Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ betrachten wir den Ring

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{k + n\mathbb{Z}\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$$

der Restklassen modulo n sowie seine Einheitengruppe

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{k + n\mathbb{Z}\,;\, k \in \mathbb{Z}\,,\, \mathrm{ggT}(k,n) = 1\}\ .$$

a) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\ , \\ \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\ . \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie $\bar{7}^{350}$ sowie $\bar{2}^{1000}$ in $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$, wo $\bar{7}$ und $\bar{2}$ die Restklassen von 7 und 2 modulo 15 bezeichnen.

Aufgabe 2

a) Sei R ein endlicher Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

b) Sei K ein Körper, und sei R eine K-Algebra, welche als Ring integer und als K-Vektorraum endlichdimensional ist. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

c) Geben Sie ein Beispiel für einen Körper K und eine K-Algebra R mit $\dim_K R > 1$ an, welche die in Teilaufgabe b) geforderten Eigenschaften besitzen.

Aufgabe 3

Sei G eine endliche abelsche Gruppe, und es bezeichne u das Produkt aller Element aus G:

$$u = \prod_{g \in G} g\ .$$

a) Zeigen Sie: Besitzt G genau ein Element a der Ordnung 2, so gilt $u = a$.

b) Zeigen Sie den Satz von Wilson: Für jede Primzahl p gilt die Kongruenz

$$(p-1)! \equiv -1 \quad \text{modulo} \quad p\ .$$

(Bitte wenden.)

Aufgabe 4

Sei p eine Primzahl. Jede von 0 verschiedene rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}^\times$ besitzt eine Darstellung

$$x = p^n \cdot \frac{a}{b}$$

mit einem Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ und zu p teilerfremden ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Unter Verwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$ sieht man unmittelbar, dass die Zahl n von der Wahl einer solchen Darstellung unabhängig ist. Wir schreiben $\nu_p(x) = n$, und wir nennen $\nu_p(x)$ die *p-adische Bewertung von x*. Die Abbildung

$$\nu_p : \mathbb{Q}^\times \to \mathbb{Z}$$

heisst die p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$. Wir setzen

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \{ x \in \mathbb{Q}^\times ; \nu_p(x) \geq 0 \} \cup \{ 0 \} .$$

a) Zeigen Sie die Gleichheit

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} ; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, p \nmid b \} ,$$

und zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_{(p)} \subseteq \mathbb{Q}$ ein Unterring ist.

b) Zeigen Sie, dass zwei Elemente $x, y \in \mathbb{Z}_{(p)} \setminus \{0\}$ genau dann assoziiert sind, wenn ihre p-adischen Bewertungen übereinstimmen.

c) Bestimmen Sie alle Ideale von $\mathbb{Z}_{(p)}$.