Klausurvorbereitung

Wichtig: Bitte melden Sie sich online zur Teilnahme an der Klausur an! Verwenden Sie hierzu bitte das Webformular, welches unter der Adresse

`http://www.esaga.uni-due.de/christian.kappen/algebra1/klausuranmeldung/`

abrufbar ist.

Aufgabe 1

Wiederholen Sie die wichtigsten Definitionen der Vorlesung!

Aufgabe 2

Sei K ein endlicher Körper, und sei n eine positive natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass in $K[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n existiert.

Aufgabe 3

Wie in der Vorlesung bezeichne $\bar{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ den Teilkörper der über $\mathbb{Q}$ algebraischen komplexen Zahlen. Zeigen Sie, dass $\bar{\mathbb{Q}}$ algebraisch abgeschlossen ist. (Sie dürfen verwenden, dass $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist.)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie in dem Ring $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ alle Ideale sowie alle additiven Untergruppen.

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie die irreduziblen quadratischen Polynome in $\mathbb{F}_2[X]$.

b) Zeigen Sie, dass $X^4 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

c) Seien n und m teilerfremde positive natürliche Zahlen, und sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $X^n - p^m \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{Q}(\alpha^m)$ mit $\mathbb{Q}(\alpha)$ übereinstimmt, für $\alpha = \sqrt[n]{p}$.

Aufgabe 6

a) Sei $\zeta_{25} = e^{\frac{2\pi i}{25}}$. Liegt $\sqrt[4]{5}$ in $\mathbb{Q}(\zeta_{25})$? Hinweis: Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_{25})/\mathbb{Q}$ ist abelsch.

b) Liegt $\sqrt[4]{5}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{15})$?

Aufgabe 7

Sei L/K eine Körpererweiterung, seien $a, b \in L$ algebraisch über K, und seien f, g die Minimalpolynome von a beziehungsweise b über K. Zeigen Sie, dass f genau dann über $K(b)$ irreduzibel ist, wenn g über $K(a)$ irreduzibel ist.

Aufgabe 8

Sei $f = X^4 - 12X^2 + 35 \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper $K/\mathbb{Q}$ von f, seine Galoisgruppe sowie sämtliche Zwischenkörper von $K/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 9

Betrachten Sie die Elemente $a = (1,2)(3,4)$, $b = (1,2,3)(3,4,5)$ in S_6. (Für die hier verwendete Zykelschreibweise vergleichen Sie bitte Aufgabe 3 auf Übungsblatt 2.)

a) Berechnen Sie ab und ba.

b) Welche Ordnungen haben a und b?

Aufgabe 10

Sei G eine Gruppe, und sei $G' \subseteq G$ die Untergruppe, welche von den Elementen

$$ghg^{-1}h^{-1} \quad , \quad g,h \in G$$

erzeugt ist; es heisst G' die *Kommutatoruntergruppe* von G. Zeigen Sie:

a) Die Untergruppe $G' \subseteq G$ ist ein Normalteiler.

b) Die Gruppe G/G' ist abelsch.

c) Ist $N \subseteq G$ ein Normalteiler, so ist G/N genau dann abelsch, wenn $G' \subseteq N$ gilt.

Aufgabe 11

Bestimmen Sie alle Gruppen der Ordnung ≤ 6.

Liste der besonders relevanten Übungsaufgaben:

Blatt	**Aufgaben**
1	1,2,3
2	3,4
3	1,2,4
4	1,2,3
5	2,3
1	1,2,3
6	3,4
7	1,2,3
8	1,2,3
9	1,2,4
10	1,2,3
11	–
12	1,2,3,4
13	1,2,3