Übungsblatt 10

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}((1+i)\sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$ normal sind, dass jedoch $\mathbb{Q}((1+i)\sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}$ keine normale Erweiterung ist.

b) Ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}$ normal?

Aufgabe 2

Es seien $a, b \in \mathbb{Q}$ rationale Zahlen, derart dass die Polynome $f = X^2 + a$ und $g = X^2 + b$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sind. Für welche a, b sind die Zerfällungskörper von f und g isomorph? Für welche a, b stimmen sie als Teilkörper von $\mathbb{C}$ überein?

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$, und sei L/K ein Zerfällungskörper von f.

a) Zeigen Sie, dass die Abschätzung $[L : K] \leq n!$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist, falls die Gleichheit $[L : K] = n!$ gilt.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper von positiver Charakteristik p, sei L/K eine Körpererweiterung, und sei $a \in L$ über K algebraisch. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) Das Element a ist separabel über K.

b) Es gilt $K(a) = K(a^p)$.

c) Ist $u_1, \dots, u_r$ ein über K linear unabhängiges System von Elementen aus $K(a)$, so ist auch das System $u_1^p, \dots, u_r^p$ über K linear unabhängig.

d) Die Körpererweiterung $K(a)/K$ ist separabel.

Hinweis: Zeigen Sie die Implikationen $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow a)$. Für die Implikation $b) \Rightarrow c)$ bietet es sich an, das gegebene linear unabhängige System zu einer Basis zu ergänzen. Für die Implikation $c) \Rightarrow d)$ lässt sich die Tatsache verwenden, dass das Minimalpolynom $\mathrm{Minpol}_K b \in K[X]$ eines über K inseparablen Elements $b \in K(a)$ ein Polynom in X^p ist.