

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Sei L/K eine Körpererweiterung, und seien $\alpha, \beta \in L$ algebraisch über K ; wir setzen $m = [K(\alpha) : K]$, $n = [K(\beta) : K]$. Zeigen Sie: Ist $(m, n) = 1$, so gilt

$$[K(\alpha, \beta) : K] = mn .$$

Aufgabe 2

Wir betrachten die komplexen Zahlen $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\alpha = \sqrt[3]{2}$ und $\beta = \zeta\alpha$.

a) Zeigen Sie, dass

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\alpha)] \nmid [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$$

gilt.

b) Bestimmen Sie die Mengen

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}(\alpha)) , \\ & \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\alpha), \overline{\mathbb{Q}}) , \\ & \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{C}) \\ \text{sowie} & \quad \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\alpha, \beta), \mathbb{Q}(\alpha, \beta)) , \\ & \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\alpha, \beta), \overline{\mathbb{Q}}) \\ \text{und} & \quad \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\alpha, \beta), \mathbb{C}) . \end{aligned}$$

c) Welche der Erweiterungen $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q}(\alpha)$ und $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q}$ sind normal?

Aufgabe 3

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung, sei $\alpha \in L$ gegeben, und sei f das Minimalpolynom von α über K . Zeigen Sie:

a) Es stimmt f mit dem Minimalpolynom des K -Vektorraumendomorphismus

$$\varphi_{\alpha} : L \rightarrow L \quad , \quad x \mapsto \alpha x$$

überein.

b) Gilt $L = K(\alpha)$, so stimmt f mit dem charakteristischen Polynom von φ_{α} überein.

c) Im allgemeinen ist das charakteristische Polynom von φ_{α} stets eine Potenz von f .

Aufgabe 4

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung vom Grad n . Für ein $\alpha \in L$ gebe es K -Automorphismen σ_i von L , $1 \leq i \leq n$, mit $\sigma_i(\alpha) \neq \sigma_j(\alpha)$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass $L = K(\alpha)$ gilt.