Seminar Algebraische Graphentheorie **SoSe 2015**
Prof. Dr. J. Kohlhaase, Dr. A. Pal **Aufgabe 3**
Abgabe: 28.04.2015

Es sei X ein einfacher Graph mit n Knoten und m Kanten. Ferner sei σ eine Orientierung von X und $D(X^\sigma)$ die zugehörige Inzidenzmatrix. Für $1 \leq k \leq \min\{n, m\}$ sei B eine $(k \times k)$-Untermatrix von $D(X^\sigma)$, d.h. eine $(k \times k)$-Matrix, die aus $D(X^\sigma)$ durch das Streichen von Zeilen und Spalten entsteht. Zeigen Sie, dass $\det(B) \in \{-1, 0, 1\}$.

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage durch Induktion nach k, wobei der Fall $k = 1$ trivial ist. Für den Induktionsschluss unterscheiden Sie die folgenden drei Fälle:

(i) Enthält B eine Nullspalte, so ist die Aussage klar.

(ii) Enthalten alle Spalten von B eine 1 und eine -1, so liegt $(1\ 1 \ldots 1\ 1)$ im Kern von B und $\det(B) = 0$.

(iii) Anderenfalls gibt es eine Spalte, die genau einen von Null verschiedenen Eintrag hat, und dieser Eintrag ist -1 oder 1. Nun entwickeln Sie die Determinante nach dieser Spalte und verwenden Sie die Induktionsvoraussetzung.