Mathematische Objekte treten oftmals in ganz unterschiedlichen Zusammenhängen auf. Dieser Beitrag erzählt, wie Ideen der Zahlentheorie, der Geometrie und der mathematischen Physik beim Studium von Higgsbündeln überraschende Verbindungen finden.

Higgsbündel

Vom Kreisel zur Zahlentheorie

Von Jochen Heinloth

L'algèbre n'est qu'une géométrie écrite,
la géométrie n'est qu'une algèbre figurée.
Algebra ist nur geschriebene Geometrie,
Geometrie ist nur Algebra in Bildern.
Sophie Germain (1776–1831)

Als George Smith 1872 auf einer Keilschrift, die weit vor unserer Zeitrechnung entstanden war, die Geschichte der Sintflut fand, brachte dies das Verständnis von der Ordnung der Dinge gehörig durcheinander. Die Frage „Wie kann das sein?" ist für mich auch in der Mathematik besonders dann interessant, wenn die gleiche Geschichte unerwartet in ganz unterschiedlichen Zusammenhängen zum Vorschein kommt.

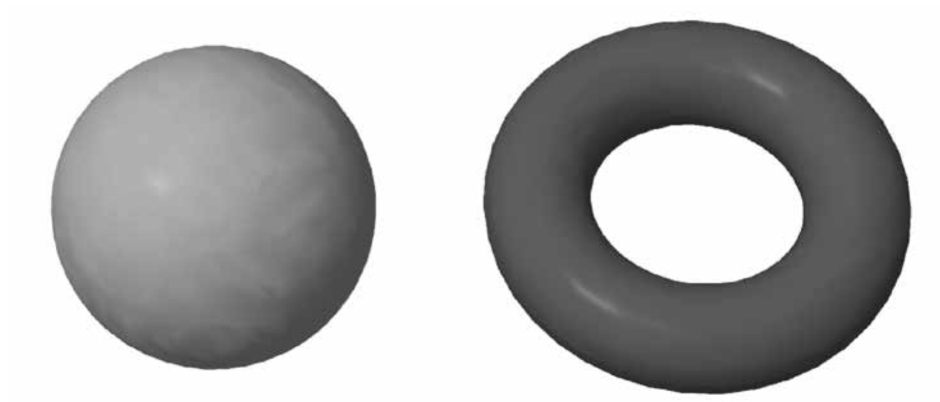
Eine besonders merkwürdige und bisher unerklärte Übereinstimmung einer zahlentheoretischen Berechnung mit einem geometrischen Resultat zu Singularitäten haben Mark de Cataldo, Tamás Hausel und Luca Migliorini beim Studium von Higgsbündeln beobachtet. Sie vermuten, dass uns zahlentheoretische Methoden erlauben, die Singularitäten in diesen ursprünglich physikalischen Systemen zu bestimmen.

Die Geschichte dieser sogenannten „$P=W$"-Vermutung und einiger jüngerer Resultate, die aus ganz unterschiedlichen Gründen auf Räume von Higgsbündeln geführt haben, möchte ich hier skizzieren.

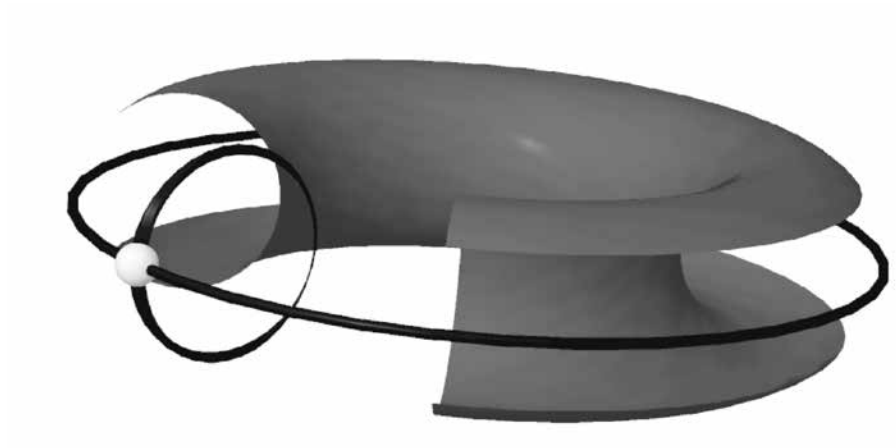
Zahlentheorie und Geometrie

Die Rolle von George Smith gebührt in dieser Geschichte zunächst André Weil, dem Bruder der französischen Philosophin Simone Weil. André Weil musste, da er versucht hatte, sich der Einberufung zu entziehen, als Deserteur in den vierziger Jahren einige Zeit im Gefängnis verbringen, wo er einen erstaunlichen Zusammenhang entdeckte. Seine Keilschrift stammte aus der Arithmetik, und die Überraschung, dort Geometrie zu finden, war auch für ihn sehr groß.

Jochen Heinloth. Foto: Vladimir Unkovic



(1) Eine Kugel und ein Torus.
Quelle: eigene Darstellung



(2) Eine Zerlegung des Torus.
Quelle: eigene Darstellung

Seine Entdeckung machte er zunächst an unscheinbaren geometrischen Objekten. Die einfachsten Beispiele sind die Kugeloberfläche und der Fahrradschlauch (Abb. 1).

Die beiden Objekte haben offensichtlich eine sehr unterschiedliche Geometrie. Ein charakteristischer Unterschied ist sicher das Loch in der Mitte des Schlauches. Dieses Loch können wir zum Beispiel daran erkennen, dass wir eine Bindfadenschleife, die wir einmal um den Schlauch herumlegen, nicht zusammenziehen können. Auf der Kugelobefläche lässt sich hingegen jede Schleife zusammenziehen.

Dieser Unterschied lässt sich wundersamerweise auch kombinatorisch aus einer Bastelanleitung für einen Schlauch ablesen. Das geht wie folgt: Die einfachste Art, einen Schlauch zu basteln, ist, ein rechteckiges Stück Stoff zu nehmen und davon jeweils die gegenüberliegenden Seiten zu verkleben (Abb. 2).

Die Klebekanten bilden danach eine verdrehte 8, bestehen also aus zwei Kanten, die an einem Punkt zusammenlaufen. Es genügt somit ein Flächenstück, das an zwei Kanten und einem Klebepunkt angeheftet wird.

Für eine Kugel könnten wir einfach den gesamten Rand des Stoffs zu einem Punkt zusammennähen. Der Unterschied (**1** Flächenstück, **2** Kanten, **1** Klebepunkt) für den Schlauch, gegenüber (**1** Flächenstück, **0** Kanten, **1** Klebepunkt) für die Kugel erkennt die zwei nicht zusammenziehbaren Schleifen auf der Schlauchoberfläche.

Ein klassischer Fußball, wie das Exemplar der WM 1974, besteht übrigens aus 32 Fünf- und Sechsecken, 90 Kanten und 60 Ecken. Dass 32–90+60=2=1–0+1 gilt, ist kein Zufall – die Wechselsumme Flächen – Kanten + Punkte ist für jede Zerlegung gleich. Die Anzahl der Löcher einer geschlossenen Fläche wie einer Kugel oder eines Fahrradschlauchs lässt sich daher aus einem beliebigen Bauplan ablesen.

Leider entstehen geometrische Objekte nicht immer unmittelbar in Form von Bildern, sondern gerade in physikalischen Modellen häufig zunächst durch Gleichungen. Für den Fahrradschlauch ist eine typische Form einer Gleichung

$$y^2 = x^3 - ax + b \qquad \text{(E)}$$

wobei *a* und *b* fast beliebige feste Zahlen sein können. Genauer gesagt ist die Lösungsmenge der Gleichung (in den komplexen Zahlen) ein echter Fahrradschlauch, da – wie für ein Ventil – ein Punkt „im Unendlichen“ fehlt.

Die geometrische Struktur der Lösungsmenge ist keineswegs offensichtlich. Diese wurde beim Studium elliptischer Funktionen entdeckt, und daher werden Gleichungen der Form *(E)* auch elliptische Kurven genannt.

Eine solche Gleichung haben Sie übrigens, vielleicht ohne es zu wissen, in Ihrem Personalausweis und Ihrem Reisepass immer dabei, wo diese für die Verschlüsselung Ihrer digital gespeicherten Daten sorgt.

Weils Ersatz für eine Keilschrift war eine fast ebenso alte Rechentechnik, die auch bei der erwähnten Verschlüsselung verwendet wird. Statt von großen Zahlen zu prüfen, ob diese eine Gleichung erfüllen, können wir die Zahlen – wie bei der Uhrzeit – nur bis auf Vielfache einer festen Zahl betrachten. Bei der Uhrzeit geben wir oft nur Stunden zwischen 1 und 12 an, rechnen also bis auf Vielfache von 12. Wir nennen 13 Uhr auch 1 Uhr und würden wohl auch 25 Uhr als 1 Uhr verstehen.

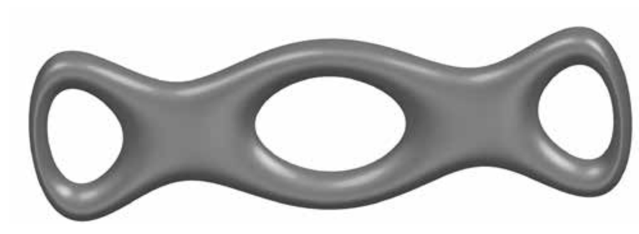
Ganz ähnlich können wir Fehler in Rechnungen manchmal einfach an der letzten Ziffer erkennen – das entspricht einer Rechnung bis auf Vielfache von 10. Ich möchte dieses Verfahren hier Uhrenarithmetik nennen.

Beim Versuch, die Anzahl der Lösungen einer Gleichung der Form *(E)* bis auf Vielfache einer Primzahl p zu zählen, fiel Weil auf, dass die Ergebnisse immer von der Form

$$p - a + 1$$

sind, wobei *a* die Summe **2**er komplexer Zahlen vom Betrag $p^{1/2} = \sqrt{p}$ ist.
Zählen wir die Lösungen hingegen für die Gleichung der Kugel, so erhalten wir p+1 Lösungen.
Das Muster $\mathbf{1} \cdot p - \mathbf{0} \cdot \sqrt{p} + \mathbf{1} \cdot 1$ für die Kugel entspricht den geometrischen Daten (**1**, **0**, **1**), und auch für die Gleichung (*E*) des Fahrradschlauches kam Weil das Ergebnis (**1**, **2**, **1**) aus der geometrischen Überlegung verdächtig bekannt vor. Er vermutete, dass der gleiche Zusammenhang für ganz allgemeine Gleichungssysteme gelten sollte, solange die geometrische Lösungsmenge weder Lücken noch Singularitäten, wie beispielsweise Ecken oder Knicke aufweist.

Diese Vermutung wurde von Pierre Deligne 1974 tatsächlich nachgewiesen, wofür er 1978 mit der Fields-Medaille geehrt wurde. Das Resultat ist nicht nur verblüffend, sondern auch nützlich, denn viele Probleme führen zu Gleichungssystemen, für die es sehr schwer ist, die geometrische Struktur der Lösungen zu verstehen. In der Uhrenarithmetik können wir – und unsere Computer – hingegen oft sehr schnell alle Lösungen finden, notfalls durch einfaches Ausprobieren. Delignes Resultat erlaubt uns dann, aus den Anzahlen der Lösungen in der Uhrenarithmetik viele der geometrischen Eigenschaften der Lösungsmengen abzulesen.



(3) Eine Fläche vom Geschlecht 3.
Quelle: eigene Darstellung

Dieser Trick, mit Hilfe von Zahlentheorie einen Eindruck von der Geometrie eines Problems zu gewinnen, hat sich als außerordentlich fruchtbar erwiesen – es ist eines meiner Lieblingsresultate.

Leider funktioniert dieser Trick bei singulären Problemen nicht gut. In den Beispielen, die de Cataldo, Hausel und Migliorini studiert haben, sind nun die Singularitäten besonders interessant und schwer zugänglich. Diese Beispiele, die sogenannten Modulräume von Higgsbündeln, haben ihren Ursprung – Sie ahnen es – in der mathematischen Physik.

Mathematik der Kreisel

Auch hier ist – ähnlich wie bei Weil – der Anfang ein ganz unscheinbares und sehr altes Problem: Die Modellierung der Bewegung von Kreiseln. Das Auftreten von Singularitäten in diesem Problem stelle ich mir als Ursache für die merkwürdigen, kaum vorhersehbaren Bewegungen vor, zu denen Kreisel kurz vor dem Umfallen neigen. Zunächst war die Frage aber natürlich, ob wir mathematisch verstehen können, wieso Kreisel nicht ohnehin permanent umfallen.

Um die Bewegung eines Kreisels zu modellieren, genügen im Prinzip die Newtonschen Bewegungsgleichungen. Diese exakt zu lösen, also tatsächlich eine Formel für Lösungen anzugeben, ist allerdings schon für einfache Modelle ein sehr schwieriges Unterfangen. Für die Bewegung von Kreiseln gab es sehr lange Zeit nur zwei Beispiele, für die eine exakte Lösung bekannt war. Erst Sophie Kowalevski gelang die Überraschung, ein weiteres, lösbares System zu finden, das seitdem ihren Namen trägt. Für diese Entdeckung erhielt sie 1888 den Prix Bordin der französischen Akademie der Wissenschaften und wurde kurz darauf Professorin an der Universität Stockholm, was im Jahr 1889 noch ein kleines Wunder war[1].

Zwei Besonderheiten von Kowalevskis Lösung sind für diesen Artikel bemerkenswert. Zunächst fiel ihr auf, dass es für die mathematische Behandlung des Problems hilfreich ist, die auftretenden Variablen – also auch die Zeit – als komplexe Variablen zu betrachten, auch wenn wir uns zur Beschreibung des physikalischen Systems schlussendlich nur für reelle Werte interessieren. Die zweite Besonderheit ist, dass in ihrer Arbeit eine kompliziertere Kurve eine Rolle spielt. In geometrischer Sprache sieht diese statt einem Fahrradschlauch eher einer Brezel ähnlich (Abb. 3), und dies macht ihre Lösung so interessant.

Die skizzierten Modelle sind die bekanntesten Beispiele sogenannter integrabler Systeme. Wie bei jeder Ballsportart ist klar, dass für die Vorhersage der Entwicklung hier nicht nur die räumlichen Positionen, sondern auch die Momentangeschwindigkeiten der Objekte wesentlich sind. Es ist merkwürdig, aber sehr hilfreich, die unabhängigen Variablen Ort und Geschwindigkeit als gleichwertige Koordinaten zu betrachten, was schon im Fall von Kreiseln mathematisch ein sechsdimensionales Problem darstellt. Die geometrische Beschreibung führt immer auf Modelle in gerader und meist großer Dimension.

Zur Lösung eines solchen Systems suchen wir zunächst Erhaltungsgrößen – auch Invarianten der Bewegung genannt – um die Dimension des Problems zu reduzieren. Ein System heißt integrabel, wenn die Anzahl der wesentlich verschiedenen Invarianten maximal ist, das heißt mit der Anzahl der Ortskoordinaten übereinstimmt. Mich interessiert die besondere geometrische Struktur, die einem solchen System zu Grunde liegt. Die Invarianten ordnen jedem Zustand des Systems eine Liste von Zahlen zu. Diese Zuordnung stelle ich mir geometrisch als Abbildung h vom Raum aller Zustände M in einen Raum von Erhaltungsgrößen A vor. Jede Liste von Invarianten bestimmt dann einen Unterraum in M, den die Zustände nicht verlassen können. Es stellt sich heraus, dass dieser Raum für die meisten Listen ein Torus ist und also wie eine höherdimensionale Version des Fahrradschlauches *(E)* aussieht.

Diese Räume lassen sich gut verstehen, denn wir können sie, so wie wir den Fahrradschlauch aus einem Rechteck zusammengebastelt haben, durch einfache Koordinaten linear beschreiben. Diese Struktur erklärt insbesondere periodische Bewegungen. Für manche Werte der Invarianten sind die zugehörigen Unterräume jedoch singulär und zerfallen dann oftmals in Teilstücke mit sehr unterschiedlichen geometrischen Eigenschaften.

Higgsbündel

Die integrablen Systeme, die mich besonders interessieren, wurden von Nigel Hitchin fast genau 100 Jahre nach Kowalewskis System entdeckt. Seine Konstruktion startet mit einer beliebigen geschlossenen Fläche und liefert viele neue, hochdimensionale Beispiele mit komplexer geometrischer Struktur. Für diese komplizierten Systeme gelang es ihm dennoch, eine maximale Anzahl an Invarianten zu konstruieren. Die zugehörige Abbildung h wird daher oft Hitchin-Faserung genannt.

Glücklicherweise sind diese Systeme außerordentlich symmetrisch, was mit einer Einsicht von Emmy Noether zusammenhängt, die eine direkte Beziehung zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen gefunden hat. Im Falle der Hitchin-Faserung lassen sich die Symmetrien des Systems zudem recht gut beschreiben, und wir können sogar eine geometrische Zerlegung des Raumes in relativ einfache Teile konstruieren.

Vor einigen Jahren gelang Ngô Bao Châu die Überraschung, mit Hilfe dieses Systems eine Frage aus der Zahlentheorie zu beantworten, die lange Zeit unangreifbar schien. Eine seiner Einsichten war, dass sich die Singularitäten, die in manchen Fasern auftreten, in einigen Fällen rein aus der genauen Konfiguration der nicht-singulären Zustände bestimmen lassen.

Das Argument von Ngô lässt sich leider nicht direkt auf Hitchins Systeme anwenden, sondern nur für eine Variante hiervon, in der nur für einen kleineren Teil der möglichen Listen von Invarianten singuläre Fasern auftreten. Für die ursprüngliche Hitchin-Faserung stellt sich hingegen heraus, dass einige, aber nicht alle singulären Zustände zum Verständnis des Systems nötig sind.

Hitchins Systeme treten noch in einem weiteren Zusammenhang auf. Hitchin stellte nämlich fest, dass seine Systeme, die er zunächst analytisch gefunden hatte, einige grundverschiedene algebraische Beschreibungen zulassen.

Die erste Beschreibung als integrables System haben wir bereits kennengelernt. Diese zeichnet sich durch die Vielzahl ihrer Symmetrien aus. In einer zweiten Beschreibung, als sogenannte Charaktervarietät, sind diese Symmetrien bisher nicht sichtbar geworden, aber dafür ist es einfacher, für diese Varietät explizit Gleichungssysteme anzugeben. Es gelang Hausel und Rodriguez-Villegas, für diese Beschreibung die Anzahlen der Lösungen in der Uhrenarithmetik zu zählen. Nun scheint dies zunächst ein sinnloses Unterfangen zu sein, da sich Delignes Resultat auf diese Gleichungen auf Grund von unbekannten Lücken in der Lösungsmenge nicht anwenden lässt. Das Ergebnis ihrer Berechnung ist allerdings so regelmäßig, dass sie vermuten, dass das geometrische Resultat zum einen eine ähnliche Form hat und sich zudem sogar eine arithmetische Feinstruktur (die sogenannte Gewichtsfiltrierung *W*) aus ihrer Formel ablesen lässt.

Diese Feinstruktur weist nun in dieser Formel ein sehr ungewöhnliches Muster auf, das de Cataldo und Migliorini an eine ganz andere Struktur (*P*) aus dem Studium singulärer Faserungen erinnerte.

Für besonders kleine Beispiele gelang es ihnen in einer Arbeit mit Hausel, beide Feinstrukturen exakt zu bestimmen, und tatsächlich fanden sie jeweils identische Ergebnisse. Sie vermuten daher, dass die arithmetische Feinstruktur eines Raumes, in dem wir keine Singularitäten sehen, mit der geometrischen Feinstruktur, die von den Singularitäten der Hitchin-Faserung herrührt, übereinstimmt.

Wie kann das sein?

Summary

Moduli spaces of Higgs bundles have appeared for different reasons in mathematical physics, topology and number theory. Recently, Marc de Cataldo, Tamas Hausel and Luca Migliorini observed a hitherto unexplained identity between invariants related to singularities of the integrable system defined by these spaces and arithmetic invariants of a closely related, non-singular space. They conjecture that this identity is a general phenomenon. In the article we survey the origins of this conjecture and show how they have connected very different areas of mathematics. In the process we indicate some of the unexpected applications that resulted from this passage between the different fields.

Anmerkungen/Literatur

1) M. Audin. Remembering Sofya Kovalevskaya. Springer, London, 2011.
2) M.A. de Cataldo, T. Hausel, L. Migliorini. Topology of Hitchin systems and Hodge theory of character varieties: the case A1. Ann. of Math. (2) 175 (2012), no. 3, 1329–1407.
3) O. García-Prada, J. Heinloth, A. Schmitt. On the motives of moduli of chains and Higgs bundles. J. EMS 16 (2014), no. 12, 2617–2668.
4) T. Hausel, F. Rodríguez-Villegas. Mixed Hodge polynomials of character varieties. (With an appendix by Nicholas M. Katz.) Invent. Math. 174 (2008), no. 3, 555–624.
5) N. Hitchin. Stable bundles and integrable systems. Duke Math. J. 54 (1987), no. 1, 91–114.
6) B.C. Ngô. Le lemme fondamental pour les algébres de Lie. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 111 (2010), 1–169.

Der Autor

Jochen Heinloth studierte Mathematik in Bonn. Nach seinem Diplom 1998 zog es ihn zunächst an die Université Paris-Sud, dann zurück an seine Heimatuni, wo er 2003 promovierte.
In den folgenden Jahren war er als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Max Planck Institut für Mathematik in Bonn, der Universität Göttingen und an der UDE tätig. Ab 2007 war Heinloth Assistant Professor an der Universität Amsterdam, seit 2011 ist er Professor für algebraische Geometrie an der UDE. Forschungsaufenthalte führten ihn nach Princeton, Paris, Chicago und Lausanne. Er ist am Transregio-Sonderforschungsbereich 45 „Perioden, Modulräume und Arithmetik algebraischer Varietäten" beteiligt.
Seine Forschungsschwerpunkte sind die Geometrie von Modulräumen und die geometrischen Langlands-Vermutungen.