

Wasserwellen faszinieren Menschen seit den frühen Kulturen. Wir geben einen kurzen Abriss der mathematischen Theorie der Wasserwellen und ihrer Entstehung. Aus mathematischer Sicht sind Wasserwellen sogenannte "traveling waves", welche auch für die Feststoffverbrennung und die Verbrennungssynthese von Bedeutung sind, auf deren Musterbildung wir kurz eingehen. Schließlich beschreiben wir Erweiterungen der traveling waves auf allgemeinere Konzepte wie pulsating waves und transition waves, die gegenwärtig in unserer Arbeitsgruppe untersucht werden.

Wellen und Fronten in der Mathematik

Wasserwellen und weitere Beispiele wandernder Wellen

Von Georg S. Weiss & Simon Eberle

Die mathematische Theorie der Wasserwellen

Anfänge und die französische Schule

Wasserwellen sind seit den frühesten Kulturen von Menschen beobachtet worden. Isaac Newton hat als Erster eine Theorie der Wasserwellen entwickelt (siehe [New87]), in welcher er vorschlägt, dass die Frequenz von Tiefwasserwellen umgekehrt proportional zur Quadratwurzel der „Breite der Welle“ ist. Nach Einführung der Gleichungen der Hydrodynamik durch Leonhard Euler beschäftigte sich Pierre-Simon Laplace mit Wasserwellen ([LPS76]). Er arbeitet in, was wir heute Lagrange-Koordinaten nennen würden, und schlägt eine spezielle Lösung für die Bewegung eines Flüssigkeitspartikels in der (X, Z) -Ebene vor. Erstaunlicherweise erhält er als Ergebnis die korrekte Frequenz

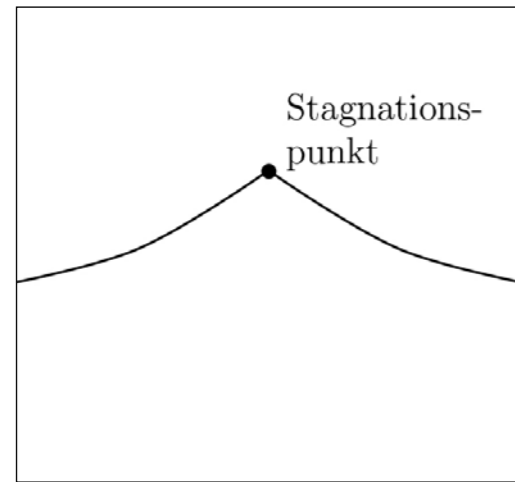
$$n = \sqrt{\frac{g}{c} \left(e^{\frac{\ell}{c}} - e^{-\frac{\ell}{c}} \right)} \sqrt{e^{\frac{\ell}{c}} + e^{-\frac{\ell}{c}}}$$

ebener Wellen mit Wellenzahl $1/c$ und kleiner Amplitude in Wasser der Tiefe ℓ .

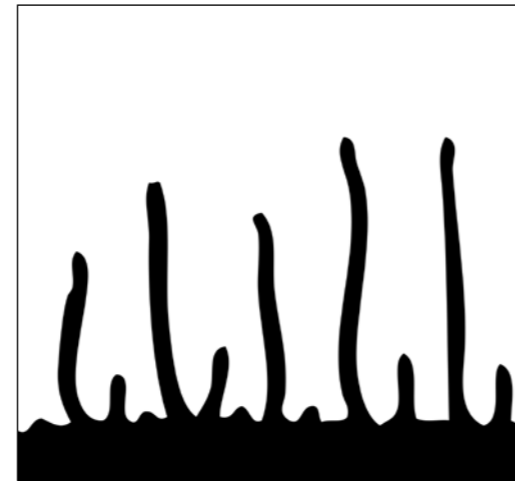
Im Juli 1815 schrieb die französische Académie des Sciences einen Wettbewerb mit dem Thema Oberflächenwellen aus, und der 25 Jahre alte A.-L. Cauchy gewann den Preis. Cauchy und S. D. Poisson (einer der Preisrichter des Wettbewerbs!) arbeiteten unabhängig am linearisierten Wasserwellenproblem. Mit modernen Methoden wie Fourier-Transformation und approximativer Auswertung von Integralen behandelten sie das allgemeine Anfangswertproblem, und konnten damit unter anderem die Geschwindigkeit berechnen, mit der sich lokale Störungen ausbreiten. Die Arbeiten [Poi18] und [Cau27] wurden übrigens aufgrund der neuen und schwierigen Methoden, aber auch aufgrund von kontra-intuitiven Resultaten, von der wissenschaftlichen Gemeinschaft des 19. Jahrhunderts nicht gut aufgenommen. So schreibt P. Kelland ([Kel40]) „*hope, that such men as Poisson and Cauchy will quit the delectable atmosphere in which they are involved, of abstruse analysis, for the more humble, but not less important task of endeavouring to treat the simpler problems in a manner not made general arbitrarily to lead to the most elegant formulae, but general to that extent, and in that mode, in which the problem in nature is so.*“



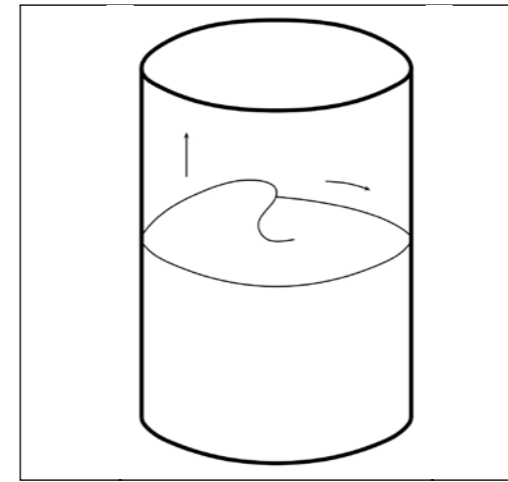
Georg S. Weiss: Foto: Vladimir Unkovic



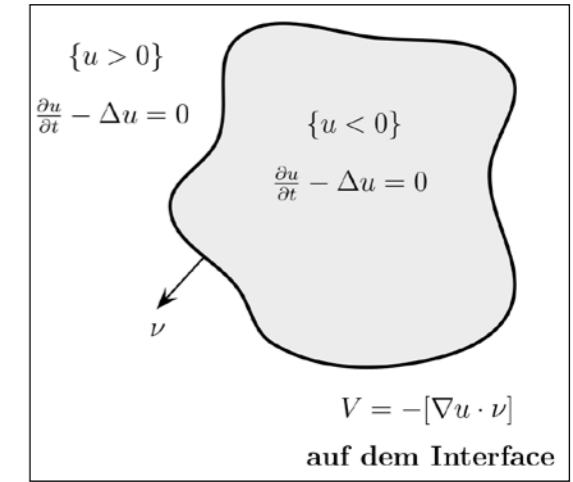
(1) Die Stokes'sche Extremwelle.
Quelle: eigene Darstellung



(2) Eine Verbrennungsfront in poröser Verbrennung.
Quelle: eigene Darstellung



(3) Eine schraubenförmige Verbrennungsfront.
Quelle: eigene Darstellung



(4) Das klassische Stefan-Problem.
Quelle: eigene Darstellung

Die englische Schule

In England arbeiteten J. S. Russell, G. Green, P. Kel-land, G. B. Airy und S. Earnshaw aus einer angewandteren Perspektive an Wasserwellen. Interessant ist, dass sie versuchten, die Nichtlinearität des Problems (beispielsweise die nichtlineare Bernoulli-Bedingung an der freien Oberfläche) zu berücksichtigen. Im Fall, dass die Vortizität der Flüssigkeit Null ist, kann das Innere der Flüssigkeit durch eine harmonische Funktion beschrieben werden. Darüberhinaus kann die freie Oberfläche der Flüssigkeit mittels konformen Abbildung auf eine Gerade transformiert werden. Unter Benutzung der Darstellungsformel für harmonische Funktionen im Halbraum kann man schließlich das ganze Problem (eigentlich ein System aus Differentialgleichungen im Inneren der Flüssigkeit und auf dem Rand) auf eine Integralgleichung auf dem Rand reduzieren, was zum Beispiel von Airy benutzt wurde (siehe [Air45]).

G. G. Stokes hat viel zur Theorie der Wasserwellen beigetragen. Einige der interessantesten Beiträge beziehen sich auf die Form der Wellenkämme. Stokes beobachtete auf der Themse, dass die Wellen in „Stagnationspunkten“, das heißt Punkten, in denen die Wasserpartikel die Geschwindigkeit Null haben, nicht glatt sind, sondern einen Winkel bilden. Konträr zur 90-Grad-Vermutung von Rankine vermutete Stokes, dass es sich um einen Winkel von 120 Grad handelt. Stokes gab einen formalen Beweis für seine Vermutung (siehe [Sto80]).

Die mathematische Theorie des 19. Jahrhunderts war jedoch von einem rigorosen Beweis dieser Vermutung weit entfernt (es stand nicht einmal eine Existenztheorie für das nichtlineare Problem zur Verfügung). Erst im 20. Jahrhundert konnte das Problem in mehreren Etappen behandelt werden.

Konstruktion von Wasserwellen und Beweis der Stokes'schen Vermutung

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurden zunächst in einer Reihe von Artikeln von A. I. Nekrasov ([Nek51]), T. Levi-Civita [LC25], D. J. Struik [Str26] und anderen Autoren mit analytischen Methoden Wasserwellen kleiner Amplitude konstruiert. 1961 konstruierte Ju. P. Krasovski Wellen mit Steigung $< \frac{1}{\sqrt{3}}$ (siehe [Kra61]), wobei er aber keine Kontrolle über die Amplitude der Wellen in der konstruierten Familie von Wellen erreicht. Keady-Norbury (1978) benutzen die Nekrasov'sche Integralgleichung

$$\phi(s) = \frac{1}{3} \int_0^\pi K(s, t) \frac{\sin \phi(t)}{\nu + \int_0^t \sin \phi}, 0 < s \leq \pi,$$

$$K(s, t) = \frac{1}{\pi} \log \frac{\sin \frac{1}{2}(s+t)}{\sin \frac{1}{2}|s-t|},$$

um die Existenz einer Familie glatter Wasserwellen bis (ausschließlich) zur kritischen Amplitude zu zeigen (siehe [KN78]). In den Jahren 1978 und 1979 bewiesen J. F. Toland ([Tol78]) und J. B. McLeod ([McL97]) die Existenz einer Extremwelle, das heißt einer Welle mit maximaler Amplitude ($\nu=0$). Die Forschung gipfelte in den Arbeiten von Amick-Fraenkel-Toland ([AFT82]) und P. I. Plotnikov ([Plo82]), in denen 1982, also nahezu zeitgleich, westlich und östlich des eisernen Vorhangs die Stokes'sche Vermutung erstmals rigoros bewiesen wurde. Die Beweise basieren auf Methoden der komplexen Analysis und erfordern daher einschränkende Voraussetzungen wie zum Beispiel Monotonie der Stromfunktion, Isoliertheit der Sin-

gularität usw. In [VW11] geben wir einen alternativen Beweis an, der weniger einschränkende Voraussetzungen verwendet und näher mit dem formalen Beweis von Stokes verwandt ist.

Die zeitabhängigen Euler-Gleichungen mit freier Oberfläche sind weitaus schwieriger, da sich das Problem dann nicht mehr auf das Studium einer semilinearen (skalaren) partiellen Differentialgleichung, bei der die freie Oberfläche eine Niveaulinie der Stromfunktion ist, vereinfachen lässt. Dennoch beschäftigen sich seit einigen Jahren Forscher*innen mit sogenannten *standing waves* (d.h. periodischen Lösungen), die den Objekten, die Stokes tatsächlich in der Natur beobachtet hat, näherkommen als Wasserwellen. Überraschenderweise gibt es auch hier wieder die Kontroverse 120 Grad versus 90 Grad bezüglich des Winkels, den die Welle in dem Raum-Zeit-Punkt ihrer maximalen Höhe bildet. Hier ist nicht einmal numerisch klar, was zu erwarten ist, so dass wir gespannt auf zukünftige Forschungsergebnisse sein können.

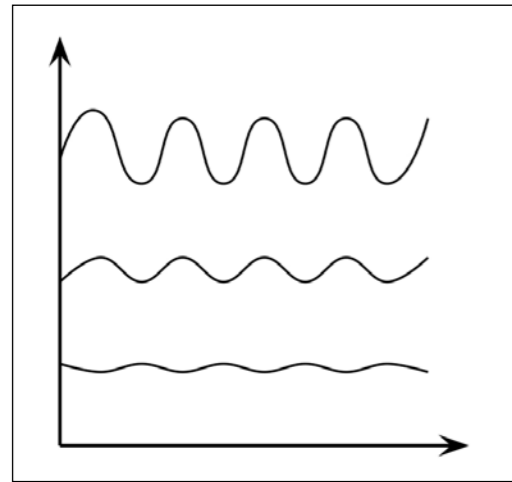
Das Beispiel der Feststoffverbrennung

Zur Erläuterung der Anwendung von *traveling waves* und *pulsating waves* gehen wir auf Beobachtungen und Modelle der Feststoffverbrennung ein. Feststoffverbrennung ist eine flammlose Form der Verbrennung poröser Medien. Man denke zum Beispiel an eine brennende Zigarette. Im Unterschied zur Verbrennung von Gasen diffundiert hier der Brennstoff nicht, und die Verbrennung erfolgt bei niedrigeren Temperaturen. Wichtige Anwendungen sind die Brandsicherheit und die Verbrennungssynthese. In den 1990er Jahren haben E. Moses-O. Zik-Z. Olami Experimente in Mikroschwerkraft durchgeführt (siehe [ZOM98]). Dabei wird eine in einer Hele-Shaw-Zelle (in diesem Fall zwei Glasplatten

mit Zwischenraum) befindliche Pappschicht an einem Ende der Hele-Shaw-Zelle angezündet und es wird von diesem Ende Luft hindurchgeblasen. Bei niedrigen Luftgeschwindigkeiten ist die Verbrennungsfront fast gerade, aber bei höheren Geschwindigkeiten bilden sich Instabilitäten in Form sogenannter Finger aus (vgl. Abb. 2).

Dies ist für die Brandsicherheit von Bedeutung, da die Finger sich schneller ausbreiten können als ebene Fronten. Mathematisch interessiert man sich deshalb häufig für die Stabilität oder Instabilität der ebenen/planaren *traveling wave*. Auch in der Verbrennungssynthese findet man Instabilität der planaren Welle: in diesem Fall wird ein zu synthetisierender Brennstoff in Zylinderform an einem Ende angezündet. An Stelle der erwarteten ebenen Verbrennungsfront beobachtet man eine schraubenförmige Verbrennungsfront, die sich drehend von einem Ende des Zylinders zum anderen fortbewegt (vgl. [INI04]).

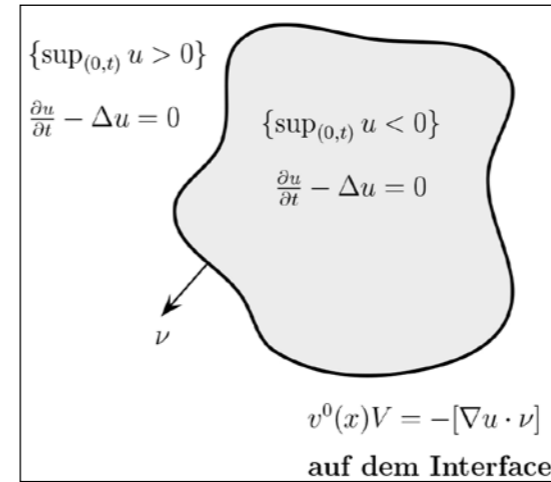
Eine solche Front kann mathematisch nicht mehr im Framework der klassischen *traveling waves* modelliert werden, man benötigt dafür sogenannte *pulsating traveling waves*, in Raum-Zeit periodische Funktionen, auf die wir später näher eingehen werden. Für die Anwendung der Verbrennungssynthese ist wichtig, dass damit eine Synthese bei niedrigeren Temperaturen (und damit niedrigerem Energieverbrauch) erreicht werden kann, die zudem reinere Produkte liefert. Die Schwester eines der Autoren hat berichtet, dass auch in der Raku-Keramik zu brennende (große) Gefäße in organischen Brennstoff eingebettet und an einem Ende angezündet werden. Man kann dabei die langsam wandernde Verbrennungsfront beobachten. Die Verbrennungssynthese könnte also eine sehr alte Technik sein. Das einfachste mathematische Modell der Feststoffverbrennung ist das Reaktions-Diffusions-System



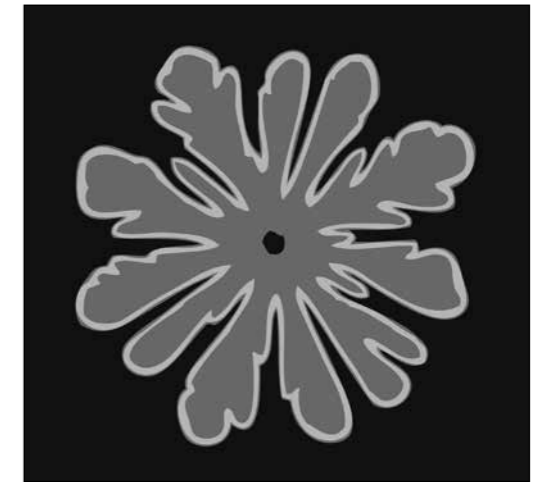
(5) Schema zur Instabilität der ebenen Welle.
Quelle: eigene Darstellung



(6) Schema eines Dendriten.
Quelle: eigene Darstellung



(7) Das irreversible Stefan-Problem mit variablen Koeffizienten.
Quelle: eigene Darstellung



(8) Schema zur Ausbreitung von Bakterien in der Petrischale.
Quelle: eigene Darstellung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = vf(u),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -vf(u).$$

Hier entspricht u der normalisierten Temperatur, v der normalisierten Konzentration des Reaktanten (des zu verbrennenden Feststoffes), und die nicht-negative monoton wachsende Funktion f beschreibt die Reaktionskinetik. Es werden Reaktionskinetiken vom Arrhenius-Typ, aber auch Reaktionskinetiken mit einem Sprung verwendet. Die partielle Differentialgleichung für u beschreibt dabei ein Gleichgewicht zwischen der Änderungsrate der Temperatur, der Diffusionsrate und der rechten Seite, während die partielle Differentialgleichung für v ein Gleichgewicht zwischen der Änderungsrate der Brennstoffkonzentration und der rechten Seite beschreibt.

A song of ice and fire

Im Regime hoher Aktivierungsenergie ergibt sich eine erstaunliche Verbindung zu klassischen Modellen der Solidifikation unterkühlten Wassers. Zur Untersuchung des Falles hoher Aktivierungsenergie gingen B. Matkowsky-Sivashinsky 1978 unter Verwendung der Arrhenius-Kinetik formal zum singulären Limes über (siehe [MS78]). Das System nimmt bei hoher Aktivierungsenergie die Form

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} - \Delta u_N = Ne^N v_N \exp(-N/u_N),$$

$$\frac{\partial v_N}{\partial t} = -Ne^N v_N \exp(-N/u_N),$$

an. Die Autoren argumentieren, dass das System für $N \rightarrow \infty$ gegen ein Limesproblem mit Sprung im Temperaturgradienten konvergieren soll. In späteren Arbeiten (siehe z.B. [Fra89]) wird das Limesproblem als das Stefan-Problem für das Gefrieren unterkühlten Wassers spezifiziert. Das Stefan-Problem (siehe Abb. 4) ist das einfachste Modell für das Gefrieren unterkühlten Wassers.

In dem Modell löst die Temperatur u in der flüssigen Phase und in der festen Phase jeweils die Wärmeleitungsgleichung, die Temperatur ist Null auf der (zeitabhängigen) freien Oberfläche zwischen Wasser und Eis und die Normalengeschwindigkeit V des Interfaces ist auf dem Interface gleich dem Sprung der Normalenableitung der Temperatur $V = [\nabla u \cdot \nu]$. Wichtig ist hier das Vorzeichen bzw. die Richtung des Normalenvektors. Im Stefan-Problem für das Gefrieren unterkühlten Wassers ist das Vorzeichen so gewählt, dass das Problem „schlechtgestellt“ wird. Drückt man die 4 Gleichungen in Distributionsform

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \chi\{u > 0\} - \Delta u = 0$$

aus, so wird klar, dass es sich um eine vorwärts-rückwärts-parabolische Differentialgleichung handelt: die Zeitableitung der Temperatur und die Zeitableitung der charakteristischen Funktion der Wasserphase haben verschiedene Vorzeichen. Das Problem ist sehr gut erforscht worden, und es ist bekannt, dass die planare Welle instabil ist, das heißt kleine Störungen der planaren Welle führen mit der Zeit zu immer größeren Oszillationen, die in diesem Fall sogar unbeschränkt sind.

Ivantsov konstruierte eine explizite *traveling wave* in Fingerform (siehe [Iva47]), welche ebenfalls instabil

ist, das heißt Störungen des Fingers führen zu Oszillationen am Fingerrand, die als sekundäre Fingerbildung bezeichnet werden. Solche Objekte sind als Dendriten bekannt. Hierzu wurden teure Experimente in Schwerelosigkeit (u.a. sogar im Space Shuttle) durchgeführt.

In der analytischen Arbeit [MW09] (siehe auch [GW13]) haben wir in einer Raumdimension rigoros die Konvergenz der Lösung u_ϵ aus der Verbrennungssynthese im Regime hoher Aktivierungsenergie gegen die Lösung eines irreversiblen Stefan-Problems (vgl. Abb. 7) bewiesen, allerdings enthält die dabei rigoros erhaltene freie Randbedingung variable Koeffizienten. In dem Artikel konstruieren wir auch eine große Klasse pulsierender Wellen (u.a. schraubenförmige Verbrennungsfrenten) für das Limesproblem mit variablen Koeffizienten.

Ähnliche Reaktions-Diffusions-Systeme wie das oben aus der Feststoffverbrennung erhaltene treten auch in der Modellierung des Wachstums von Bakterienkulturen auf (siehe [Kaw+97]).

$$\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} \rho = \epsilon^2 \epsilon D_\rho \nabla \cdot [\rho n \nabla \rho] + G_\rho \rho n$$

$$\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} n = \epsilon^2 D_n \Delta n - G_n n \rho$$

Hier bezeichnet ρ die Konzentration der Bakterien, n die Konzentration des Nutrients und ϵ , D_ρ , D_n , G_ρ und G_n sind positive Konstanten. Die numerisch und in Experimenten beobachtete Instabilität der sich kreisförmig ausbreitenden Front wird hier allerdings nicht durch den Reaktionsterm verursacht, sondern durch das Zusammenspiel der schwachen Diffusion der Konzentration der Bakterien und dem Reaktionsterm.

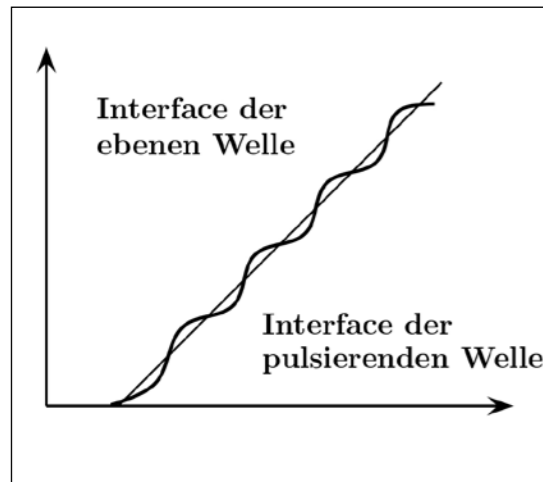
Die mathematische Formulierung wandernder und pulsierender Wellen

Der einfachste Fall einer *traveling wave* ist eine Funktion zweier Variablen der Form $u(x,t) = f(x-ct)$ für alle t und x . Die Funktion u wird also durch das Profil der Funktion einer Variablen f beschrieben, welches mit konstanter Geschwindigkeit c nach rechts wandert. Die Dimension des zugrundeliegenden Problems wird dabei um 1 reduziert. Im Falle einer planaren Welle in n Raumdimensionen ist $u(t,x) = f(x \cdot e - ct)$ für alle t und x ; hier ist e ein konstanter Vektor der Länge 1 und das Profil der Funktion f wandert mit konstanter Geschwindigkeit c in Richtung des Vektors e . Eine Welle oder Front in n Raumdimensionen muss aber nicht planar sein: die mit konstanter Geschwindigkeit in eine Richtung fortschreitenden Finger des Stefan-Problems für das Gefrieren unterkühlten Wassers sind ein Beispiel dafür. Dazu muss man die Definition der planaren Welle zu

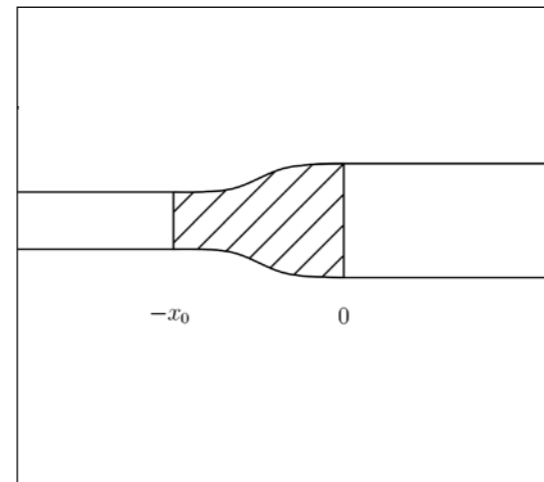
$$(P) \quad u(t,x) = u\left(t - \frac{y \cdot e}{c}, x + (y \cdot e) e\right)$$

erweitern; hier ist c die konstante Geschwindigkeit der Welle, und e ist ein konstanter Vektor der Länge 1, welcher die Richtung vorgibt, in die die Welle fortschreitet. Mit anderen Worten, u ist eine Funktion, die in einer bestimmten Richtung in Raum-Zeit konstant ist. Diese Definition lässt Objekte zu wie die mit konstanter Geschwindigkeit in eine Richtung fortschreitenden Finger.

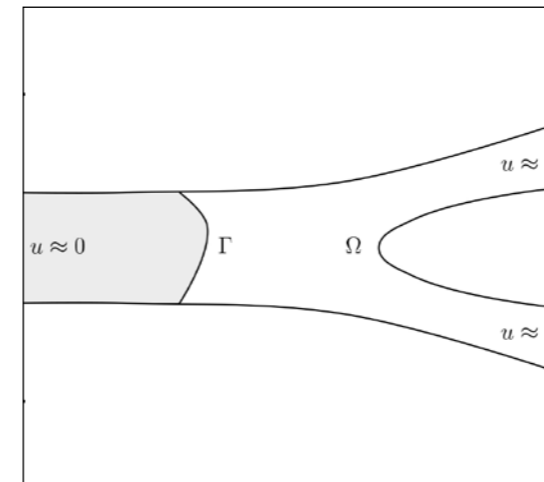
Ist aber das Medium, durch das die Welle oder Front sich bewegt, nicht konstant, so wird es im Allgemeinen keine Lösung der Form (P) geben, und man muss weiter verallgemeinern. Im Falle periodischer Medien führt



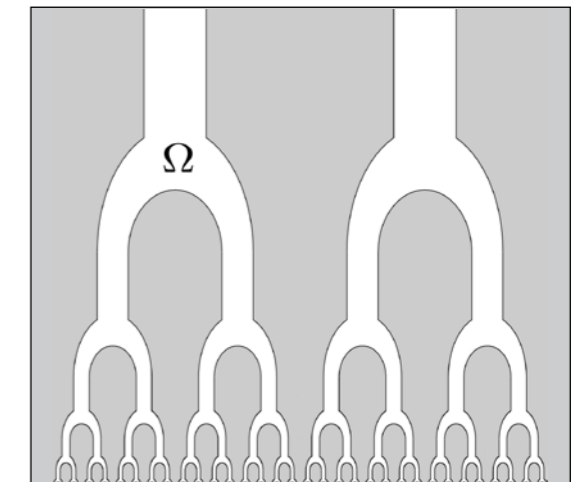
(9) Schema pulsierende Welle.
Quelle: eigene Darstellung



(10) Breiter werdender Kanal.
Quelle: eigene Darstellung



(11) Verzweigung eines Kanals.
Quelle: eigene Darstellung



(12) Selbstähnlich verzweigtes Gebiet.
Quelle: eigene Darstellung

diese Überlegung zu den sogenannten *pulsating traveling waves* (vgl. [BH02]). Dies sind Funktionen, die in einer bestimmten Richtung in Raum-Zeit periodisch sind, d.h.

$$u\left(t + \frac{k \cdot e}{c}, x\right) = u(t, x + k)$$

für alle Zahlen t , alle Vektoren k aus einem Gitter (z.B. \mathbf{Z}^n) und alle Vektoren x ; hier ist c die konstante Geschwindigkeit der Welle, und e ist ein konstanter Vektor der Länge l , welcher die Richtung vorgibt, in die die Welle fortschreitet.

Die Niveaulinie einer pulsierenden Welle in Raumdimension 1 könnte wie in Abbildung (9) aussehen:

Eine weitere Verallgemeinerung des Konzeptes der *traveling waves* stellen sogenannte *transition waves* dar (vgl. [BH12]). So kann man z. B. eine Front in einem Kanal betrachten, der kein Zylinder ist. Der Kanal könnte für $x_1 \rightarrow -\infty$ asymptotisch ein Zylinder des Durchmessers R_1 sein und für $x_1 \rightarrow +\infty$ asymptotisch ein Zylinder des Durchmessers R_2 .

Man könnte erwarten, dass eine Front, welche in Richtung des Kanals fortschreitet, asymptotisch (für $t \rightarrow \pm\infty$) gegen *traveling wave* Profile konvergiert (vgl. [Ebe18]), wobei die beiden Profile unterschiedlich sein können. Als Ergebnis analytischer Untersuchung gibt es aber auch noch eine dritte Möglichkeit, nämlich, dass gar keine Lösung mit diesen Eigenschaften existiert, d.h. die Front kann (für die vorgegebene partielle Differentialgleichung) die enger/breitere werdende Stelle des Kanals nicht überschreiten (siehe [BBC16]). Man spricht dabei von einem *blocking* Phänomen.

Noch komplexer sind sich verzweigende Kanäle (Abb. 11) (auch hier könnte man asymptotische Konvergenz gegen *traveling wave*-Profile beziehungsweise *blocking* erwarten) oder gar ein ganzes Netzwerk aus

diesen Verzweigungen. Strömungen, Diffusion und Transport in *verzweigten Gebieten* erregen in den letzten Jahren das Interesse der naturwissenschaftlichen und mathematischen Forschung. So werden zum Beispiel Strömungen in Blattvenen studiert (siehe [KSM10]), und es werden numerische Methoden zur Berechnung der Diffusion bis zu Lungenbläschen untersucht (vgl. [AST06]). Mathematisch konsequent modelliert führt dies zur Untersuchung von Strömungsgleichungen (bzw. Diffusions- oder Transportgleichungen) in Gebieten mit fraktalen Rändern, was neue mathematische Probleme aufwirft. Der Artikel [AST06] scheint uns von der Frage motiviert zu sein, wie Medikamente etc. in solch einem verzweigten Gebiet bis zu ihrem Bestimmungsort transportiert werden können, der auf einer viel höheren Verfeinerungsstufe liegt als der Ausgangsort, also nahe am fraktalen Rand. Als langfristige Ziele der mathematischen Analyse wären also Abschätzungen für die *effektive Geschwindigkeit* in solchen Medien denkbar. In unserer Arbeitsgruppe wird gegenwärtig die Ausbreitung in einem selbstähnlichen verzweigten Gebiet untersucht.

Die mathematische Formulierung hat Beziehungen zu den bereits angesprochenen *pulsating traveling waves*, aber es ergibt sich hier durch die Annahme der Selbstähnlichkeit des Mediums eine völlig neue algebraische Struktur. Mittelfristiges Ziel unserer Arbeitsgruppe ist die Existenz solcher *self-similar pulsating traveling waves*.

Summary

Water waves have been intriguing humans since the early civilizations. We briefly discuss the origins of the mathe-

mathical theory of water waves and its development in the 19th century, concluding our first section with research on “Stokes conjecture” as an example of recent research on water waves.

Water waves are special examples of so-called *travelling waves* and *fronts*. In our second example we consider models of smouldering combustion and self-propagating high-temperature synthesis (SHS). In experiments and simulation, the planar combustion front becomes unstable and fingers or screw-like fronts arise. In the regime of high activation energy, we point out a fascinating relation to a model of the freezing of super-cooled water. Similar models appear in the modelling of growing bacteria in a petri dish.

In the last section we describe the mathematical framework of *travelling waves*, beginning with *planar waves* and extending definitions to *pulsating waves* and *transition waves*, and hinting at even more general waves, which are currently one of the research topics in our group.

Literatur

- [AFT82] C. J. Amick, L. E. Fraenkel, and J. F. Toland. “On the Stokes conjecture for the wave of extreme form”. In: *Acta Math.* 148 (1982), pp. 193–214.
 [Air45] G.B. Airy. “Tides and waves”. In: *Encyclopedia Metropolitana* 5 (1845), pp. 241–396.
 [AST06] Yves Achdou, Christophe Sabot, and Nicoletta Tchou. “A multiscale numerical method for Poisson problems in some ramified domains with a fractal boundary”. In: *Multiscale Model. Simul.* 5.3 (2006), 828–860 (electronic).
 [BBC16] Henri Berestycki, Juliette Bouhours, and Guillemette Chapuisat. “Front blocking and propagation in cylinders with varying cross section”. In: *Calc. Var. Partial Differential Equations* 55.3 (2016), Art. 44, 32.

- [BH02] Henri Berestycki and Fran.ois Hamel. “Front propagation in periodic excitable media”. In: *Comm. Pure Appl. Math.* 55.8 (2002), pp. 949–1032.
 [BH12] Henri Berestycki and Fran.ois Hamel. “Generalized transition waves and their properties”. In: *Comm. Pure Appl. Math.* 65.5 (2012), pp. 592–648.
 [Cau27] A.-L. Cauchy. “Mmoire sur la th.orie de la propagation des ondes . la surface d’un fluide pesant d’une profondeur ind.finie”. In: *M.m. Pr.sent.s Divers Savans Acad. R. Sci. Inst. France* (1827), pp. 3–312.
 [Ebe18] S. Eberle. “A heteroclinic orbit connecting traveling waves pertaining to different nonlinearities in a channel with decreasing crosssection”. In: *Nonlinear Anal.* 172 (2018), pp. 99–114.
 [Fra89] M. L. Frankel. “On a free boundary problem associated with combustion and solidification”. In: *RAIRO Mod.l. Math. Anal. Num.r.* 23.2 (1989), pp. 283–291.
 [GW13] Peter V. Gordon and Georg S. Weiss. “Convective combustion in porous media: singular limit of high activation energy”. In: *Nonlinearity* 26.1 (2013), pp. 53–63.
 [INI04] Tsutomu Ikeda, Masaharu Nagayama, and Hideo Ikeda. “Bifurcation of a helical wave from a traveling wave”. In: *Japan J. Indust. Appl. Math.* 21.3 (2004), pp. 405–424.
 [Iva47] G. P. Ivancov. “The temperature field around a spherical, cylindrical or pointed crystal growing in a cooling solution”. In: *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* 58 (1947), pp. 567–569.
 [Kaw+97] K. Kawasaki et al. “Modeling spatiotemporal patterns generated by *Bacillus subtilis*”. In: *J. Theor. Biol.* 188 (1997), pp. 177–185.
 [Kel40] P. Kelland. “On the theory of waves, Part 1”. In: *Trans. R. Soc. Edinburgh* 14 (1840), pp. 497–545.
 [KN78] G. Keady and J. Norbury. “On the existence theory for irrotational water waves”. In: *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 83.1 (1978), pp. 137–157.
 [Kra61] Ju. P. Krasovski’i. “On the theory of steady-state waves of finite amplitude”. In: *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* 1 (1961), pp. 836–855.
 [KSM10] E. Katifori, G. J. Sz.ll si, and M. O. Magnasco. “Damage and Fluctuations Induce Loops in Optimal Transport Networks”. In: *Physical Review Letters* 104.4, 048704 (Jan. 2010), p. 048704. arXiv: 0906.0006 [physics.bio-ph].
 [Lap76] P.-S. Marquis de Laplace. “Suite des r.cherches sur plusieurs points du syst.me du monde”. In: *M.m. Pr.sent.s Divers Savans Acad. R. Sci. Inst. France* (1776), pp. 525–552.
 [LC25] T. Levi-Civita. “D.termination rigoureuse des ondes permanentes d’ampleur finie”. In: *Math. Ann.* 93.1 (1925), pp. 264–314.
 [McL79] J. B. McLeod. “The Stokes and Krasovskii conjectures for the wave of greatest height”. In: *Stud. Appl. Math.* 98.4 (1997), pp. 311–333.



Simon Eberle. Foto: Vladimir Unkovic

- [MS78] B. J. Matkowsky and G. I. Sivashinsky. "Propagation of a pulsating reaction front in solid fuel combustion". In: *SIAM J. Appl. Math.* 35.3 (1978), pp. 465–478.
- [MW09] R. Monneau and G. S. Weiss. "Pulsating traveling waves in the singular limit of a reaction-diffusion system in solid combustion". In: *Ann. Inst. H. Poincar. Anal. Non Lin.aire* 26.4 (2009), pp. 1207–1222.
- [Nek51] A. I. Nekrasov. *To naya teoriya voln ustanovivšegocya vida na poverhnosti tyazelo'izidkosti*. Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1951, p. 94.
- [New87] I. Newton. "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. London: Jussu Societatis Regiae ac Typis J. Streater. Engl. transl." In: (1687).
- [Plo82] P. I. Plotnikov. "Justification of the Stokes conjecture in the theory of surface waves". In: *Dinamika Sploshn. Sredy* 57 (1982), pp. 41–76.
- [Poi18] S.D. Poisson. "Mmoire sur la th.orie des ondes". In: *M.m. Pr.sent.s Divers Savans Acad. R. Sci. Inst. France* (1818), pp. 70–186.
- [Sto80] G.G. Stokes. "Considerations relative to the greatest height of oscillatory irrotational waves which can be propagated without change of form". In: *Mathematical and Physical Papers* 1 (1880).
- [Str26] D. J. Struik. "D.termination rigoureuse des ondes irrotationelles p.riodiques dans un canal . profondeur finie". In: *Math. Ann.* 95.1 (1926), pp. 595–634.
- [Tol78] J. F. Toland. "On the existence of a wave of greatest height and Stokes's conjecture". In: *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 363.1715 (1978), pp. 469–485.
- [VW11] Eugen Varvaruca and Georg S. Weiss. "A geometric approach to generalized Stokes conjectures". In: *Acta Math.* 206.2 (2011), pp. 363–403.
- [ZOM98] O. Zik, Z. Olami, and E. Moses. "Fingering instability in combustion". In: *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998), pp. 3668–3871.

Die Autoren

Georg Sebastian Weiss studierte von 1987 bis 1991 Mathematik an der Universität Bonn, wo er 1991 sein Diplom machte. Von 1991 bis 1995 arbeitete er als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe von Prof. H.W. Alt im Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn und im damaligen Sonderforschungsbereich 256. 1993 promovierte er in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn, wobei das Thema der Dissertation „A free boundary problem for non-radial-symmetric quasi-linear elliptic equations“ lautete. Von 1995 bis 1996 war er JSPS/Humboldt-Stipendiat an der Chiba University in Japan. 1996 wurde er Assistant Professor am Tokyo Institute of Technology in Tokyo (Japan), wo er bis 2000 arbeitete. Von 2000 bis 2010 begleitete er eine Stelle als Associate Professor in der Graduate School of Mathematical Sciences der University of Tokyo. Während dieser Zeit verbrachte er ein halbes Jahr (2005) als Max-Planck-Stipendiat am Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften in Leipzig. 2010 erhielt er zwei Rufe auf W3-Positionen von der Universität Leipzig und der Universität Düsseldorf, von denen er den letzteren annahm und bis 2014 an der Universität Düsseldorf arbeitete. In dieser Zeit erhielt er den Best Paper Award 2012–2013 der Zeitschrift *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*. 2014 erhielt er einen Ruf auf die W3-Stelle für Analysis Partieller Differentialgleichungen an der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen, im Rahmen derer er seit 2014 die Arbeitsgruppe Analysis Partieller Differentialgleichungen leitet. In seiner Forschung beschäftigt er sich mit nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, besonders mit Problemen mit freier Oberfläche und singulären Limes.

Simon Eberle studierte 2008 bis 2011 Mathematik mit Nebenfach Physik an der Technischen Universität München. Nach einem Studienaufenthalt an der ETH Zürich machte er 2013 seinen Master in Mathematik an der Universität Bonn. In seiner Masterarbeit beschäftigte er sich mit der Untersuchung von Existenz, Eindeutigkeit, Regularität und Langzeitverhalten einer nichtlinearen, nichtlokalen, skalaren Diffusionsgleichung unter Ausnutzung ihrer Gradientenstruktur (im

Bezug auf die 2-Wasserstein-Metrik). Er begann seine Promotion 2013 an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf bei Prof. Georg S. Weiss und folgte diesem 2014 an die Universität Duisburg-Essen. In seiner Forschung beschäftigt er sich vor allem mit der Ausbreitung beziehungsweise Nicht-Ausbreitung von transition waves in heterogenen Medien, aber auch mit nicht-periodischer Homogenisierung und mit der Regularität freier Ränder.