Klausur

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

a) Wann heißt eine algebraische Körpererweiterung normal?

b) Geben Sie die Definition des algebraischen Abschlusses $\bar{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$, und zeigen Sie, dass $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ nicht endlich ist.

Aufgabe 2 (5+10 Punkte)

Sei G eine Gruppe, und sei $N \subseteq G$ ein Normalteiler. Zeigen Sie:

a) Hat N die Ordnung 2, so gilt $ng = gn$ für alle $n \in N$ und alle $g \in G$.

b) Ist G/N zyklisch und gilt $ng = gn$ für alle $n \in N$ und alle $g \in G$, so ist G abelsch.

Aufgabe 3 (5+10 Punkte)

a) Handelt es sich bei dem Ring $\mathbb{Z}[X]/(X^3 - 3X - 15)$ um einen Integritätsbereich?

b) Sei a eine ganze Zahl. Zeigen Sie: Ist a ungerade, so ist $X^3 + X + a \in \mathbb{Z}[X]$ irreduzibel.

Aufgabe 4 (5+5+5 Punkte)

a) Warum ist $\sqrt[7]{5}$ keine rationale Zahl?

b) Liegt $\sqrt[6]{3}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{21})$? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Liegt $\sqrt[6]{3}$ in $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{18}})$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Sei K/k eine algebraische Körpererweiterung, und sei $a \in K$. Zeigen Sie: Besitzt das Minimalpolynom von a über k ungeraden Grad, so gilt $k(a) = k(a^2)$.

Aufgabe 6 (20 Punkte)

Sei $f = X^4 - 5X^2 + 6 \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper $K/\mathbb{Q}$ von f, seine Galoisgruppe sowie sämtliche Zwischenkörper von $K/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Galois-Erweiterung $E/\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ existiert.