Übungsblatt 13

Aufgabe 1

Sei K ein Körper, sei $f \in K[X]$ ein irreduzibles separables Polynom, und sei L/K der Zerfällungskörper von f über K. Zeigen Sie: Ist L/K abelsch, so gilt $L = K(\alpha)$ für jede Nullstelle $\alpha \in L$ von f.

Aufgabe 2

Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilkörper, so dass $L/\mathbb{Q}$ zyklisch vom Grad 4 ist. Zeigen Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ genau einen echten Zwischenkörper besitzt und dass dieser notwendig in $\mathbb{R}$ enthalten ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass der Teilkörper $L = \mathbb{Q}((1+i)/\sqrt{2})$ von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$ galoissch ist, und bestimmen Sie die Galoisgruppe sowie alle Zwischenkörper von $L/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, seien $\sqrt{2}$, $\sqrt[2^n]{3} \in \mathbb{R}_{>0}$, und sei $\alpha_n = \sqrt{2}/\sqrt[2^n]{3}$.

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α_n^{-1} über $\mathbb{Q}$, und zeigen Sie $[\mathbb{Q}(\alpha_n) : \mathbb{Q}] = 2^n$.

b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[2^n]{3})$ gilt. Hinweis: Schließen Sie mittels Induktion nach n, und verwenden Sie Teilaufgabe a). Für den Induktionsschritt folgern Sie aus der Annahme, dass $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[2^n]{3})$ enthalten sei, dass α_n in $\mathbb{Q}(\sqrt[2^{n-1}]{3})$ liegt.

c) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper des Polynoms $X^8 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ sowie seinen Grad über $\mathbb{Q}$.

d) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper des Polynoms $f = X^8 - 3 \in \mathbb{F}_5[X]$ sowie seinen Grad über $\mathbb{F}_5$. Hinweis: Zeigen Sie, dass $f \in \mathbb{F}_5[X]$ irreduzibel ist, indem Sie eine Nullstelle a von f betrachten und unter der Annahme, dass $m := [\mathbb{F}_5(a) : \mathbb{F}_5]$ der Abschätzung $m < 8$ genüge, die Gleichung $a^{5^m-1} = 1$ zu einem Widerspruch führen.