrightarrow{q_n \to q_0} u_0$ stark in $W_0^{1,p}(\Omega)$, dass u_0 eine schwache Lösung des folgenden Randwertproblems ist:

$$\begin{cases} -Qu_0 = \lambda_{f_0} u_0^{q_0 - 1} & \text{für } x \in \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Positivität von u_0 folgt erneut aus dem Minimumprinzip [11].

IV: Es gilt $\lambda_f(q_0) \leq \lambda_{f_0}$. Denn (λ_{f_0}, u_0) ist eine Lösung von (3.8) und damit ist λ_{f_0} nach Satz 3.3.2 durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\lambda_{f_0} = \frac{\int_\Omega [H(\nabla u_0)]^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u_0|^{q_0} \, dx\right)^{p/q_0}}$$

Somit gilt:

$$\lambda_f(q_0) \overset{(3.13)}{=} \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega [H(\nabla u_0)]^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u|^{q_0} \, dx\right)^{p/q_0}} \leq \frac{\int_\Omega [H(\nabla u_0)]^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u_0|^{q_0} \, dx\right)^{p/q_0}} = \lambda_{f_0}$$

Hiermit ist Fall (b) aus Satz 3.5.1 bewiesen.

V: Für $q \leq p$ ist die Lösung des Randwertproblems (3.8) eindeutig. Damit folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung für $q \to q_0 < p$, dass $u_0 = u(q_0)$ und $\lambda_{f_0} = \lambda_f(q_0)$ gilt. Damit ist auch (a) aus Satz 3.5.1 gezeigt.

$\square$

3.6 Der Fall q konvergiert gegen p

Konvergiert der Exponent q der rechten Seite der partiellen Differentialgleichung gegen die Konstante p des Q-Laplace Operators, so gilt folgender Satz:

Satz 3.6.1: Sei

$$v(q) = \left(\frac{\lambda_f(q)}{\lambda_f}\right)^{1/(q-p)} u(q) \tag{3.24}$$

für ein $\lambda_f > 0$. Falls entweder

(*i*) $\lambda_f < \lambda_f(p)$ und $q \to p^+$ oder

(*ii*) $\lambda_f > \lambda_f(p)$ und $q \to p^-$

erfüllt ist, dann gilt $\|v(q)\| \xrightarrow{q \to p} \infty$.

Beweis: Da $u(q)$, λ_f und $\lambda_f(q)$ positiv sind, ist auch $v(q)$ positiv. Für $v(q)$ gilt:

$$\begin{aligned}
-Qv(q) &\overset{(3.24)}{=} -Q\left[\left(\frac{\lambda_f(q)}{\lambda_f}\right)^{1/(q-p)} u(q)\right] \\
&\overset{(3.10)}{=} \left(\frac{\lambda_f(q)}{\lambda_f}\right)^{\frac{p-1}{q-p}} \cdot (-1)\, Qu(q) \\
&\overset{(3.12)}{=} \left(\frac{\lambda_f(q)}{\lambda_f}\right)^{\frac{p-1}{q-p}} \lambda_f(q)\; u(q)^{q-1} \\
&\overset{(3.24)}{=} \left(\frac{\lambda_f(q)}{\lambda_f}\right)^{\frac{p-1}{q-p}} \lambda_f(q) \cdot \left(\frac{\lambda_f}{\lambda_f(q)}\right)^{\frac{q-1}{q-p}} v(q)^{q-1} \\
&\overset{(\star)}{=} \lambda_f\, v(q)^{q-1}
\end{aligned}$$

Nebenrechnungen zu $(\star)$: Es ist

$$\lambda_f(q)^{\frac{p-1}{q-p}-\frac{q-1}{q-p}+1} = \lambda_f(q)^{\frac{p-1-q+1}{q-p}+1} = \lambda_f(q)^{1-\frac{(q-p)}{q-p}} = \lambda_f(q)^0 = 1$$

und

$$\lambda_f^{-\frac{p-1}{q-p}+\frac{q-1}{q-p}} = \lambda_f^{\frac{-p+1+q-1}{q-p}} = \lambda_f^{\frac{(q-p)}{q-p}} = \lambda_f.$$

Damit genügt $v(q)$ der Gleichung

$$-\Delta_p v(q) = \lambda_f\, v(q)^{q-1}. \tag{3.25}$$

Zudem gilt $v(q) = \left(\frac{\lambda_f(q)}{\lambda_f}\right)^{1/(q-p)} u(q) = 0$ auf dem Rand von Ω, da u eine Lösung von (3.8) ist.

Angenommen $\|v(q)\|$ divergiert nicht für $q \to p$. Dies bedeutet, dass $v(q)$ beschränkt ist. Folglich besitzt $v(q)$ für $q \to p$ eine in $W_0^{1,p}(\Omega)$ schwach konvergente Teilfolge mit einem schwachen Grenzwert v_0, der ebenfalls in $W_0^{1,p}(\Omega)$ liegt. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v(q_n) \xrightarrow{q_n \to p} v_0$ schwach konvergent in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Analog zu Schritt II im Beweis des Satzes 3.5.1 erhält man, dass $v(q_n) \to v_0$ stark in $W_0^{1,p}(\Omega)$ konvergiert. Hieraus ergibt sich ebenfalls analog zum Beweis des Satzes 3.5.1 (mit $q_0 = p$), dass v_0 positiv und eine schwache Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$\begin{cases} -Qv_0 = \lambda_f\, v_0^{p-1} & \text{für } x \in \Omega, \\ v_0 = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.26}$$

Zu Fall (i): $\lambda_f < \lambda_f(p)$ und $q \to p^+$, d.h. insbesondere gilt $q > p$. Nach Satz 3.3.2 ist

$$\lambda_f(p) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega [H(\nabla u)]^p\, dx}{\left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)}$$

der kleinste Eigenwert, welcher eine nicht triviale Lösung von (3.26) ermöglicht. Daher folgt für $\lambda_f < \lambda_f(p)$, dass $v_0 \equiv 0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ gelten muss.

$$\Rightarrow v(q) \to 0 \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Insbesondere konvergiert $v(q)$ punktweise gegen die Nullfunktion und es genügt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v(q) < 1$ fast überall in Ω zu betrachten. Für $q > p$, $\lambda_f < \lambda_f(p)$, $v(q) < 1$ gilt:

$$-Qv(q) \overset{(3.25)}{=} \lambda_f v(q)^{q-1} < \lambda_f v(q)^{p-1}$$

Da mit $u(p)$ auch $\alpha \cdot u(p)$ eine Lösung von (3.15) ist, kann man $v(q) \leq u(p)$ für genügend kleines $\beta := (q-p) > 0$ annehmen. Dann gilt:

$$-Qu(p) \overset{(3.15)}{=} \lambda_f(p)\, u(p)^{p-1} \geq \lambda_f(p)\, v(q)^{p-1} > \lambda_f v(q)^{p-1}$$

Zusammengefasst hat man also:

$$v(q) \leq u(p) \quad \text{und}$$

$$-Qv(q) < \lambda_f v(q)^{p-1} < -Qu(p)$$

Hieraus lässt sich nach [17], [23] ableiten, dass ein $\widetilde{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ existiert mit $v(q) \leq \widetilde{u} \leq u(p)$, so dass $\widetilde{u}$ folgende Gleichung löst:

$$-Q\widetilde{u} = \lambda_f\, \widetilde{u}^{\,p-1}$$

Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass $(\lambda_f(p), u(p))$ die eindeutige Lösung des Randwertproblems (3.15) ist. Damit ergibt sich im Fall (i): $\|v(q)\| \xrightarrow{q \to p} \infty$.

Zu Fall (ii): $\lambda_f > \lambda_f(p)$ und $q \to p^-$, d.h. insbesondere $q < p$. Nach Satz 3.4.5 gibt es für $p = q$ keine positiven Eigenfunktionen von (3.8) mit Eigenwert $\lambda_f > \lambda_f(p)$. Daher muss $v_0 = 0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ gelten. Dies bedeutet, dass $v(q)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ gegen die Nullfunktion konvergiert:

$$v(q) \xrightarrow{q \to p} 0 \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega)$$

Insbesondere konvergiert $v(q)$ punktweise gegen die Nullfunktion und es genügt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v(q) < 1$ fast überall in Ω zu betrachten.

$$p > q \quad \Rightarrow\ p - q > 0 \quad \Rightarrow\ v(q)^{p-q} < 1^{p-q} = 1 \quad \Rightarrow\ v(q)^{q-p} > 1.$$

Mit $\lambda_f > \lambda_f(p)$ bzw. $\frac{\lambda_f}{\lambda_f(p)} > 1$ folgt durch Multiplikation beider Ungleichungen

$$\frac{\lambda_f}{\lambda_f(p)} v(q)^{p-q} > 1 \quad \Rightarrow\ \lambda_f v(q)^{p-q} > \lambda_f(p).$$

Zudem gilt folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
0 \quad &\overset{(\ast)}{\leq} \quad \int_\Omega \left(-Qv\,(q) \cdot \frac{v\,(q)^p - u\,(p)^p}{v\,(q)^{p-1}} \right) dx \\
&\qquad - \int_\Omega \left(-Qu\,(p) \cdot \frac{v\,(q)^p - u\,(p)^p}{u\,(p)^{p-1}} \right) dx \\
&\overset{(3.25),(3.8)}{=} \quad \int_\Omega \left(\lambda_f v\,(q)^{q-1} \cdot \frac{v\,(q)^p - u\,(p)^p}{v\,(q)^{p-1}} \right) dx \\
&\qquad - \int_\Omega \left(\lambda_f\,(p)\, u\,(p)^{p-1} \cdot \frac{v\,(q)^p - u\,(p)^p}{u\,(p)^{p-1}} \right) dx \\
&= \quad \int_\Omega \underbrace{\left(\lambda_f v\,(q)^{q-p} - \lambda_f\,(p) \right)}_{>0} \cdot \underbrace{\left(v\,(q)^p - u\,(p)^p \right)}_{<0} dx < 0
\end{aligned}$$

Aus dieser ergibt sich dann auch im Fall (ii) ein Widerspruch:

$$\Rightarrow \|v\,(q)\| \xrightarrow{q \to p} \infty$$

Zu $(\ast)$: Definiere $\widetilde{u} := u^p$ und

$$K_f\,(\widetilde{u}) := \int_\Omega \left[H \left(\nabla\,(\widetilde{u})^{\frac{1}{p}} \right) \right]^p dx = \int_\Omega \left[H\,(\nabla u) \right]^p dx = p \cdot I_f\,(u)\,.$$

Nach Lemma 3.3.3 ist $\int_\Omega [H\,(\nabla v)]^p\,dx$ konvex in v^q für $q \leq p$. Insbesondere ist daher $K_f\,(\widetilde{u})$ konvex in $\widetilde{u}$. Damit ist $K_f'\,(\widetilde{u})$ monoton wachsend und dies impliziert:

$$K_f'\,(\widetilde{u})\,(\widetilde{u} - \widetilde{v}) - K_f'\,(\widetilde{v})\,(\widetilde{u} - \widetilde{v}) = \left(K_f'\,(\widetilde{u}) - K_f'\,(\widetilde{v}) \right) (\widetilde{u} - \widetilde{v}) \geq 0$$

$K_f'\,(\widetilde{u}) \cdot (\widetilde{u} - \widetilde{v})$ ist die erste Variation von K_f in $\widetilde{u}$ in Richtung $(\widetilde{u} - \widetilde{v})$. Um diese zu berechnen definiere ich zunächst die Hilfsgrößen $\chi^{(t)}$ und χ:

$$\begin{aligned}
\chi^{(t)} &= \nabla\,(\widetilde{u} + t\varphi)^{\frac{1}{p}} \quad \text{und} \\
\chi &= \nabla\,(\widetilde{u})^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die erste Variation von K_f in eine beliebige Richtung φ zu:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}K_f\left(\widetilde{u}+t\varphi\right)\Big|_{t=0} =& \frac{d}{dt}\int_\Omega \left[H\left(\nabla\left(\widetilde{u}+t\varphi\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right]^p dx\Big|_{t=0} \\
=& \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} p\left[H\left(\nabla\left(\widetilde{u}+t\varphi\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \chi_k^{(t)}}\left(\chi^{(t)}\right) \\
& \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{p}\left(\widetilde{u}+t\varphi\right)^{\frac{1}{p}-1}\cdot\varphi\right) dx\Big|_{t=0} \\
=& \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} \left[H\left(\nabla\left(\widetilde{u}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \chi_k}\left(\chi\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left(\widetilde{u}\right)^{\frac{1-p}{p}}\cdot\varphi\right) dx \\
=& \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} \left[H\left(\nabla u\right)\right]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}\left(\nabla u\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u^{1-p}\cdot\varphi\right) dx,\ \text{mit } \widetilde{u}=u^p \\
=& \int_\Omega -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\left[H\left(\nabla u\right)\right]^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}\left(\nabla u\right)\right\} u^{1-p}\cdot\varphi\, dx \\
=& \int_\Omega -Qu\cdot u^{1-p}\cdot\varphi\, dx
\end{aligned}$$

Analog erhält man für $\widetilde{v}$

$$\frac{d}{dt}K_f\left(\widetilde{v}+t\varphi\right)\Big|_{t=0} = \int_\Omega -Qv\cdot\frac{1}{v^{p-1}}\cdot\varphi\, dx.$$

Nutzt man nun als Testfunktion $\varphi=\left(\widetilde{u}-\widetilde{v}\right)$ so ergibt sich (✳):

$$\begin{aligned}
0 \leq& \left(K_f'\left(\widetilde{u}\right)-K_f'\left(\widetilde{v}\right)\right)\left(\widetilde{u}-\widetilde{v}\right) \\
=& \int_\Omega\left(-Qv\left(q\right)\cdot\frac{v\left(q\right)^p-u\left(p\right)^p}{v\left(q\right)^{p-1}}\right)dx-\int_\Omega\left(-Qu\left(p\right)\cdot\frac{v\left(q\right)^p-u\left(p\right)^p}{u\left(p\right)^{p-1}}\right)dx
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.6.2: Satz 3.6.1 besagt, dass Lösungen der partiellen Differentialgleichung (3.25) - bzw. skalierte Lösungen von (3.15) - unter der Bedingung (i) oder (ii) im Grenzwert q gegen p divergieren. Sie liegen damit nicht mehr in $W_0^{1,p}\left(\Omega\right)$.

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] ALT, HANS WILHELM: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, 5. überarbeitete Auflage, Berlin, Heidelberg, 2006.

[2] BELLONI, MARINO; KAWOHL, BERND: *A direct uniqueness proof for equations involving the p-Laplace operator*. manuscripta mathematica, 109(2):229–231, 2002.

[3] BELLONI, MARINO; KAWOHL, BERND; JUUTINEN PETRI: *The p-Laplace eigenvalue problem as $p \to \infty$ in a Finsler metric*. Journal of the European Mathematical Society, 8(1):15, 2005.

[4] BELLONI, MARINO; FERONE, VINCENZO; KAWOHL BERND: *Isoperimetric inequalities, Wulff shape and related questions for strongly nonlinear elliptic operators*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 54(5):771–783, 2003.

[5] BIRD, BYRON; ARMSTRONG, ROBERT; HASSAGER OLE: *Dynamics of Polymeric Liquids*. John Wiley & Sons, New York, 1987.

[6] DACOROGNA, BERNARD: *Introduction to the Calculus of Variations*. Imperial College Press, London, 2004.

[7] DÍAZ, JESUS ILDEFONSO: *Nonlinear partial differential equations and free boundaries Volume I Elliptic equations*. Pitman Advanced Publishing Program, Madrid, 1985.

[8] EVANS, LAWRENCE: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, 1998.

[9] FLUIDS, PANEL: *Plasmas and Fluids, Physics through the 1990s*. National Academy Press, Washington, D.C., 1985.

[10] FRIDMAN, VLADISLAV: *Das Eigenwertproblem zum p-Laplace Operator für p gegen 1*. Inaugural-Dissertation, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 2003.

[11] GIUSTI, ENRICO: *Direct Methods in the Calculus of Variations*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Università di Firenze, Italy, 1989.

[12] Huang, Yin Xi: *A note on the asymptotic behavior of positive solutions for some elliptic equation.* Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 29(5):533–537, 1997.

[13] Kawohl, Bernd: *Symmetry results for functions yielding best constants in sobolev-type inequalities.* Discrete and continuous dynamical systems, 6(3):683–690, 2000.

[14] Kawohl, Bernd; Lindqvist, Peter: *Positive eigenfunctions for the p-Laplace operator revisited.* Analysis, 26:545–550, 2006.

[15] Kröger, Martin: *Nicht-newtonsche Effekte in Fluiden,* http://polyphys-s01.ethz.ch//pub/MK/aprints/pmk501preprint.pdf. Berlin, 2002.

[16] Radler, Rudolf: *Das Bertelsmann Lexikon*, Seite 8198. Lexikographisches Institut, München, 1996.

[17] Schmitt, Klaus: *Revisiting the method of sub- and supersolutions for nonlinear elliptic problems.* Electronic Journal of Differential Equations, Seiten 377–385, 2007.

[18] Ôtani, Mitsuharu; Teshima, Toshiaki: *On the first eigenvalue of some quasilinear elliptic equations.* Proc. Japan Acad., 64(Ser.A):8–10, 1988.

[19] Tipler, Paul Allen: *Physik.* Spektrum Akademischer Verlag, 3. korrigierter Nachdruck der 1.Auflage, Heidelberg, 2000.

[20] Tolksdorf, Peter: *Regularity for a More General Class of Quasilinear Elliptic Equations.* Journal of Differential Equations, 51:126–150, 1984.

[21] Tritton, David J.: *Physical Fluid Dynamics.* Clarendon Press, Oxford, 1988.

[22] Trudinger, Neil S.: *On a Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations.* Communication on Pure and Applied Mathematics, 20:721–747, 1967.

[23] Vy Khoi Le; Schmitt, Klaus: *Sub-supersolution theorems for quasilinear elliptic problems: A variational approach.* Electronic Journal of Differential Equations, 2004:1–7, 2004.

[24] Werner, Dirk: *Funktionalanalysis.* Springer-Verlag, 6., korrigierte Auflage, Berlin, 2007.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Kawohl für die Vergabe und Betreuung dieser Arbeit bedanken. Die vielen Gespräche führten stets zur Beantwortung meiner Fragen und waren sehr aufschlussreich.

Ebenfalls danken möchte ich Herrn Plura für hilfreiche Übungsaufgaben zur Vorlesung „Variationsrechnung “sowie für seine Geduld bei der Beantwortung meiner Fragen.

Weiterer Dank gebührt Jonas Stein, der mir bei LaTeX Fragen immer mit Rat und Tat zur Seite stand. Scarlett Weigel und Christian Sachse sei für das Korrekturlesen gedankt.

Nicht zuletzt gilt mein Dank meiner Schwester Petra und meinen Eltern, die mich während meines gesamten Studiums unterstützt haben und bei der Erstellung dieser Arbeit die Anzahl der wesentlich Fehler gesenkt haben.

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht zu haben.

Köln, den 31. Juli 2008

(Karin Everschor)