Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Sei K ein Körper, sei $A = K[X,Y] = K[X][Y]$ der Polynomring über K in den Unbestimmten X und Y, und sei $R = A/(X^2 - Y^3)$.

a) Zeigen Sie, dass
$$\left\{ \sum_{i \geq 0} a_i Z^i \,;\, a_1 = 0 \right\} \subseteq K[Z]$$
ein Unterring von $K[Z]$ ist, und geben Sie einen Isomorphismus von R auf diesen Unterring an. Folgern Sie, dass R integer ist.

b) Zeigen Sie ferner, dass die Restklassen $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ von X und Y irreduzibel, jedoch nicht prim sind.

Aufgabe 2

Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Jede aufsteigende Kette von Idealen $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots \subseteq R$ in R wird stationär in dem Sinne, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_n$ für alle $i \geq n$.
2. Jedes Ideal in R ist endlich erzeugt.

Genügt der Ring R diesen beiden äquivalenten Bedingungen, so heisst R *noethersch*.

Aufgabe 3

Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler folgender Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$:
$$f = X^3 + X^2 + X - 3 \quad , \quad g = X^6 - X^5 + 6X^2 - 13X + 7 \quad .$$

Aufgabe 4

Es bezeichne $\mathcal{C}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, f \text{ stetig}\}$ die Menge der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Die Vorschriften
$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \quad \text{und} \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$
erklären auf $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ die Struktur eines kommutativen Ringes.

a) Bestimmen Sie das Einselement, die Einheiten sowie die Nullteiler in $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

b) Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir
$$\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,;\, f(x) = 0\} \,.$$
Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ein maximales Ideal ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ nicht noethersch ist (vgl. Aufgabe 2).

d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ keine irreduziblen Elemente und keine Primelemente enthält. (Die entsprechenden Definitionen sind sinngemäß auf nicht notwendig integre Ringe auszudehnen.)