Übungsblatt 6

Ist $c \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, so bezeichne $\mathbb{Z}[c]$ die von c in $\mathbb{C}$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra, d.h. das Bild des Homomorphismus

$$\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{C} \quad , \quad X \mapsto c \, ,$$

welcher für die Variable X das Element c einsetzt. Es sei $|\cdot|$ der gewöhnliche Absolutbetrag auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe 1

Sei $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$. In dieser Aufgabe studieren wir den Ring $\mathbb{Z}[\zeta]$ der sogenannten *Eisenstein-Zahlen*.

a) Zeigen Sie, dass $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$ gilt, und folgern Sie die Gleichung $\zeta = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Folgern Sie, dass zu jedem Element $c \in \mathbb{Z}[\zeta]$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ existieren, derart dass $c = a + b\zeta$ gilt. Skizzieren Sie $\mathbb{Z}[\zeta]$ als Teilmenge der komplexen Zahlenebene.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\zeta]$ euklidisch ist und dass $\mathbb{Z}[\zeta]^\times$ mit $\{c \in \mathbb{Z}[\zeta] \, ; \, |c| = 1\}$ übereinstimmt.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass zu jedem Element $c \in \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ existieren, derart dass $c = a + 2b\zeta$ gilt, mit $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Skizzieren Sie $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ als Teilmenge von $\mathbb{Z}[\zeta]$, vgl. Aufgabe 1, und zeigen Sie

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]^\times \; = \; \{c \in \mathbb{Z}[i\sqrt{3}] \, ; \, |c| = 1\} \; = \; \{\pm 1\} \; .$$

b) Betrachten Sie die Elemente $c_1 = 4$ und $c_2 = 2(1 + i\sqrt{3})$ von $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$. Zeigen Sie: Ist d ein gemeinsamer Teiler von c_1 und c_2, welcher von 2 geteilt wird, so ist d zu 2 assoziiert. Ist ferner d' ein gemeinsamer Teiler von c_1 und c_2, welcher von $1 + i\sqrt{3}$ geteilt wird, so ist d' zu $1 + i\sqrt{3}$ assoziiert. Folgern Sie, dass c_1 und c_2 in $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ keinen größten gemeinsamen Teiler besitzen.

Aufgabe 3

Sei R ein faktorieller Integritätsbereich, und sei K sein Quotientenkörper. Zeigen Sie: Ist $b \in K$ ein Element, für welches Elemente $a_0 \in R^\times, a_1, \ldots, a_n \in R$ mit

$$a_0 b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

existieren, so gilt $b \in R$.

Aufgabe 4

Sei R ein faktorieller Integritätsbereich, und seien $x, y \in R$ Elemente mit $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$ und

$$xy \; = \; z^n$$

für ein $z \in R$ und ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass Elemente $u, v \in R$ und $a \in R^\times$ existieren, für welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= a u^n \\ y &= a^{-1} v^n \end{aligned}$$

erfüllt sind.