Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Sei p eine Primzahl, und sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Zeigen Sie:

a) Ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{F}_p[X]$ ist genau dann ein Teiler von $X^{p^n} - X$, wenn $\operatorname{grad} f$ ein Teiler von n ist.

b) Das Polynom $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$ ist das Produkt über alle irreduziblen normierten Polynome $f \in \mathbb{F}_p[X]$ mit der Eigenschaft, dass $\operatorname{grad} f$ ein Teiler von n ist.

Aufgabe 2

Sei p eine Primzahl, sei $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen, sei t eine Variable, und sei $\mathbb{F}_p(t)$ der Quotientenkörper von $\mathbb{F}_p[t]$.

a) Zeigen Sie, dass das Polynom $f = X^2 + t \in \mathbb{F}_p(t)[X]$ irreduzibel ist.

b) Sei L der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{F}_p(t)$. Bestimmen Sie $\operatorname{Aut}_{\mathbb{F}_p(t)}(L)$. Ist $L/\mathbb{F}_p(t)$ galoissch?

Aufgabe 3

Finden Sie einen Teilkörper $L \subseteq \mathbb{C}$, derart dass $L/\mathbb{Q}$ galoissch ist und so dass $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})$ zur symmetrischen Gruppe S_3 isomorph ist. Geben Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ explizit an.

Aufgabe 4

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, und seien $p_1, \ldots, p_n$ paarweise verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ über $\mathbb{Q}$ galoissch ist, und bestimmen Sie die Galoisgruppe von $L/\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie für $n = 2$ alle Zwischenkörper von L/K. Hinweis: Zeigen Sie mittels Induktion nach n, dass die Aussagen

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n \quad \text{sowie} \quad \operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$$

gelten. Für den Induktionsschritt können Sie folgendermaßen argumentieren: Betrachten Sie für $i = 1, \ldots, n-1$ die Elemente $\sigma_i \in \operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}})/\mathbb{Q})$, welche durch

$$\sigma_i(\sqrt{p_i}) = -\sqrt{p_i} \quad \text{sowie} \quad \sigma_i(\sqrt{p_j}) = \sqrt{p_j} \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n-1\,,\, j \neq i$$

definiert sind. Zeigen Sie, dass

$$E := \{x \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}})\,;\, \forall\, i = 1, \ldots, n-1 : \sigma_i(x) = x\}$$

mit $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}})$ übereinstimmt. Nehmen Sie an, dass $\sqrt{p_n}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}})$ enthalten ist, und führen Sie diese Annahme zu einem Widerspruch, indem Sie für $1 \leq i \leq n-1$ die Elemente $\sigma_i(\sqrt{p_n}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}})$ betrachten und ein Element

$$\sqrt{p_n} \prod_{1 \leq i \leq n-1} (\sqrt{p_i})^{\varepsilon_i} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}})$$

angeben, mit $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, welches in E enthalten ist.