Jan Kohlhaase. Foto: Vladimir Unkovic

Gebäude sind mathematische Objekte, die Geometrie und Algebra auf faszinierende Weise in sich vereinen. Dieser Beitrag gibt einen Einblick in diese Theorie und erklärt ihren Einfluss auf neuere Entwicklungen in der mathematischen Grundlagenforschung.

Kammern, Apartments, Gebäude

Aktuelle Trends in der modularen Darstellungstheorie

Von Jan Kohlhaase

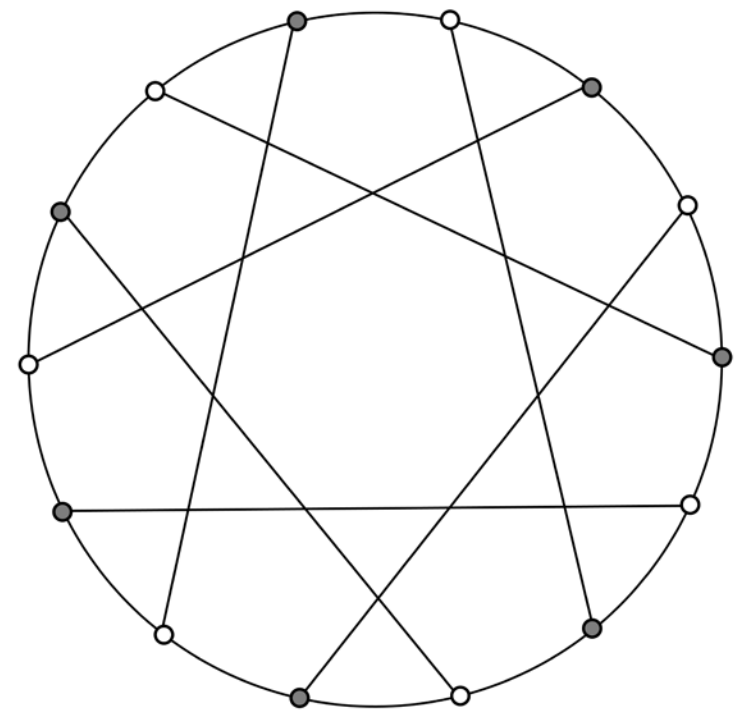
Kennen Sie Peter Bichsels Kurzgeschichte *Ein Tisch ist ein Tisch*? Darin versucht ein Mann, seinem Leben neuen Schwung zu geben, indem er den Wörtern unserer Sprache eine neue Bedeutung zuordnet. An einer Stelle heißt es: „Der Fuß fror auf und blätterte sich aus dem Schrank."[1] So ähnlich kann es für fachfremde Ohren klingen, die einem Gespräch zwischen Mathematiker*innen lauschen. Auch Mathematiker*innen verwenden gerne Begriffe der Alltagssprache, um die abstrakten Strukturen zu benennen, mit denen sie sich beschäftigen. Manchmal ist ihre Wortwahl dabei wenig intuitiv und eher historisch gewachsen. Meistens jedoch beruht die Wahl eines Namens auf einer mehr oder weniger offensichtlichen Wesensgleichheit von Alltagsgegenstand und mathematischer Struktur. Auf den kommenden Seiten wird in diesem Sinne von Gebäuden die Rede sein, von Kammern, Apartments, Bäumen und Garben. Ich werde Ihnen erklären, warum diese Namen gewählt wurden und welche Bedeutung diese Begriffe für die mathematische Grundlagenforschung an der Universität Duisburg-Essen haben.

Der Heawood-Graph

Zu den leichter zugänglichen mathematischen Disziplinen gehört die Geometrie. Ihre Objekte können visuell erfasst werden und sind damit sinnlich erfahrbar. Wenn Sie einen Blick auf Abbildung (1) werfen, denken Sie zunächst vielleicht an den Facettenschliff eines Diamanten. Der ästhetische Reiz dieser Figur erschließt sich ohne größere Vorbildung. Offensichtlich handelt es sich um ein Gebilde mit einem hohen Grad an Symmetrie. Nüchtern betrachtet besteht es allerdings nur aus 14 Punkten, die nach einem bestimmten Muster durch 21 Linien miteinander verbunden sind. Dabei werden die 14 Teile der Kreislinie mitgezählt. Ein solches Objekt nennt man einen Graphen. Die Linien werden auch als Kanten bezeichnet, die Punkte als Knoten. Graphen werden für die Untersuchung von Netzwerken und damit insbesondere für die Modellierung des Internet genutzt. Der Graph in Abbildung (1) wird auch der Heawood-Graph genannt und bildet ein erstes Beispiel für ein Gebäude. Um zu motivieren, warum diese Terminologie gewählt wurde, beginnt man am besten mit der kleinsten Organisationseinheit: den Kammern. Als Kammer wird in diesem Beispiel jede der einzelnen Kanten bezeichnet, wobei die Endpunkte der Einfachheit halber eingeschlossen werden. Dieses Gebäude besteht damit aus 21 Kammern. Wie in der Architektur werden die Kammern – im Sinne von Zimmern – nun zu größeren Einheiten zusammengefasst: den Apartments. Dabei gibt es eine natürliche Forderung: Jedes Apartment ist zusammenhängend, das heißt, auf einem geeigneten Weg gelangt man von jeder Kammer des Apartments in jede andere. Auf Ihre Wohnung zuhause trifft das hoffentlich zu! Im Beispiel aus Abbildung (1) bezeichnet man als Apartment jeden geschlossenen Weg, der aus sechs verschiedenen Kanten besteht. Ein Beispiel dafür sehen Sie in Abbildung (2). Diese Definition eines Apartments im Heawood-Graphen ist natürlich nicht gerade naheliegend. Versuchen Sie daher am besten, in Abbildung (1) weitere Beispiele von Apartments zu finden: Starten Sie mit einem beliebigen Knoten und versuchen Sie, von hier aus 6 verschiedene Kanten so zu durchlaufen, dass Sie wieder beim Ausgangspunkt ankommen. Diese 6 Kanten bilden dann ein Apartment. Im Heawood-Graphen ist nicht ganz einfach zu sehen, wie viele Apartments es insgesamt gibt. Probieren Sie ruhig ein bisschen herum! Können Sie alle 28 Apartments finden? Nicht alle sehen auf den ersten Blick gleich aus: Es gibt 4 verschiedene Muster, die jeweils siebenmal vorkommen. Bis auf stetige Verformung ist jedes Apartment allerdings einfach eine Kreislinie mit einer Unterteilung in sechs Segmente. Kreislinien werden in der Topologie auch als 1-Sphären bezeichnet. Die Figur in Abbildung (1) ist daher ein Beispiel für ein sogenanntes sphärisches Gebäude. Beachten Sie auch, dass alle Kammern in mehreren Apartments gleichzeitig liegen. Abbildung (1) als Ganzes fasst schließlich alle Apartments zur größten Organisationseinheit zusammen: dem Gebäude. An ein solches Objekt werden in der Mathematik allerdings strenge Anforderungen gestellt. Eine dieser Forderungen lautet, dass je zwei Kammern in einem gemeinsamen Apartment liegen müssen. In der Menschenwelt wird man nur selten ein Gebäude finden, das dieser Bedingung genügt. In dem Beispiel aus Abbildung (1) ist dafür zu prüfen, dass es zu je zwei Kanten einen geschlossenen Weg der Länge 6 gibt, der diese beiden Kanten enthält. Auch das sollten Sie an einem Beispiel testen: Suchen Sie sich im Heawood-Graphen zwei beliebige Kanten und finden Sie dann einen geschlossenen Weg der Länge 6, der beide Kanten enthält. Sie werden sehen, dass das immer möglich ist. Alle Fälle durchzuprobieren, kostet allerdings viel Zeit. Daher stellt sich die Frage, ob man für diesen Sachverhalt nicht eine theoretische, aber letztlich einfachere Begründung finden kann. Auch die genannte Zahl der Apartments – nämlich 28 – bleibt zunächst eine Behauptung.

Ein mathematisches Modell

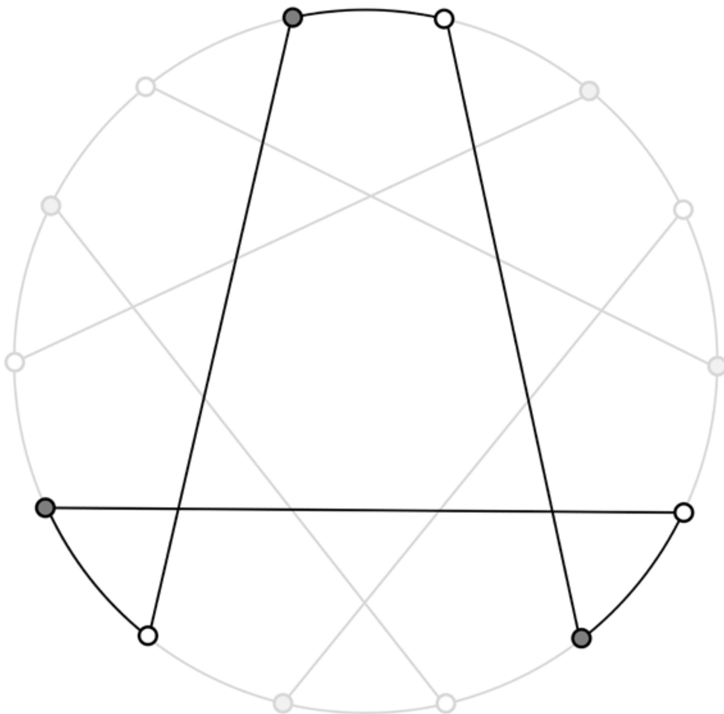
Um die Figur in Abbildung (1) systematisch untersuchen zu können, muss man verstehen, woher sie kommt und wie sie entsteht. Damit ist weniger die zeichnerische Konstruktion gemeint. Eine solche hätte auch von einem geschickten Künstler des Mittelalters gefunden werden können, der die tiefere mathematische Struktur dieser Figur nicht kennt. Vielmehr geht es darum, ein mathematisches Modell zu finden, das der Figur in Abbildung (1) zugrunde liegt, und mit dessen Hilfe man ihre Eigenschaften untersuchen kann. Solche mathematischen Modelle werden auch in den verschiedensten Gebieten außerhalb der Mathematik genutzt, um Probleme zu beschreiben, zu analysieren und zu lösen. Dazu gehören die Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften, die Biologie, die Soziologie und die Medizin. Hier nun haben Sie die Gelegenheit, eine Modellbildung innerhalb der Mathematik anhand eines einfachen Problems zu verfolgen. Dazu verlassen wir die Geometrie und wenden uns einer weiteren grundlegenden mathematischen Disziplin zu: der Algebra. Im Gegensatz zur zeichnerisch geprägten Geometrie ist die Algebra historisch gesehen die Lehre vom Rechnen. Es geht darin um Zahlen, Gleichungen und den formalen Umgang mit Symbolen. Ein Beispiel für eine sehr einfache algebraische Struktur ist die Menge $F_2 = \{0,1\}$ mit den beiden Elementen 0 und 1. Diese Elemente kann man in naheliegender Weise miteinander multiplizieren: Es gilt $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$ und $1 \cdot 1 = 1$. Man kann diese Elemente auch addieren, ohne die Menge F_2 zu verlassen: Es gilt $0+0=0$, $1+0=1$ und $1+1=0$. Das letzte Rechengesetz ist vielleicht etwas überraschend! Es taucht aber in natürlicher Weise in der Datenverarbeitung und Elektrotechnik auf. Man nennt F_2 auch den Körper mit zwei Elementen, wobei der Begriff Körper in der Algebra historisch gewachsen ist und keine geometrische Bedeutung hat. Vielleicht ist er damit ein Beispiel für eine weniger gelungene Namensgebung in der Mathematik. Damit kommen wir zur eigentlichen Beschreibung eines Modells für den Heawood-Graphen. Falls es Ihnen im Folgenden zu mathematisch wird, genügt es, die nächsten Absätze zu überfliegen. Sie können später problemlos wieder einsteigen (vgl. *Algebra und Geometrie*). Ausgehend von F_2 kann man weitere algebraische Strukturen konstruieren, etwa die Vektorräume der linearen Algebra. Als konkretes Beispiel betrachten wir die Menge aller Tripel (x,y,z) mit Einträgen aus F_2. Die Einträge x, y und z sind also jeweils 0 oder 1. Solche Vektoren können ebenfalls addiert werden.



(1) Sphärisches Gebäude: der Heawood-Graph.
Quelle: eigene Darstellung

Das geschieht in jeder Komponente einzeln. Zum Beispiel hat man $(1,0,0)+(1,1,0)=(0,1,0)$. Auf den ersten Blick scheint diese Art von Mathematik von der anschaulichen Welt der Geometrie weit entfernt zu sein. Dieser Eindruck täuscht allerdings. Wenn Sie in einem Vektor (x,y,z) Einträge aus den reellen Zahlen zulassen, dann bilden x, y und z die drei Koordinaten eines Punktes in dem Raum, der uns umgibt. Dieser Raum ist natürlich ein geometrisches Objekt. Man kann darin zum Beispiel Geraden betrachten, die durch den Ursprung verlaufen, das heißt die den Punkt (0,0,0) enthalten. Das sind die sogenannten eindimensionalen Unterräume. Ebenso kann man Ebenen betrachten, die den Punkt (0,0,0) enthalten. Das sind die sogenannten zweidimensionalen Unterräume. Eine der Stärken der linearen Algebra besteht darin, dass Sie diese Begriffe auch auf den dreidimensionalen Vektorraum über F_2 anwenden können. Auch hier können Sie eindimensionale Unterräume betrachten, also Geraden durch den Ursprung. In dieser Situation lassen sich diese Geraden sogar zählen: Da F_2 nur zwei Elemente besitzt, ist die Anzahl der Ursprungsgeraden gleich der Anzahl der von (0,0,0) verschiedenen Vektoren. Durch einfaches Zählen sieht man, dass es genau sieben Vektoren ungleich (0,0,0) gibt. Daher gibt es im dreidimensionalen Vektorraum über F_2 genau sieben Ursprungsgeraden. Analog dazu betrachtet man die zweidimensionalen Unterräume, also alle Ebenen, die den Punkt (0,0,0) enthalten. Mit einfachen Mitteln der linearen Algebra zeigt man, dass es davon ebenfalls sieben Stück gibt.

Wie kommt man von hier aus zu einem mathematischen Modell für den Heawood-Graphen? Werfen Sie dafür noch einmal einen Blick auf Abbildung (1). Jeder der hell eingefärbten Knoten repräsentiert eine der sieben Ursprungsgeraden. Jeder der dunkel eingefärbten Knoten repräsentiert eine der sieben Ebenen durch den Ursprung. Vielleicht haben Sie sich ja schon gefragt, was die unterschiedliche Färbung der Knoten bedeutet! Wofür stehen nun die Kanten? Betrachten Sie einen hellen Knoten. Er entspricht einer Ursprungsgeraden. Betrachten Sie außerdem einen dunklen Knoten. Er entspricht einer Ebene durch den Ursprung. Die beiden werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die entsprechende Gerade in der entsprechenden Ebene enthalten ist. Dieses Verfahren liefert gerade die Figur in Abbildung (1). Damit hat man ein mathematisches Modell für den Heawood-Graphen gefunden! Es beruht auf der linearen Algebra über dem Körper F_2. Eine Ebene, die eine Ursprungsgerade enthält, nennt man in der Mathematik übrigens eine Flagge oder eine Fahne. Auch diese Namensgebung ist leicht zu erklären: Ein eindimensionales Gebilde (der Fahnenmast) ist in einem zweidimensionalen Gebilde (dem Flaggentuch) enthalten. Das Gebäude in Abbildung (1) ist damit ein Beispiel für einen sogenannten Flaggenkomplex.



(2) Apartment im Heawood-Graphen.
Quelle: eigene Darstellung

Die Symmetriegruppe

Natürlich muss man sich fragen, wie hilfreich diese Sichtweise ist. Kann man daraus ableiten, dass es 28 Apartments gibt? Kann man damit zeigen, dass je zwei Kammern in einem gemeinsamen Apartment liegen? Und woher kommt die große Symmetrie im Heawood-Graphen? Um diese Fragen zu beantworten, benötigt man eine weitere algebraische Struktur. Wir betrachten die Menge aller 3×3-Matrizen über F_2. Das sind quadratische Matrizen mit drei Zeilen und drei Spalten, deren sämtliche Einträge 0 oder 1 sind. Solche Matrizen lassen sich komponentenweise addieren. Außerdem steht die Multiplikation von Matrizen zur Verfügung. Für beide Rechenoperationen benötigt man wiederum die Gleichung 1+1=0 in F_2. Betrachten Sie nun die Menge G all jener Matrizen, deren Determinante 1 ist. Bezüglich der Matrizenmultiplikation ist diese Menge abgeschlossen, das heißt zusammen mit A und B hat auch die Matrix A·B die Determinante 1. Das liegt an der Produktformel det(A·B)=det(A)·det(B). Auf diese Weise wird die Menge G zu einer Gruppe im Sinne der Algebra und gehört damit zu den fundamentalsten algebraischen Strukturen überhaupt. In unserem Fall gibt es für jeden Eintrag einer Matrix nur die beiden Möglichkeiten 0 oder 1. Damit gibt es insgesamt nur endlich viele solcher 3×3-Matrizen. Folglich ist auch die Menge G endlich. Die Anzahl ihrer Elemente wird mit |G| bezeichnet und lässt sich mit den Methoden der linearen Algebra leicht ausrechnen. Es gilt |G|=168. Dafür kann man zum Beispiel den Basisergänzungssatz verwenden. Von zentraler Bedeutung ist jetzt die folgende Beobachtung: Die Elemente von G sind 3×3-Matrizen und können als lineare Abbildungen auf dem dreidimensionalen Vektorraum über F_2 aufgefasst werden. Die Matrizen bilden dabei Geraden auf Geraden ab und Ebenen auf Ebenen. Die Flaggenrelation bleibt dabei erhalten. Mit anderen Worten: Jedes Element von G bestimmt eine Abbildung des Heawood-Graphen in sich selbst. Es vertauscht die hellen Knoten untereinander, es vertauscht die dunklen Knoten untereinander und berücksichtigt dabei die entsprechenden Kanten. Zum Beispiel gibt es eine Matrix, die die Figur in Abbildung (1) um zwei Knoten gegen den Uhrzeigersinn dreht. Die Gruppe G spiegelt damit die Symmetrien des Heawood-Graphen wider. Allerdings bilden die Elemente von G stets helle Knoten auf helle Knoten ab und dunkle Knoten auf dunkle. Es gibt aber auch Symmetrien, die die Farben der Knoten vertauschen. Das macht es plausibel, dass G nur die Hälfte aller Symmetrien ausmacht und dass die volle Symmetriegruppe 336 Elemente enthält[2].

Eine schnelle Analyse

Wie nutzt man diese Symmetrien nun aus, um die Eigenschaften des Heawood-Graphen zu untersuchen? Ich will eine solche mathematische Analyse tatsächlich einmal durchführen. Dazu muss ich das mathematische Tempo kurzzeitig noch einmal erhöhen. Falls Ihnen das zu anstrengend ist, genügt es, den folgenden Absatz zu überfliegen und weiter unten wieder einzusteigen. Betrachten Sie die Menge B aller Elemente von G, die eine gewählte Kante dort belassen, wo sie ist. Bei geeigneter Wahl dieser Kante ist B gerade die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen mit Determinante 1. Das ergibt sich aus der Interpretation dieser Kante als Flagge in einem Vektorraum. Die Anzahl der Elemente von B lässt sich ausrechnen oder durch Zählen bestimmen. In jedem Fall erhält man |B|=8. In der linearen Algebra zeigt man außerdem, dass es zu je zwei Kanten ein Element von G gibt, welches diese beiden Kanten ineinander überführt. Das verwendet die Tatsache, dass es zu zwei Basen eines Vektorraums immer eine lineare Abbildung gibt, die diese Basen ineinander überführt. Aus dem Satz von Lagrange folgt schließlich, dass die Anzahl aller Kanten gleich|G|/|B|=168/8=21 ist. Wir hätten die Kanten also nicht einmal zu zählen brauchen! Nun kümmern wir uns um die Apartments. Die drei Vektoren (1,0,0) und (0,1,0) und (0,0,1) bestimmen drei Ursprungsgeraden, nämlich die Koordinatenachsen. Je zwei dieser Ursprungsgeraden bestimmen eine Ebene durch den Ursprung. Betrachtet man alle

(3) Jacques-Tits 1967.
Quelle: Foto: Konrad Jacobs; Archiv Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

möglichen Flaggen, die sich hieraus ergeben, so erhält man einen Weg der Länge 6, das heißt ein Apartment wie in Abbildung (2). Aus dieser expliziten Beschreibung kann man ablesen, welche Matrizen dieses Apartment auf sich selbst abbilden: Es ist die Menge N aller Matrizen, die in jeder Spalte und in jeder Zeile genau einen von 0 verschiedenen Eintrag enthalten. In unserem Fall ist dieser Eintrag notwendigerweise gleich 1. Wiederum ist die Anzahl dieser Matrizen leicht durch Zählen zu bestimmen. Es gilt |N|=6. Nun betrachtet man ein beliebiges Apartment, also einen geschlossenen Weg der Länge 6. Dieser Weg enthält drei hell gefärbte Knoten, welche jeweils einen von (0,0,0) verschiedenen Vektor repräsentieren. Der Weg enthält aber auch drei dunkel gefärbte Knoten. Sie entsprechen den Ebenen, die von je zwei dieser Vektoren aufgespannt werden. Da hierbei drei Ebenen entstehen, sind die drei Vektoren linear unabhängig, das heißt keiner liegt in der Ebene, die von den beiden anderen aufgespannt wird. Aus der oben genannten Tatsache über Basen und lineare Abbildungen folgt, dass je zwei Apartments durch ein Element von G ineinander überführt werden. Damit ergibt sich nach dem bereits genannten Satz von Lagrange, dass die Anzahl der Apartments gleich |G|/|N|=168/6=28 ist. Schließlich kommen wir zu der Frage, warum je zwei Kammern in einem gemeinsamen Apartment liegen. Seien dazu zwei Kammern gegeben, also zwei Kanten im Heawood-Graphen. Jede davon enthält einen dunkel gefärbten Knoten, der einem zweidimensionalen Unterraum entspricht. Man bildet nun die Summe dieser Unterräume. Die hellen Knoten der Kanten entsprechen einer linear unabhängigen Teilmenge dieses neuen Unterraums. Man ergänzt sie zu einer Basis dieses Unterraums. Je nach Situation ergänzt man weiter zu einer Basis des dreidimensionalen Vektorraums über F_2. Wie eben gesehen bestimmt diese Basis ein Apartment, das beide Kanten enthält.

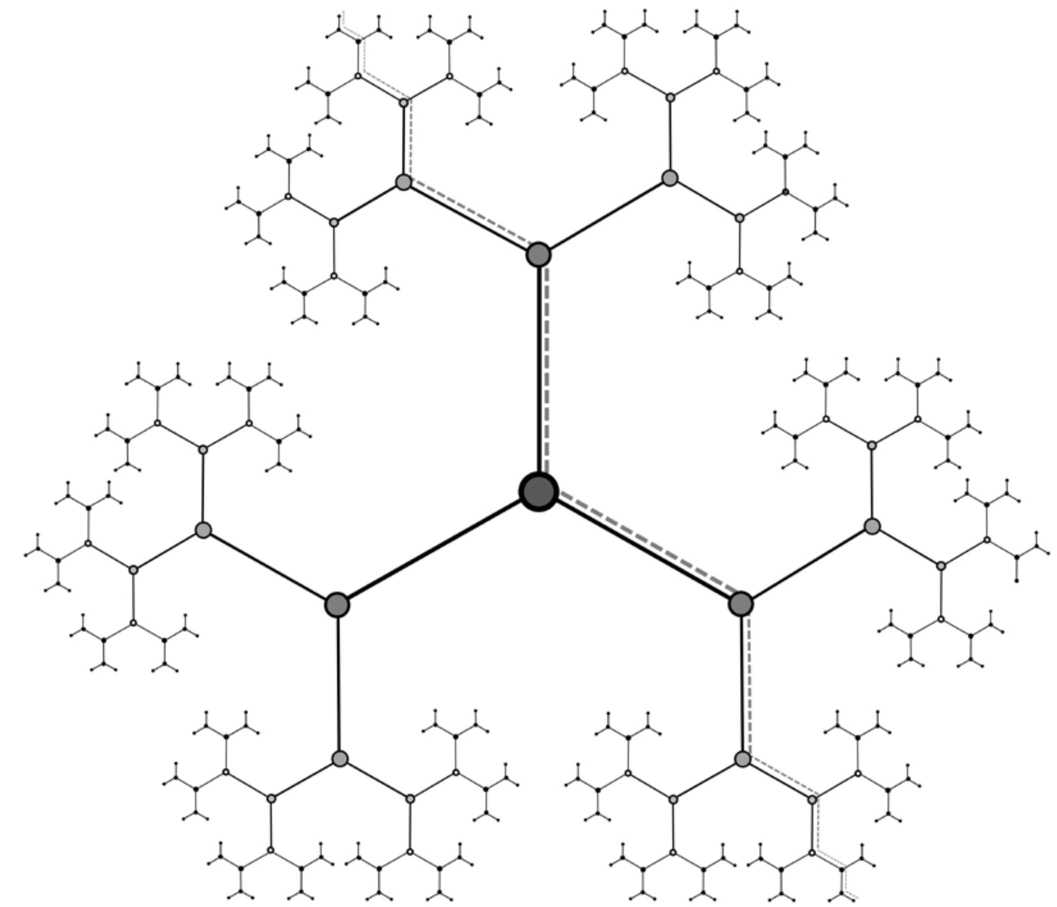
Algebra und Geometrie

An dieser Stelle möchte ich das mathematische Tempo wieder drosseln. Die erste Analyse des Gebäudes in Abbildung (1) ist jetzt abgeschlossen. Einfache Mittel der linearen Algebra haben gezeigt, dass je zwei Kammern tatsächlich in einem gemeinsamen Apartment liegen. Die Anzahl der Apartments konnten wir sogar rechnerisch bestimmen. Unser Modell war damit ein voller Erfolg! Es zeigt den Heawood-Graphen in ungeahnter Transparenz: All seine Eigenschaften lassen sich mit wenigen Argumenten aus dem Modell ableiten. Heutzutage ist daher kaum noch vorstellbar, dass Algebra und Geometrie über Jahrhunderte hinweg als völlig disparate Teildisziplinen der Mathematik gesehen wurden. Erst ab dem 19. Jahrhundert wurde die gegenseitige Beeinflussung dieser Gebiete so stark, dass Algebra und Geometrie heute in weiten Teilen miteinander verschmolzen sind. Ihr Zusammenwirken hat in der Mathematik des 20. Jahrhunderts zu ungeahnten Fortschritten geführt. Dazu gehört die Entwicklung der modernen algebraischen Geometrie durch Alexander Grothendieck. Dazu gehört aber auch die Entwicklung der Theorie der Gebäude durch den belgisch-französischen Mathematik Jacques Tits (siehe Abb. 3). Für seine bahnbrechenden Beiträge auf diesem Gebiet wurde er im Jahr 2008 mit dem Abel-Preis ausgezeichnet. In gewisser Hinsicht realisiert Tits in seiner Theorie Teile des sogenannten Erlanger Programms von Felix Klein. In seiner Antrittsvorlesung von 1872 postuliert Felix Klein nämlich unter anderem, dass das Studium eines geometrischen Objekts gleichwertig ist mit dem Studium seiner Symmetrien. Diese Symmetrien bilden eine Gruppe und sind damit ein Objekt der Algebra. Rufen Sie sich an dieser Stelle noch einmal die obige Vorgehensweise in Erinnerung: Man startet mit einem geometrischen Objekt und analysiert es anschließend mit

Hilfe eines algebraischen Modells. Tits erkannte, dass sich diese Vorgehensweise auch umkehren lässt: Oben wurde eine Matrizengruppe G als Symmetriegruppe des Heawood-Graphen interpretiert und für die Untersuchung seiner geometrischen Eigenschaften verwendet. Umgekehrt spiegelt aber die Figur in Abbildung (1) in anschaulicher und geometrischer Weise die innere Struktur der Gruppe G wider. Man kann also den Heawood-Graphen dafür verwenden, die algebraischen Eigenschaften der Gruppe G zu untersuchen. Beispielsweise lassen sich aus dem Gebäude in Abbildung (1) Rückschlüsse ziehen über die sogenannten Konjugationsklassen der parabolischen Untergruppen von G. Mit anderen Worten: Das Gebäude und die Gruppe G enthalten in vielerlei Hinsicht dieselben Informationen. Es handelt sich um unterschiedliche Verkörperungen eng verwandter mathematischer Strukturen. Das gibt Ihnen vielleicht eine Ahnung davon, was in der Mathematik unter Abstraktion verstanden wird: Zwei Dinge können sehr unterschiedlich aussehen, aber von einem höheren Standpunkt aus betrachtet doch dasselbe sein. In einem solchen Fall hat man zwei verschiedene Ansatzpunkte für die Analyse dieser Strukturen. Das ist ein unschätzbarer Vorteil! Die Geometrie und die Algebra liefern für die Problemlösung nämlich ganz unterschiedliche Werkzeuge und Hilfsmittel.

Der Bruhat-Tits-Baum

An dieser Stelle wird es höchste Zeit für weitere Beispiele. In der Kurzanalyse des Heawood-Graphen spielen zwei Untergruppen B und N der Matrizengruppe G eine prominente Rolle. Die herausragende Leistung von Jacques Tits bestand darin, die Eigenschaften dieser Untergruppen herauszuarbeiten und in eine abstrakte Liste von Forderungen zu verwandeln. Das führt zu dem Begriff eines BN-Paares. Eine Gruppe im Sinne der Algebra heißt eine Gruppe mit BN-Paar, falls sie zwei Untergruppen B und N enthält, die den abstrakten Forderungen von Tits genügen. Eine solche Gruppe führt dann stets zu einem Gebäude im mathematischen Sinne, das heißt man kann ihr ein geometrisches Objekt zuordnen, dessen Symmetrien durch die Gruppe G beschrieben werden[3]. Ich gehe hier nicht genau auf diese Konstruktion und die Anforderungen an ein BN-Paar ein. Lassen Sie mich immerhin sagen, dass das Axiomensystem von Tits aus mathematischer Sicht von größter Eleganz und Schlichtheit ist. Auch deswegen scheint es von BN-Paaren und den zugehörigen Gebäuden in der Mathematik nur so zu wimmeln. Die Gruppe der invertierbaren n×n-Matrizen über jedem Körper K liefert zum Beispiel ein sphärisches Gebäude, das den Heawood-Graphen in Abbildung (1) verallgemeinert. Der Heawood-Graph entspricht dem Fall n=3 und $K=F_2$. Es gibt aber auch BN-Paare, die zu ganz anderen Typen von Gebäuden führen. Das sind die sogenannten Bruhat-Tits-Gebäude. Ihre Theorie wurde von Jacques Tits in Zusammenarbeit mit seinem französischen Kollegen François Bruhat entwickelt und in zwei monumentalen Arbeiten festgehalten[4]. Ein konkretes Beispiel für ein solches Gebäude sehen Sie in Abbildung (4). Bitte ignorieren Sie zunächst die gestrichelte Linie. Abbildung (4) zeigt einen sogenannten Bruhat-Tits-Baum. Es handelt sich wieder um einen hochgradig symmetrischen Graphen, also um eine Ansammlung von Knoten, die auf genau bestimmte Weise durch Kanten miteinander verbunden sind. Können Sie das Muster erkennen, nach dem der Graph in Abbildung (4) konstruiert wird? Man beginnt mit einem zentralen Knoten. Durch Kanten fügt man drei Nachbarknoten hinzu. Zu jedem dieser neuen Knoten fügt man durch Kanten zwei zusätzliche Nachbarknoten hinzu, so dass er insgesamt wiederum drei Nachbarn besitzt. So fährt man bis ins Unendliche fort. Insgesamt erhält man einen Graphen mit der Eigenschaft, dass jeder Knoten genau drei Nachbarn besitzt. Natürlich kann die Zeichnung in Abbildung (4) nur endlich viele dieser Konstruktionsschritte wiedergeben. Den Rest müssen Sie sich denken. Übrigens täuscht der Eindruck, dass es einen zentralen Knoten gibt, der in gewisser Hinsicht ausgezeichnet ist. Das liegt nur an der zeichnerischen Darstellung: In Abbildung (4) schauen Sie wie durch ein starkes Vergrößerungsglas, das den Bruhat-Tits-Baum verzerrt. Sie können den Fokus der Lupe auch auf jeden anderen Knoten legen und erhalten dasselbe Bild. Ich hoffe außerdem, dass Ihnen die gewählte Terminologie eines Baumes gefällt: Die Zeichnung erinnert an fein verzweigtes Geäst und an filigranes Wurzelwerk. Natürlich steckt dahinter eine präzise mathematische Definition: Ein Graph wird als Baum bezeichnet, wenn er zusammenhängend ist und keine Kreise enthält. Die erste Bedingung bedeutet, dass je zwei Knoten über einen geeigneten Weg durch Kanten miteinander verbunden sind. Anschaulich gesprochen kann man auf dem Graphen von jedem Punkt aus zu jedem anderen laufen. Das erscheint Ihnen bei einem Blick auf Abbildung (4) bestimmt plausibel. Die zweite Bedingung bedeutet, dass es im Graphen keine geschlossenen Wege gibt: Wenn Sie von einem Knoten aus entlang von Kanten wandern, dann kommen Sie nie wieder zu diesem Knoten zurück – es sei denn, Sie kehren um. Machen Sie sich das anhand von Abbildung (4) einmal klar! Diese Eigenschaft unterscheidet den Bruhat-Tits-Baum ganz wesentlich vom Heawood-Graphen in Abbildung (1): Dort gibt es viele geschlossene Wege, zum Beispiel die Apartments. Nichtsdestotrotz ist auch der Bru-

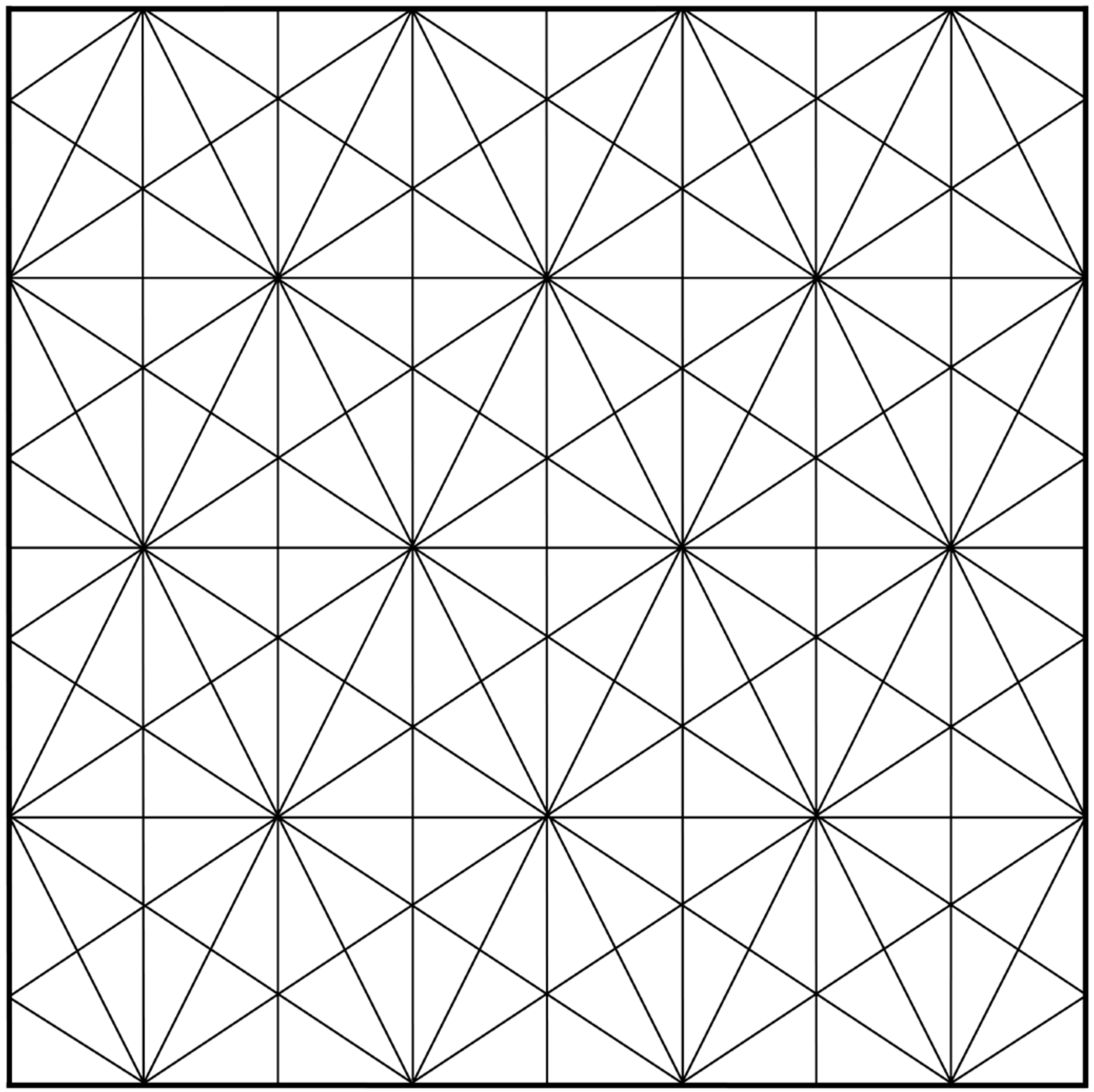


(4) Bruhat-Tits-Baum mit Apartment (gestrichelt).
Quelle: eigene Darstellung

hat-Tits-Baum in Abbildung (4) ein Gebäude im Sinne der Mathematik. Die zugehörigen Kammern sind wiederum die Kanten des Graphen. Allerdings sind die Apartments in diesem Fall von gänzlich anderer Natur: Es sind die beidseitig unendlichen Wege. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung (4) als gestrichelte Linie angedeutet. Bis auf stetige Verformung handelt es sich um eine Gerade mit einer Unterteilung in Intervalle. Man spricht auch von einer Geraden mit Facettenstruktur. Versuchen Sie am besten, weitere Beispiele von Apartments zu finden! Das fällt Ihnen sicherlich nicht schwer. Können Sie sehen, dass es im Bruhat-Tits-Baum tatsächlich unendlich viele Apartments gibt? Betrachten Sie dazu die gestrichelte Linie in Abbildung (4). An jedem Knoten könnten Sie auch in die andere Richtung abbiegen und so ein anderes Apartment finden. Ich erinnere Sie außerdem an eine der mathematischen Anforderungen an ein Gebäude: Je zwei Kammern liegen in einem gemeinsamen Apartment. Für den Bruhat-Tits-Baum bedeutet diese Forderung, dass je zwei Kanten auf einem beidseitig unendlichen Weg liegen. Testen Sie diese Bedingung in einem Beispiel! Sie werden sehen, dass sie zumindest der Anschauung nach immer erfüllt ist.

Triangulierte Ebenen und Spiegelungsgruppen

Für die genaue Untersuchung dieses Graphen benötigt man wieder ein geeignetes mathematisches Modell. Dieses Modell wird von der allgemeinen Theorie von Jacques Tits geliefert. Tatsächlich handelt es sich auch beim Bruhat-Tits-Baum um das Gebäude einer geeigneten Gruppe mit BN-Paar. Diese Gruppe ist wiederum von ganz konkreter Gestalt: Es sind die 2×2-Matrizen mit Determinante 1 und Einträgen in den sogenannten 2-adischen Zahlen. Letztere bilden ein Analogon der reellen Zahlen und sind in der Zahlentheorie von großer Bedeutung. Allgemeiner lassen sich für jede Primzahl p die sogenannten p-adischen Zahlen konstruieren. Sie gehorchen den üblichen Rechengesetzen in einem Körper. Das obige BN-Paar besitzt dann eine weitreichende Verallgemeinerung. Sie führt zu den bereits genannten Bruhat-Tits-Gebäuden, die viel komplizierter aussehen können als der Baum in Abbildung (4). Im Allgemeinen lässt sich ein solches Bruhat-Tits-Gebäude als Ganzes überhaupt nicht mehr zeichnen. Allerdings lassen sich über die Apartments noch qualitative Aussagen treffen: Es handelt sich um affine Räume über den reellen Zahlen mit einer geeigneten Facettenstruktur. Im eindimensionalen Fall haben wir so etwas in Abbildung (4) gesehen: Ein Apartment ist eine reelle Gerade mit einer Unterteilung in Intervalle. In Abbildung (5) sehen Sie ein zweidimensionales Beispiel: In diesem Fall ist ein Apartment eine Ebene mit einer geeigneten Triangulierung. Das Gebäude als Ganzes ist in hochgradig symmetrischer Weise aus diesen Apartments zusammengesetzt. Vielleicht können Sie die Schwierigkeiten erahnen, ein solches Gebilde graphisch darzustellen. Die triangulierte Ebene in Abbildung (5) ist übrigens auch ein Indiz dafür, dass die Theorie der BN-Paare enge Bezüge zur Theorie der Spiegelungsgruppen aufweist. Die dortige Triangulierung bleibt nämlich erhalten, wenn man sie an einer beliebigen ihrer Geraden spiegelt. Die Symmetriegruppe dieser



(5) Apartment eines 2-dimensionalen Bruhat-Tits-Gebäudes.
Quelle: eigene Darstellung

triangulierten Ebene hat also etwas mit Spiegelungsgruppen zu tun. Selbiges gilt damit auch für die Symmetrien des gesamten Gebäudes.

Die Langlands-Vermutung

Sie nähern sich dem Ende des Artikels, aber eine wichtige Frage ist noch offen: Was hat das alles mit der Forschung des Autors an der Universität Duisburg-Essen zu tun? Vor dem Hintergrund dieses Artikels lässt sich das leicht sagen: In meiner Arbeit untersuche ich Gruppen mit BN-Paar, die von den p-adischen Zahlen herkommen. Ich nutze das Bruhat-Tits-Gebäude, um die innere Struktur dieser Gruppen besser zu verstehen. Genauer gesagt untersuche ich ihre modularen Darstellungen[5], wobei hierfür die systematische Nutzung des Bruhat-Tits-Gebäudes eine recht neue Entwicklung ist. Motiviert wird meine Arbeit durch die tiefliegende Langlands-Vermutung der Zahlentheorie: Die konkreten Matrizengruppen, die wir oben betrachtet haben, liefern demnach dieselben Informationen wie gewisse Galoisgruppen. Das sind Gruppen eines ganz anderen Typs, die bislang deutlich schlechter verstanden sind und die mit vielen offenen Problemen der Zahlentheorie zu tun haben. In der Langlands-Vermutung geht es demnach um einen weiteren Schritt mathematischer Abstraktion: Sie betrifft zwei mathematische Strukturen scheinbar unterschiedlicher Natur, die von einem höheren Standpunkt aus gesehen aber sehr enge Beziehungen zueinander haben. Vielleicht hat Ihnen der Heawood-Graph mit seinem algebraischen Modell einen Eindruck davon gegeben, was das in der Mathematik bedeuten kann. Bei der Langlands-Vermutung sind die derzeitigen Herausforderungen allerdings ungleich größer. Arbeitsgruppen auf der ganzen Welt versuchen in gemeinsamer Anstrengung, ein wenig Licht in dieses mathematische Dunkel zu bringen. Konkret habe ich in meiner letzten Arbeit Garben betrachtet, deren Halme an den Blättern des Baumes... Doch bevor dieser Text ebenso fantastisch klingt wie die Erzählung von Peter Bichsel, danke ich Ihnen lieber fürs Lesen.

Summary

Buildings are geometric objects of a combinatorial nature. They are built from smaller elements called chambers and apartments. The article provides an introduction to this fascinating theory and explains the use of everyday language in mathematics. It starts out from the Heawood graph in Figure 1 and describes the algebraic model needed to analyze it. The author also comments on historical developments. Starting from Felix Klein's Erlangen programme, the interaction and the unification of algebra and geometry have become a driving force in modern mathematics. The theory of buildings was initiated by Abel Prize laureate Jacques Tits. It is part of this fascinating story. A particularly important class of buildings was introduced by Jacques Tits and François Bruhat. As an easy example, the article discusses the Bruhat-Tits tree shown in Figure 4. It also explains the connection with reflection groups via triangulated planes. At the end of the article the author briefly describes in which way buildings are relevant for his research. This concerns questions from number theory related to the Langlands programme.

Anmerkungen

1) Bichsel, 1997
2) Die volle Symmetriegruppe ist die Automorphismengruppe von G. Sie enthält G als normale Untergruppe vom Index 2, wobei die nicht triviale Nebenklasse von der inversen Transposition repräsentiert wird. Abstrakt ist diese Gruppe isomorph zu $PGL(2,F_7)$.
3) Abramenko & Brown, 2008, Chapter 6
4) Bruhat & Tits, 1972, 1984
5) Kohlhaase, 2017, 2018

Literatur

– Abramenko, Peter; Brown, Kenneth: Buildings, Theory and Applications, Graduate Texts in Mathematics 248, Springer, New York, 2008.
– Bichsel, Peter: Kindergeschichten, Suhrkamp, Frankfurt am Main 1997.
– Bruhat, François; Tits, Jacques: Groupes réductifs sur un corps local: I. Données radicielles valuées, Publications Mathématiques de l'I.H.É.S. 41, 1972, 5–251
– Bruhat, François; Tits, Jacques: Groupes réductifs sur un corps local: II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée, Publications Mathématiques de l'I.H.É.S. 60, 1984, 5–184
– Kohlhaase, Jan: Smooth duality in natural characteristic, Advances in Mathematics 317, 2017, 1–49
– Kohlhaase, Jan: Coefficient systems on the Bruhat-Tits building and pro-p Iwahori-Hecke modules, preprint 2018, arXiv:1802.10502

Der Autor

Jan Kohlhaase, geboren 1976, studierte Mathematik in Hamburg (1997–2002) und an der Purdue University (2000–2001) in den USA. Nach der Promotion an der Universität Münster (2005) wechselte er für einen einjährigen Forschungsaufenthalt an das I.H.É.S. in Bures-sur-Yvette. Jan Kohlhaase habilitierte sich an der Universität Münster (2011) und war Heisenberg-Stipendiat der DFG (2013–2014). Seit 2014 ist er Professor für arithmetische Geometrie an der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen. Seine Forschung betrifft die Darstellungstheorie p-adischer Liegruppen und ihre Anwendungen in der Zahlentheorie. Dass in seiner Arbeit vielfältigste Methoden der Algebra, Geometrie, Zahlentheorie und Funktionalanalysis zum Einsatz kommen, ist typisch für die interdisziplinären Entwicklungen innerhalb der modernen Mathematik.