Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n, und sei m eine zu n teilerfremde natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass zu jedem $x \in G$ genau ein $y \in G$ existiert, welches der Gleichung $x = y^m$ genügt. (Hinweis: Sie dürfen die Tatsache verwenden, dass ganze Zahlen a und b mit $am + bn = 1$ existieren.)

Aufgabe 2

Es seien $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$. Geben Sie einen Isomorphismus

$$\mathbb{C}^\times \;\cong\; \mathbb{R}_{>0} \times S^1$$

an, wobei $\mathbb{R}_{>0}$ die Gruppe der positiven reellen Zahlen bezeichne.

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Eine Permutation $\pi \in S_n$ heißt ein *Zyklus*, falls ein $r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sowie paarweise verschiedene Elemente $x_1, \dots, x_r \in \{1, \dots, n\}$ existieren mit

$$\begin{aligned}
\pi(x_i) &= x_{i+1} \quad \text{für} \quad 1 \leq i < r\,, \\
\pi(x_r) &= x_1 \quad \text{und} \\
\pi(x) &= x \quad \text{für} \quad x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{x_1, \dots, x_r\}\,.
\end{aligned}$$

In diesem Fall ist π eindeutig durch die x_i bestimmt, und wir verwenden die Schreibweise

$$\pi = (x_1, \dots, x_r)\,.$$

a) Sei $\pi = (x_1, \dots, x_r) \in S_n$ ein Zyklus, und sei $\sigma \in S_n$ beliebig. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\sigma\pi\sigma^{-1} \;=\; (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_r))\,.$$

b) Sei $V_4 \subseteq S_4$ die von den Elementen $(1,2)(3,4)$ und $(1,3)(2,4)$ erzeugte Untergruppe. Berechnen Sie die Ordnung von V_4, und zeigen Sie, dass V_4 ein Normalteiler von S_4 ist. (Die Gruppe V_4 heißt die Kleinsche Vierergruppe.)

Aufgabe 4

a) Sei G eine Gruppe, und sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe vom Index 2. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von G ist.

b) Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe G_0 mit Untergruppen $G_2 \subseteq G_1 \subseteq G_0$, derart dass G_2 ein Normalteiler in G_1 ist und dass G_1 ein Normalteiler in G_0 ist, ohne dass G_2 ein Normalteiler in G_0 ist. (Sie können hierfür Aufgabe 3 und Teilaufgabe a) verwenden.)