Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Menge $G := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ zusammen mit der durch

$$(a, b) \mapsto a + b + ab$$

definierten Verknüpfung eine abelsche Gruppe ist. Geben Sie ferner einen Isomorphismus $G \cong \mathbb{R}^\times$ an. (Hinweis: Sie können beide Aufgabenteile zugleich erledigen, indem Sie eine Bijektion zwischen G und $\mathbb{R}^\times$ angeben, welche die auf G gegebene Verknüpfung mit der Multiplikation auf $\mathbb{R}^\times$ identifiziert.)

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Ist G eine endliche abelsche Gruppe, so gilt $\prod_{g \in G} g^2 = 1$.

Aufgabe 3

Ist X eine Menge, so bezeichne $\mathrm{Bij}(X, X)$ die Gruppe der bijektiven Abbildungen von X nach X. Sei nun G eine Gruppe, und für $a \in G$ bezeichne

$$\tau_a \,:\, G \to G$$

die Abbildung, welche ein Element $g \in G$ auf ag abbildet.

a) Zeigen Sie, dass für alle $a \in G$ die Abbildung τ_a in $\mathrm{Bij}(G, G)$ liegt.

b) Zeigen Sie, dass die Zuordnung $a \mapsto \tau_a$ einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$G \hookrightarrow \mathrm{Bij}(G, G)$$

erklärt.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, sei $e_1 \in K^2$ der Standardbasisvektor $(1, 0)$, und es bezeichne $B \subseteq \mathrm{GL}_2(K)$ die Gruppe der invertierbaren oberen 2×2-Dreiecksmatrizen mit Einträgen in K. Zeigen Sie, dass die Zuordnung

$$gB \mapsto \langle ge_1 \rangle$$

eine wohldefinierte Bijektion zwischen $\mathrm{GL}_2(K)/B$ und der Menge der eindimensionalen K-Untervektorräume in K^2 erklärt, wobei $\langle ge_1 \rangle$ den von ge_1 in K^2 erzeugen K-Untervektorraum bezeichne.