Übungsblatt 7

Aufgabe 1

a) Sei $f : A \to B$ ein Homomorphismus von Ringen. Zeigen Sie, dass die Inklusion $f(A^\times) \subseteq B^\times$ gilt, und geben Sie ein Beispiel an, für welches sogar die strikte Inklusion $f(A^\times) \subsetneq B^\times$ gilt.

b) Sei $f : A \to B$ ein Isomorphismus von Integritätsringen. Zeigen Sie, dass für jedes Element $x \in A$ die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} x \in A \text{ irreduzibel} \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in B \text{ irreduzibel} \\ x \in A \text{ prim} \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in B \text{ prim} \end{aligned}$$

gelten. Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass keine dieser 4 Implikation für beliebige Ringhomomorphismen f gelten muss.

c) Sei R ein Integritätsring. Bestimmten Sie alle R-Algebra-Isomorphismen $f : R[X] \to R[X]$.

Aufgabe 2

Es bezeichne $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ den Körper mit 3 Elementen. Zerlegen Sie das Polynom

$$f = X^4 - X^3 + X^2 - X \in \mathbb{F}_3[X]$$

in irreduzible Faktoren, und bestimmen Sie die maximalen Ideale des Ringes $\mathbb{F}_3[X]/(f)$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie die Irreduzibilität der folgenden Polynome:

a) $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$

b) $X^2 + 5X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

c) $X^6 + X^3 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

Hinweis: Zur Lösung von Teilaufgabe c) kann es nützlich sein, den Ringautomorphismus von $\mathbb{Q}[X]$ zu betrachten, welcher X auf $X + 1$ abbildet.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, und sei $f = X^3 + aX + b \in K[X]$ ein Polynom, derart dass f und die Ableitung f' von f in $K[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfallen. Zeigen Sie: Die Nullstellen von f sind genau dann paarweise verschieden, wenn die *Diskriminante*

$$\Delta_f := -4a^3 - 27b^2$$

von f ungleich Null ist. Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass f genau dann eine mehrfache Nullstelle besitzt, wenn f und f' eine gemeinsame Nullstelle besitzen. Unterscheiden Sie die Fälle $3 \in K^\times$ und $3 \notin K^\times$.

Zusatzaufgabe

Zeigen Sie, dass das Polynom $X^2Y + XY^2 - X - Y + 1 \in \mathbb{Q}[X, Y]$ irreduzibel ist. Hinweis: Sie können das Reduktionskriterium auf geeignete irreduzible Elemente der Form $Y - \alpha \in \mathbb{Q}[Y]$ mit $\alpha \in \mathbb{Q}$ anwenden.