Übungsblatt 11

Hinweis: Alle Aufgaben auf diesem Übungsblatt sind Zusatzaufgaben.

Aufgabe 1

Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ Elemente mit $a \neq b$, und seien $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{C}$ Nullstellen von $X^2 - a$ beziehungsweise von $X^2 - b$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})/\mathbb{Q}$ von dem Element $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ erzeugt wird.

Aufgabe 2

Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass L/K genau dann ein primitives Element besitzt, wenn nur endlich viele Zwischenkörper von L/K existieren. Beweisen Sie diese Aussage in den folgenden Schritten:

a) Diskutieren Sie zunächst den Fall, wo K endlich ist, so dass Sie im folgenden K als unendlich voraussetzen dürfen.

b) Nehmen Sie an, dass L/K von einem Element α erzeugt ist. Sei $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von α über K, sei M die Menge der Zwischenkörper von L/K, und sei N die Menge der normierten Teiler von f in $L[X]$. Zeigen Sie, dass die Zuordnung

$$K' \mapsto \mathrm{Minpol}_{K'}(\alpha)$$

eine injektive Abbildung von M nach N erklärt, und folgern Sie, dass M endlich ist.

c) Nehmen Sie umgekehrt an, dass L/K nur endlich viele Zwischenkörper besitzt. Folgern Sie zunächst, dass L/K endlich erzeugt ist, und reduzieren Sie die zu zeigende Aussage auf den Fall, dass L/K von zwei Elementen α, β erzeugt wird. Betrachten Sie nun die Zwischenkörper $K(\alpha + c\beta)$ von L/K, für Elemente $c \in K$, und zeigen Sie, dass ein $c \in K$ existiert, derart dass $K(\alpha + c\beta)$ mit L übereinstimmt.

Aufgabe 3

a) Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei L/K eine Körpererweiterung vom Grad p^2, für welche Elemente $u, v \in L$ existieren, derart dass L/K von u und v erzeugt wird und so dass $u^p, v^p \in K$ gilt. Zeigen Sie, dass L/K kein primitives Element besitzt.

b) Geben Sie ein Beispiel für eine Körpererweiterung L/K an, welche den in *a)* angegebenen Bedingungen genügt.

Aufgabe 4

Sei $p \geq 3$ eine Primzahl, sei $\zeta_p = e^{2\pi i/p} \in \mathbb{C}$ die kanonische primitive p-te Einheitswurzel, und sei $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. In Aufgabe 4 auf Blatt 8 haben wir gesehen, dass K eine Quadratwurzel von εp enthält, mit $\varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\Gamma := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, K)$ unter der durch Komposition gegebenen Verknüpfung eine Gruppe ist, und geben Sie einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, K) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$$

an.

b) Zeigen Sie: Für $\sigma \in \Gamma$ liegt $\chi(\sigma) := \sigma(\sqrt{\varepsilon p})/\sqrt{\varepsilon p}$ in $\{1, -1\} \subseteq \mathbb{Q}^\times$, und die Zuordnung $\sigma \mapsto \chi(\sigma)$ erklärt einen Homomorphismus von Gruppen $\chi : \Gamma \to \{1, -1\}$.

Wir wünschen Ihnen erholsame Feiertage und ein frohes und erfolgreiches Neues Jahr!