Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Mathematisches Institut

Kongruenzen von Néron-Modellen für Tori

Diplomarbeit

vorgelegt von Christian Kappen
bei Herrn Prof. Dr. S. Bosch
4. Juli 2005

Christian Kappen
Lerchenhain 28
48301 Nottuln

kappenc@uni-muenster.de

Manchmal hat man eine sehr lange Straße vor sich. Man denkt, die ist so schrecklich lang; das kann man niemals schaffen, denkt man. Und dann fängt man an, sich zu eilen. Und man eilt sich immer mehr. Jedesmal, wenn man aufblickt, sieht man, daß es gar nicht weniger wird, was noch vor einem liegt. Und man strengt sich noch mehr an, man kriegt es mit der Angst, und zum Schluß ist man ganz außer Puste und kann nicht mehr. So darf man es nicht machen. Man darf nie an die ganze Straße auf einmal denken, verstehst du? Man muß nur an den nächsten Schritt denken, an den nächsten Atemzug, an den nächsten Besenstrich. Und immer wieder nur an den nächsten. Dann macht es Freude; das ist wichtig, dann macht man seine Sache gut. Und so soll es sein. Auf einmal merkt man, daß man Schritt für Schritt die ganze Straße geschafft hat. Man hat gar nicht gemerkt wie, und man ist nicht außer Puste. Das ist wichtig.

Michael Ende

Gesetzt mit LaTeX 2ε, AMS-LaTeX
„Commutative Diagrams in TEX 4“ von Paul Taylor
„FancyHdr“ von Piet van Oostrum
„TitleSec“ von Javier Bezos

Vorwort

Sei K ein vollständig diskret bewerteter Körper, und sei T ein algebraischer Torus über K. Dann existieren das Néron-Modell $\underline{T}^{\mathrm{NR}}$ von T und seine maximale beschränkte Untergruppe $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ über dem Ring R der ganzen Elemente von K. In der Arbeit [CY] beweisen C.-L. Chai und J.-K. Yu, daß die n-te Reduktion $\underline{T}_n^{\mathrm{NR},b}$ von $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ für $m \gg 0$ durch die m-te Reduktion $\mathrm{red}_m T = (R_m, R_{L,m}, \Gamma, \Lambda)$ eines zu T/K assoziierten Datums $(R, R_L, \Gamma, \Lambda)$ determiniert ist, welches wir wieder mit T bezeichnen. Sind also T, T' Torusdaten über vollständig diskret bewerteten Körpern K und K', so induziert ein Isomorphismus $\mathrm{red}_m T \cong \mathrm{red}_m T'$ reduzierter Torusdaten in kanonischer Weise einen Isomorphismus $\underline{T}_n^{\mathrm{NR},b} \cong \underline{T'}_n^{\mathrm{NR},b}$ über den entsprechenden abgeschnittenen Bewertungsringen. Diese Einsicht ermöglicht es, Aussagen über vollständig bewertete Körper in gemischter Charakteristik auf den Fall gleicher positiver Charakteristik zu übertragen.

Ausgangspunkt der Überlegungen von Chai und Yu war die Frage nach der Isogenieinvarianz einer charakteristischen Größe $c(T)$ von T, welche ein Maß für die Änderung der Größe von $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ bei Erweiterung des Grundkörpers K darstellt. Ist K von Charakteristik Null, so ist $c(T)$ gleich der Hälfte des Artin-Führers der rationalen Darstellung von Γ durch die Kocharaktergruppe Λ von T. In Verbindung mit Delignes Theorie zur Approximation lokaler Körper in gleicher positiver Charakteristik durch Körper in gemischter Charakteristik ([D]) zeigt Theorem [CY] 8.5, daß diese Aussage auch im Fall $\mathrm{char}\, K > 0$ Gültigkeit besitzt.

Gegenstand der vorliegenden Diplomarbeit ist der Beweis von Theorem [CY] 8.5. Um die Reduktion von $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ zu studieren, bedienen sich Chai und Yu eines expliziten Verfahrens zur Konstruktion eines Schemas, welches die glatte Garbe $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ repräsentiert. Ist L/K eine endliche Galois-Erweiterung, welche T entfaltet, und ist R_L der ganze Abschluss des Bewertungsrings R von K in L, so ist R_L über R endlich und frei. Sei $\underline{T}^0$ der schematische Abschluss von T in der Weil-Restriktion der maximalen beschränkten Untergruppe $\underline{T_L}^{\mathrm{NR},b}$ des Néron-Modells $\underline{T_L}^{\mathrm{NR}}$ von T_L über R_L; dann identifiziert sich $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ mit der Gruppenglättung von $\underline{T}^0$. Somit reduziert sich das Problem darauf, einerseits die Reduktion von $\underline{T}^0$ zu studieren und andererseits den Prozess der Gruppenglättung von $\underline{T}^0$ zu kontrollieren.

Ein wichtiges technisches Hilfsmittel im Beweis des Theorems von Chai und Yu sind vollständige Durchschnitte. Im ersten Kapitel dieser Arbeit widmen wir uns der lokalen Algebra, welche der Theorie der vollständigen Durchschnitte zugrundeliegt; wir untersuchen unter Verwendung homologischer Methoden Eigenschaften regulärer Folgen, geben eine intrinsische Charakterisierung vollständiger Durchschnittsringe und behandeln Eigenschaften regulärer noetherscher Ringe. Im zweiten Kapitel übertragen wir diese Resultate in die Theorie relativer Schemata, wobei wir unter anderem zeigen, daß sich die n-te Reduktion eines vollständigen Durchschnitts durch die n-te Reduktion einer bestimmten Punktmenge rekonstruieren läßt. In Kapitel 3 klären wir den Zusammenhang zwischen Glattheit und Regularität, und im vierten Kapitel beweisen wir die Tatsache, daß affine flache Gruppenschemata endlichen

Typs die Eigenschaft vollständiger Durchschnitte besitzen. Kapitel 5 liefert das Resultat, daß die n-te Reduktion bestimmter Punktmengen eines Schemas mit glatter generischer Faser für $m \gg 0$ bereits durch die m-te Reduktion des betrachteten Schemas festgelegt ist. Gegenstand von Kapitel 6 ist das angewendete Verfahren zur Konstruktion des Néron-Modells eines Torus. In Kapitel 7 beweisen wir schließlich unter Verwendung aller bis dahin bereitgestellten Hilfsmittel das Theorem [CY] 8.5. Wir rekonstruieren die Reduktion von $\underline{T}^0$ anhand von Punktmengen eines kanonisch zu T assoziierten R_L-Schemas $\underline{T}'$, in welches sich der Pullback von $\underline{T}^0$ einbettet. Zur Kontrolle des Glättungsprozesses untersuchen wir insbesondere das Reduktionsverhalten von Dilatationen glatter Schemata. Abschließend formulieren wir das bewiesene Theorem im Rahmen von Delignes Theorie und skizzieren die Strategie zur Berechnung der Invarianten $c(T)$.

Münster, im Juli 2005 Christian Kappen

Notationen

Unter einem Ring verstehen wir stets einen kommutativen Ring mit Einselement. Wir schreiben $\mathbb{N}$ für den Monoid der natürlichen Zahlen, $\mathbb{Z}$ für den Ring der ganzen Zahlen und $\mathbb{Q}$ für den Körper der rationalen Zahlen. Das Symbol id bezeichnet im jeweiligen Kontext stets die identische Abbildung. Ist A ein Ring, so bezeichnen $M(A, m, n)$ den A-Modul der $m \times n$-Matrizen mit Werten in A und $M(A, n)$ den Ring $M(A, n, n)$; für die n-te Einheitsmatrix $1 \in M(A, n)$ schreiben wir 1_n. Ist M ein A-Modul, so schreiben wir $\mathrm{Ann}_A(M)$ für das Ideal der Elemente aus A, welche M annullieren; ist ferner $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$ eine Folge von Elementen in A, so bezeichnet $\mathrm{Ann}_M(\boldsymbol{x})$ den A-Untermodul der Elemente von M, welche durch sämtliche x_i annulliert werden. Mit $\mathrm{Supp}(M)$ bezeichnen wir das abgeschlossene Unterschema $\mathrm{Spec}\, A/\mathrm{Ann}_A(M)$ von $\mathrm{Spec}\, A$; es beinhaltet genau die Primideale $\mathfrak{p}$ von A, für welche der Halm $M_{\mathfrak{p}}$ nicht verschwindet. Ist A ein lokaler Ring, so bezeichnet stets $\hat{A}$ die maximaladische Komplettierung von A. Ist R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K, so bezeichnen R^{sh} und K^{sh} die strikte Henselisierung von R beziehungsweise K.

Inhalt

1. Reguläre Ringe und vollständige Durchschnittsringe

In diesem Kapitel behandeln wir die Theorie der regulären noetherschen Ringe und der vollständigen Durchschnittsringe. Reguläre noethersche lokale Ringe sind eng verwandt mit Lokalisierungen von Polynomringen. Besitzt ein lokaler noetherscher Ring A eine Darstellung als Quotient B/I eines regulären lokalen noetherschen Rings B, derart daß das Ideal I durch eine reguläre Folge erzeugt ist, so heißt A ein vollständiger Durchschnittsring.

Es stellt sich die Frage, ob ein vollständiger Durchschnittsring A bereits bezüglich jeder Darstellung $A = B'/I'$ als Quotient eines regulären lokalen noetherschen Rings B' durch ein reguläres Ideal gegeben ist. Sie läßt sich positiv beantworten, wie wir in Abschnitt 1.4 beweisen werden. Dort werden wir auch sehen, daß eine charakterisierende Eigenschaft vollständiger Durchschnittsringe in der Dimension der ersten Homologie eines Koszul-Komplexes verborgen liegt.

Ferner stellt sich die Frage, ob jeder lokale noethersche Ring als Quotient eines regulären lokalen noetherschen Rings darstellbar ist. Dies ist für Lokalisierungen von Algebren endlichen Typs über Körpern offensichtlich der Fall; nach dem Strukturtheorem von Cohen besitzen auch beliebige vollständige lokale noethersche Ringe diese Eigenschaft. Wir entwickeln im folgenden die Theorie vollständiger Durchschnittsringe im Rahmen beliebiger lokaler noetherscher Ringe; hierbei stützen wir uns auf das Strukturtheorem von Cohen. Für spätere Anwendungen im Rahmen der Theorie vollständiger Durchschnitte könnten wir uns auf Lokalisierungen von Algebren endlichen Typs über Körpern beschränken; die Argumentationen in den Beweisen führen nicht aus dieser Kategorie heraus, so daß wir Cohens Struktursatz nicht benötigten. In [EGA IV] 19.3.2 beantwortet Grothendieck die zuerst formulierte Frage unter Verwendung von Faserprodukten von Ringen; würden wir diesem Zugang zur Theorie der vollständigen Durchschnittsringe folgen, so ließe sich Cohens Struktursatz wohl in jedem Fall nicht umgehen.

1.1 Reguläre Folgen

Reguläre Folgen verallgemeinern den Begriff des Nichtnullteilers; sie bilden das Fundament von [EGA IV]. In Abschnitt 1.1.1 stellen wir einige elementare Eigenschaften regulärer Folgen zusammen. Induktionsbeweise im Zusammenhang mit regulären Folgen basieren oft auf der Struktur der Menge der Nullteiler eines Rings, welche wir in Abschnitt 1.1.2 untersuchen. Eine umfassende Behandlung regulärer Folgen erfordert Methoden der homologischen Algebra. Wir entwickeln diese in Abschnitt 1.1.3; sie werden insbesondere in Unterkapitel 1.4 bei der Charakterisierung vollständiger Durchschnittsringe Anwendung finden. Unter Verwendung des Apparats der Koszul-Homologie studieren wir in Abschnitt 1.1.4 Cohen-Macaulay-Ringe, für welche der Krullsche Dimensionsbegriff mit dem Konzept der regulären Folgen harmoniert. Das zentrale Theorem dieses Unterkapitels geht wesentlich in den Beweis zur homologischen Charakterisierung vollständiger Durchschnittsringe ein.

1.1.1 Elementare Eigenschaften regulärer Folgen

Wir definieren den Begriff der regulären Folge und zeigen einige direkt zugängliche Eigenschaften regulärer Folgen in lokalen noetherschen Ringen: Sei A ein lokaler noetherscher Ring. Die Regularität einer Folge in A ist invariant unter Permutationen und unter Potenzierung von Folgengliedern. Ist $I \subset A$ ein reguläres echtes Ideal, so bildet jedes minimale Erzeugendensystem von I bereits eine reguläre Folge. Die Regularität eines echten Ideals in A läßt sich nach treuflachem Basiswechsel verifizieren.

1.1.1 Definition. *Sei M ein Modul über einem Ring A. Ein Element $x \in A$ heißt M-regulär, falls die Multiplikationsabbildung $M \to M, w \mapsto x \cdot w$ injektiv ist. Eine Folge $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ von Elementen in A heißt M-regulär oder eine M-Folge, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(*a*) *Das Element $x_i \in A$ ist $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$-regulär $(1 \leq i \leq n)$.*

(*b*) *$M/\boldsymbol{x}M \neq 0$.*

Ist nur die erste der beiden angegebenen Bedingungen erfüllt, so heißt $\boldsymbol{x}$ M-quasi-regulär. Eine A-(quasi-)reguläre Folge in A nennen wir kurz (quasi-)regulär. Ein Ideal $I \subset A$ heißt regulär, falls es von einer regulären Folge erzeugt wird. Ist B eine A-Algebra, so bezeichnen wir ein B-reguläres Element $x \in A$ auch als Nichtnullteiler in B.

Bemerkung. Ist $A = (A, \mathfrak{m}, k)$ lokal, $M \neq 0$ über A von endlichem Typ und $\boldsymbol{x}$ eine Folge in $\mathfrak{m}$, so ist die zweite Bedingung aus Definition 1.1.1 nach Nakayamas Lemma automatisch erfüllt.

1.1.2 Lemma. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, und sei $x_1, \ldots, x_n$ eine reguläre Folge in $\mathfrak{m}$. Dann ist für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ die Folge $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$ regulär.*

Beweis. Es genügt offenbar, den Fall $\sigma = (i, i+1)$ zu betrachten. Ersetzen wir A durch den Ring $A/(x_1, \ldots, x_{i-1})$, so reduziert sich das Problem auf den Fall $n = 2$, $\sigma = (1, 2)$. Sei a ein Element des Annihilators $\mathrm{Ann}_A(x_2)$ von x_2; dann liegt x in dem von x_1 erzeugten Ideal, da x_2 nach Voraussetzung in $A/(x_1)$ kein Nullteiler ist. Es existiert also eine Darstellung $x = x_1 \cdot x'$; da die Multiplikation mit x_1 in A injektiv ist, ist mit x auch x' in $\mathrm{Ann}_A(x_2)$ enthalten. Induktiv sehen wir, daß J in $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} (x_1^m)$ liegt und nach dem Krullschen Durchschnittssatz folglich trivial ist; die

Multiplikation mit x_2 in A ist somit injektiv. Wäre nun die Multiplikation mit x_1 in $A/(x_2)$ nicht injektiv, so bestünde eine Gleichung $f \cdot x_1 = g \cdot x_2$ mit Elementen $f, g \in A$, und x_2 wäre in $A/(x_1)$ ein Nullteiler, im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist x_2, x_1 in A eine reguläre Folge, wie behauptet. $\square$

1.1.3 Lemma. *Sei A ein lokaler noetherscher Ring, sei $x_1, \ldots, x_n$ eine reguläre Folge in A, und sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl. Dann ist auch die Folge $x_1^k, \ldots, x_n^k$ regulär.*

Beweis. Potenzen regulärer Elemente sind regulär; folglich ist $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^k$ eine reguläre Folge. Nach Lemma 1.1.2 ist somit die Folge $x_n^k, x_1, \ldots, x_{n-1}$ regulär. Iterativ sehen wir, daß $x_n^k, \ldots, x_1^k$ regulär ist; nach Lemma 1.1.2 ist dann auch $x_1^k, \ldots, x_n^k$ regulär, wie behauptet. $\square$

1.1.4 Lemma. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, sei $x_1, \ldots, x_n$ eine reguläre Folge in $\mathfrak{m}$, und sei $I = (x_1, \ldots, x_n)$ das von den x_i in A erzeugte Ideal. Weiter sei $y_1, \ldots, y_m$ ein minimales Erzeugendensystem von I. Dann gilt $m = n$, und die Folge $y_1, \ldots, y_m$ ist regulär.*

Beweis. Die x_i bilden ein minimales Erzeugendensystem von I, denn existierte ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, derart daß x_i als Linearkombination der x_j mit $j \neq i$ darstellbar ist, so wäre x_i in

$$A/(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$$

trivial; nach Lemma 1.1.2 ist jedoch für jedes $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ die Folge $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$ regulär. Nach dem Lemma von Nakayama bildet ein minimales Erzeugendensystem von I eine Basis von $I/\mathfrak{m}I$; insbesondere haben je zwei minimale Erzeugendensysteme von I gleiche Länge, und es folgt $n = m$. Sei nun $i \in \{0, \ldots, n\}$ minimal gewählt, derart daß die Folge $x_1, \ldots, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n$ regulär ist und das Ideal I erzeugt. Nach Lemma 1.1.2 besitzt dann die Folge $x_1, \ldots, x_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n, x_i$ dieselben Eigenschaften. Angenommen, i ist echt positiv. Wir betrachten eine Darstellung

$$y_i \;=\; \sum_{j=1}^{i} \alpha_j \cdot x_j \;+\; \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_j \cdot y_j$$

von y_i mit Koeffizienten $\alpha_j \in A$. Wäre α_j für alle $1 \leq j \leq i$ in $\mathfrak{m}$ enthalten, so bestünde die Kongruenz

$$y_i \equiv \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_j \cdot y_j \mod \mathfrak{m}I \quad ,$$

und die Restklassen von $y_1, \ldots, y_n$ könnten keine Basis von $I/\mathfrak{m}I$ bilden. Also ist für mindestens ein $j \in \{1, \ldots, i\}$ der Koeffizient α_j eine Einheit; nach Permutation der $x_1, \ldots, x_i$ ist $j = i$ annehmbar. Aufgrund der Kongruenz

$$y_i \equiv \alpha_i \cdot x_i \mod (x_1, \ldots, x_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

ist dann die Multiplikation mit y_i in $A/(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ injektiv. Dann aber ist $x_1, \ldots, x_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n, y_i$ und nach Lemma 1.1.2 also auch $x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, \ldots, y_n$ regulär, im Widerspruch zur Minimalität von i. $\square$

1.1.5 Lemma. *Sei A ein lokaler noetherscher Ring, und sei $I \subset A$ ein echtes Ideal. Sei B eine treuflache lokale noethersche A-Algebra, derart daß $I \cdot B$ von einer regulären Folge erzeugt ist. Dann ist bereits I von einer regulären Folge erzeugt.*

Beweis. Es bezeichne $\varphi : A \to B$ den lokalen treuflachen Strukturhomomorphismus von B, und sei $x_1, \ldots, x_n$ ein minimales Erzeugendensystem von I in A. Dann bilden die $\varphi(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, ein minimales Erzeugendensystem von $I \cdot C$, denn ließe sich das betrachtete System um ein $\varphi(x_i)$ verkleinern, so wäre der A-Modulhomomorphismus

$$A^{n-1} \to I \quad , \quad (\alpha_j)_{j \neq i} \mapsto \sum_{j \neq i} \alpha_j \, x_j$$

nach treuflacher Basiserweiterung surjektiv, also bereits surjektiv, im Widerspruch zur Minimalität von $x_1, \ldots, x_n$. Gemäß Lemma 1.1.4 ist die Folge $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$ also regulär. Somit bilden die x_i eine reguläre Folge in A, denn Injektivität läßt sich nach treuflacher Basiserweiterung testen, und die Multiplikation mit x_i auf $A/(x_1, \ldots, x_{i-1})$ entspricht nach Basiserweiterung der Multiplikation mit $\varphi(x_i)$ auf $B/(\varphi(x_i), \ldots, \varphi(x_{i-1}))$. □

1.1.2 Assoziierte Punkte

Wir untersuchen die Menge der Nullteiler eines noetherschen Rings A. Sei M ein nicht-trivialer noetherscher A-Modul; dann ist die Menge $\mathrm{Ass}_A(M)$ der assoziierten Primideale von A nicht-leer und endlich. Sie ist mit Lokalisierung verträglich, und die Vereinigung ihrer Elemente stimmt mit der Menge der nicht M-regulären Elemente von A überein, für $M = A$ also mit der Menge der Nullteiler von A. Die Menge $\mathrm{Ass}_A(A)$ enthält die minimalen Primideale von A; ist A reduziert, so enthält sie neben diesen keine weiteren Elemente.

1.1.6 Definition. *Sei A ein noetherscher Ring, und sei M ein A-Modul. Ein Primideal der Gestalt $\mathrm{Ann}_A(w)$ mit $w \in M - \{0\}$ heißt ein zu M assoziiertes Primideal; die Menge der zu M assoziierten Primideale bezeichnen wir mit $\mathrm{Ass}_A(M)$. Die zu dem A-Modul A assoziierten Primideale heißen die assoziierten Primideale von A oder die assoziierten Punkte von* Spec A.

1.1.7 Lemma. *Sei A ein noetherscher Ring, und sei M ein A-Modul. Ist $\mathrm{Ass}_A(M)$ die leere Menge, so folgt $M = 0$.*

Beweis. Sei $M \neq 0$; aufgrund der Noether-Bedingung besitzt die nichtleere Menge $\{\mathrm{Ann}_A(w); w \in M\}$ ein bezüglich der Inklusion maximales Element $\mathrm{Ann}_A(w_0)$. Wir wollen nachweisen, daß es sich bei $\mathrm{Ann}_A(w_0)$ um ein Primideal handelt; dann ist $\mathrm{Ann}_A(w_0)$ nach Definition ein Element von $\mathrm{Ass}_A(M)$. Seien hierzu x, y Elemente in A mit $xy \in \mathrm{Ann}_A(w_0)$, $y \notin \mathrm{Ann}_A(w_0)$. Offenbar besteht die Inklusion $\mathrm{Ann}_A(w_0) \subset \mathrm{Ann}_A(yw_0)$, und nach Wahl von y ist yw_0 von Null verschieden; aufgrund der Maximalität von $\mathrm{Ann}_A(w_0)$ folgt somit $\mathrm{Ann}_A(yw_0) = \mathrm{Ann}_A(w_0)$. Da x in $\mathrm{Ann}_A(yw_0)$ enthalten ist, gilt folglich $x \in \mathrm{Ann}_A(w_0)$; somit ist das Ideal $\mathrm{Ann}_A(w_0)$ ein Primideal, wie gewünscht. □

1.1.8 Bemerkung. *Sei A ein noetherscher Ring. Dann gilt:*

(*i*) *Ein Monomorphismus $N \subset M$ von A-Moduln induziert in kanonischer Weise eine Inklusion $\mathrm{Ass}_A(N) \subset \mathrm{Ass}_A(M)$.*

(*ii*) *Ist w ein Element in M, derart daß $\mathrm{Ann}_A(w)$ in $\mathrm{Ass}_A(M)$ enthalten ist, so gilt $\mathrm{Ass}_A(Aw) = \{\mathrm{Ann}_A(w)\}$.*

Beweis. Bezeichnet φ die Inklusion $N \subset M$ und ist w ein Element in N, so stimmt $\mathrm{Ann}_A(w)$ aufgrund der Injektivität von φ mit $\mathrm{Ann}_A(\varphi(w))$ überein; damit ist die erste Aussage klar. Für die zweite schließen wir wie folgt: Sei v ein Element aus

Aw mit $\mathrm{Ann}_A(v) \in \mathrm{Ass}_A(Aw)$; es ist zu zeigen, daß $\mathrm{Ann}_A(v)$ mit $\mathrm{Ann}_A(w)$ übereinstimmt. Da v in Aw liegt, besteht die Inklusion $\mathrm{Ann}_A(w) \subset \mathrm{Ann}_A(v)$. Für die umgekehrte Inklusion fixieren wir eine Darstellung $v = xw$. Sei $y \in \mathrm{Ann}_A(v)$ ein beliebiges Element; dann gilt $yv = 0$, also $yxw = 0$, und es folgt $xy \in \mathrm{Ann}_A(w)$. Da $v = xw$ nach Wahl von Null verschieden ist, gilt $x \notin \mathrm{Ann}_A(w)$, und da $\mathrm{Ann}_A(w)$ prim ist, folgt somit $y \in \mathrm{Ann}_A(w)$, wie gewünscht. □

1.1.9 Lemma. *Seien A ein noetherscher Ring, M ein A-Modul und S ein multiplikatives System in A. Dann identifiziert sich $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$ kanonisch mit der Menge der Primideale $S^{-1}\mathfrak{p} \subset S^{-1}A$, wo $\mathfrak{p}$ die Menge jener Elemente aus $\mathrm{Ass}_A(M)$ durchläuft, welche S nicht treffen.*

Beweis. Sei $w \in M$ mit $\mathfrak{p} := \mathrm{Ann}_A(w) \in \mathrm{Ass}_A(M)$. Aufgrund der Flachheit der Lokalisierung $A \to S^{-1}\mathfrak{p}$ bleibt die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Ann}_A(w) \to A \xrightarrow{w} M \to 0$$

unter Anwendung von $\cdot \otimes_A S^{-1}A$ exakt; somit identifiziert sich $\mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(\frac{w}{1})$ kanonisch mit $S^{-1}\mathrm{Ann}_A(w) = S^{-1}\mathfrak{p}$. Gilt $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, so ist insbesondere $S^{-1}\mathfrak{p}$ ein Element in $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$; damit ist die eine Inklusion gezeigt. Sei umgekehrt $v \in S^{-1}M$ ein Element mit $\mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(v) \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$. Das Primideal $\mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(v)$ ist die Lokalisierung eines geeigneten Primideals $\mathfrak{q} \subset A$, welches S nicht trifft. Indem wir v gegebenenfalls mit einer Einheit aus $S^{-1}A$ multiplizieren, dürfen wir $v \in M$ annehmen; wir werden zeigen, daß hierbei $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_A(v)$ realisiert werden kann. Da A noethersch ist, besitzt $\mathfrak{q}$ ein endliches Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_n$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $x_i/1$ ein Element von $S^{-1}\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(v)$; folglich existieren Elemente $s_i \in S$ mit $x_i s_i v = 0$. Indem wir v durch $s_1 \cdots s_n v$ ersetzen, erhalten wir $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{Ann}_A(v)$ und somit $\mathfrak{q} \subset \mathrm{Ann}_A(v)$. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion $\mathrm{Ann}_A(v) \subset \mathfrak{q}$ sei $x \in \mathrm{Ann}_A(v)$ beliebig gegeben. Das Element $x/1 \in \mathrm{Ann}_{S^{-1}(A)}(v) = S^{-1}\mathfrak{q}$ schreibt sich in der Form $x/1 = x'/s'$ mit $x' \in \mathfrak{q}$ und $s' \in S$. Zu dieser Darstellung existiert ein $s'' \in S$ mit $s''(xs' - x') = 0$, also mit $xs's'' = x's'' \in \mathfrak{q}$. Da $\mathfrak{q}$ prim ist und mit S leeren Schnitt besitzt, gilt somit $x \in \mathfrak{q}$, wie gewünscht. □

1.1.10 Lemma. *Sei A ein noetherscher Ring, und sei M ein A-Modul. Dann identifiziert sich die Menge der nicht M-regulären Elemente von A mit der Vereinigung der zu M assoziierten Primideale.*

Beweis. Nach Definition ist jedes Element eines zu M assoziierten Primideals nicht M-regulär. Sei nun $x \in A$ ein nicht M-reguläres Element; dann existiert ein Element $w \in M$ mit ist $xw = 0$. Nach Lemma 1.1.7 ist $\mathrm{Ass}_A(Aw)$ nicht-leer; somit existiert ein $y \in A$ mit $\mathrm{Ann}_A(yw) \in \mathrm{Ass}_A(Aw)$. Nach der ersten Aussage von Bemerkung 1.1.8 ist $\mathrm{Ann}_A(yw)$ in $\mathrm{Ass}_A(M)$, enthalten, und wegen $xw = 0$ gilt $xyw = 0$, also $x \in \mathrm{Ann}_A(yw)$. □

1.1.11 Korollar. *Sei A ein noetherscher Ring; dann identifiziert sich die Menge der Nullteiler von A mit der Vereinigung der assoziierten Primideale.*

1.1.12 Lemma. *Sei A ein noetherscher Ring, und sei $M \neq 0$ ein A-Modul. Dann sind die über $\mathrm{Ann}_A(M)$ minimalen Primideale in $\mathrm{Ass}_A(M)$ enthalten.*

Beweis. Indem wir M als $A/\mathrm{Ann}_A(M)$-Modul betrachten, dürfen wir $\mathrm{Ann}_A(M)$ als trivial ansehen und somit annehmen, daß M auf ganz $\mathrm{Spec}\, A$ Support besitzt. Ist nun $\mathfrak{p} \subset A$ ein minimales Primideal, so ist die Lokalisierung $M_\mathfrak{p}$ nicht-trivial; nach Lemma 1.1.7 ist folglich $\mathrm{Ass}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ nicht leer. Da $\mathrm{Spec}\, A_\mathfrak{p}$ nur aus einem Punkt besteht und dieser durch $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ gegeben ist, folgt $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$, und mit Lemma 1.1.9 erhalten wir $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$, wie gewünscht. □

1.1.13 Korollar. *Sei A ein noetherscher Ring; dann enthält* $\mathrm{Ass}_A(A)$ *die minimalen Primideale von A.*

1.1.14 Definition. *Sei A ein noetherscher Ring; die Elemente von* $\mathrm{Ass}_A(A)$*, welche nicht minimal sind, heißen eingebettete Primideale beziehungsweise eingebettete Punkte.*

1.1.15 Lemma. *Sei A ein noetherscher Ring, und sei M ein noetherscher A-Modul. Dann existiert eine Kette von Untermoduln*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M \quad ,$$

derart daß für $0 \leq i \leq n-1$ ein Primideal $\mathfrak{p}_i \subset A$ existiert, derart daß der Quotient M_{i+1}/M_i zu $R/\mathfrak{p}_i$ isomorph ist.

Beweis. Ist $M = 0$, so ist nichts zu zeigen. Ansonsten existiert nach Lemma 1.1.7 ein zu M assoziiertes Primideal $\mathfrak{p}_1$, welches durch ein Element $w_1 \in M$ induziert ist. Wir setzen $M_1 := Aw_1$; die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{p}_1 \to A \overset{w_1}{\to} Aw_1 \to 0$$

zeigt, daß sich M_1 kanonisch mit $A/\mathfrak{p}_1$ identifiziert. Ist M_1 schon ganz M, so ist die Behauptung gezeigt; ansonsten ersetzen wir M durch M/M_1 und erhalten iterativ eine aufsteigende Kette von Untermoduln, deren sukzessive Quotienten die gewünschte Gestalt besitzen. Da M als noethersch vorausgesetzt wurde, ist diese Kette endlich; nach Lemma 1.1.7 endet sie bei $M_n = M$. □

1.1.16 Lemma. *Sei A ein noetherscher Ring, sei M ein A-Modul, und sei $N \subset M$ ein Untermodul. Dann besteht die Inklusion*

$$\mathrm{Ass}_A(M) \subset \mathrm{Ass}_A(N) \cup \mathrm{Ass}_A(M/N) \quad .$$

Beweis. Sei $w \in M$ ein Element mit $\mathrm{Ann}_A(w) \in \mathrm{Ass}_A(M)$. Besitzt Aw mit N trivialen Durchschnitt, so folgt für $x \in A$ aus $xw \in N$ bereits $xw = 0$, so daß sich $\mathrm{Ann}_A(w)$ mit dem Annihilator der Klasse von w modulo N identifiziert und folglich in $\mathrm{Ass}_A(M/N)$ enthalten ist. Ist der Durchschnitt $Aw \cap N$ nicht trivial, so fixieren wir ein von Null verschiedenes Element $v \in Aw \cap N$. Nach Bemerkung 1.1.8 ist $\mathrm{Ass}_A(Av)$ in $\mathrm{Ass}_A(Aw) = \{\mathrm{Ann}_A(w)\}$ enthalten, und da $\mathrm{Ass}_A(Av)$ nach Lemma 1.1.7 nicht leer ist, folgt $\mathrm{Ass}_A(Av) = \{\mathrm{Ann}_A(w)\}$. Mit Bemerkung 1.1.8 (*i*) ergibt sich nun $\mathrm{Ann}_A(w) \in \mathrm{Ass}_A(N)$, wie gewünscht. □

1.1.17 Korollar. *Sei A ein noetherscher Ring, und sei M ein noetherscher A-Modul. Dann ist* $\mathrm{Ass}_A(M)$ *endlich.*

Beweis. Nach Lemma 1.1.16 und dem Beweis von Lemma 1.1.15 dürfen wir annehmen, daß M von einem Element erzeugt wird, dessen Annihilatorideal prim ist; die Behauptung folgt nun mit Bemerkung 1.1.8 (*ii*). □

1.1.18 Lemma. *Sei A ein reduzierter noetherscher Ring; dann besitzt* $\mathrm{Spec}\, A$ *keine eingebetteten Punkte.*

Beweis. Angenommen, A besitzt ein eingebettetes Primideal; dann existiert nach Lemma 1.1.10 ein Nullteiler $x \in A$, welcher in keinem minimalen Primideal von A enthalten ist. Sei $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ die Menge der minimalen Primideale von A, und sei

$y \in A - \{0\}$ ein Element mit $x \cdot y = 0$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Klasse von x in dem Integritätsring $A/\mathfrak{p}_i$ von Null verschieden, und es folgt

$$y \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i = \sqrt{0} = 0 \quad ,$$

im Widerspruch zur Wahl von y. □

1.1.3 Koszul-Homologie

Sei A ein noetherscher Ring, sei M ein noetherscher A-Modul und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ eine Folge in A. Wir definieren den Koszul-Komplex $K_*(\boldsymbol{x}, M)$ und zeigen, daß die Länge maximal M-regulärer Folgen in dem von $\boldsymbol{x}$ erzeugten Ideal durch das Verschwinden der M-wertigen Koszul-Homologiemoduln $H_i(\boldsymbol{x}, M)$ bestimmt ist; ferner zeigen wir für den Fall eines lokalen Rings A, daß die Folge $\boldsymbol{x}$ genau dann M-regulär ist, wenn ihre erste M-wertige Koszul-Homologie $H_1(\boldsymbol{x}, M)$ trivial ist.

1.1.19 Definition. *Sei A ein beliebiger Ring, und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ eine Folge von Elementen in A. Das totale Tensorprodukt der in den Graden 0 und 1 konzentrierten Komplexe*

$$0 \to A \xrightarrow{x_i} A \to 0$$

heißt der Koszul-Komplex $K_*(\boldsymbol{a})$ von $\boldsymbol{x}$. Ist M ein A-Modul, so heißt $K_*(\boldsymbol{x}, M) := K_*(\boldsymbol{x}) \otimes_A M$ der Koszul-Komplex von $\boldsymbol{x}$ mit Werten in M. Die Homologiekomplexe von $K_*(\boldsymbol{x})$ beziehungsweise $K_*(\boldsymbol{x}, M)$ bezeichnen wir mit $H_*(\boldsymbol{x})$ beziehungsweise $H_*(\boldsymbol{x}, M)$.

Bemerkung. Die Familie $(H_i(\boldsymbol{x}, \cdot))_{i \geq 0}$ von Funktoren bildet einen exakten homologischer ∂-Funktor, da die Komponenten von $K_*(\boldsymbol{x})$ über A frei und damit insbesondere flach sind und da der Homologiefunktor $H_* : \mathrm{Ch}_{\geq 0}(A\text{-Mod}) \to A\text{-Mod}$ nach dem Schlangenlemma die Eigenschaften eines exakten homologischen ∂-Funktors besitzt.

1.1.20 Bemerkung. *Sei A ein Ring, sei M ein A-Modul, und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ eine Folge von Elemeten aus A. Eine offensichtliche Rechnung zeigt:*

(i) $H_0(\boldsymbol{x}, M) \cong M/(x_1, \ldots, x_n)M$

(ii) $H_n(\boldsymbol{x}, M) \cong \mathrm{Ann}_M(x_1, \ldots, x_n)$

(iii) $H_i(\boldsymbol{x}, M) = 0$ *für alle* $i > n$ □

Wir zeigen zunächst, daß der Koszul-Komplex einer quasi-regulären Folge $\boldsymbol{x}$ von Nichtnullteilern eines Rings A eine freie Auflösung von $A/\boldsymbol{x}A$ bildet:

1.1.21 Bemerkung. *Sei A ein Ring, sei M ein A-Modul, und sei $x \in A$ ein Nichtnullteiler. Die kurze exakte Sequenz $0 \to A \xrightarrow{x} A \to A/xA \to 0$ ist eine freie Auflösung von A/xA; folglich identifiziert sich $\mathrm{Tor}^A_*(M, A/xA)$ mit der Homologie $H_*(x, M)$ des Koszul-Komplexes $K_*(x, M) = 0 \to A \xrightarrow{x} A \to 0$:*

(i) $\mathrm{Tor}^A_0(M, A/xA) = M/xM$

(ii) $\mathrm{Tor}^A_1(M, A/xA) = \mathrm{Ann}_M x$

(iii) $\mathrm{Tor}^A_i(M, A/xA) = 0$ *für* $i \geq 2$ □

1.1.22 Lemma. *Sei A ein Ring, sei $n \geq 1$, und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ eine quasi-reguläre Folge, derart daß jedes x_j in A ein Nichtnullteiler ist. Dann bildet $K_*(\boldsymbol{x})$ eine freie Auflösung von $A/\boldsymbol{x}A$; insbesondere ist $K_*(\boldsymbol{x})$ azyklisch.*

Beweis. Wir schließen mit Induktion nach n; der Fall $n = 1$ folgt mit Bemerkung 1.1.21. Sei also $n > 1$; wir setzen $\boldsymbol{x}' := x_1, \ldots, x_{n-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung sind $K_*(\boldsymbol{x}')$ und $K_*(x_n)$ freie Auflösungen von $A/\boldsymbol{x}'A$ beziehungsweise $A/(x_n)$, und nach Definition 1.1.19 ist $K_*(\boldsymbol{x})$ der Totalkomplex des Doppelkomplexes $K_*(\boldsymbol{x}') \otimes_A K_*(x_n)$. Folglich identifiziert sich $H_i(\boldsymbol{x})$ mit $\mathrm{Tor}_i^A(A/\boldsymbol{x}'A, A/(x_n))$; nach Bemerkung 1.1.21 gilt also $H_i(\boldsymbol{x}) = 0$ für $i \geq 2$, $H_1(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Ann}_{A/\boldsymbol{x}'A} x_n = 0$ und $H_0(\boldsymbol{x}) = A/\boldsymbol{x}A$, wie behauptet. □

Koszul-Homologie läßt sich stets als eine Instanz von Tor interpretieren:

1.1.23 Bemerkung. *Sei A ein Ring, sei M ein A-Modul, und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ eine Folge in A. Wir fixieren ein System $X = X_1, \ldots, X_n$ von Variablen. Versehen wir A mit der durch $X_j \mapsto x_j$ gegebenen $A[X]$-Algebrastruktur, so existiert ein eindeutiger Isomorphismus von $A[X]$-Moduln*

$$H_i(\boldsymbol{x}, M) \cong \mathrm{Tor}_i^{A[X]}(A[X]/(X), M) \quad .$$

Beweis. Das System X bildet eine reguläre Folge in $A[X]$, und die Elemente $X_j \in A[X]$ sind regulär; nach Lemma 1.1.22 ist folglich $K_*(X)$ eine freie Auflösung des $A[X]$-Moduls $A[X]/(X)$, welche sich zur Berechnung von $\mathrm{Tor}_*^{A[X]}(A[X]/(X), M)$ verwenden läßt. Da $K_*(\boldsymbol{x}) \otimes_A M$ als $A[X]$-Modul kanonisch mit $K_*(X) \otimes_{A[X]} M$ übereinstimmt, folgt die Behauptung. □

1.1.24 Korollar. *Sei A ein Ring, sei M ein A-Modul, und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ eine Folge in A. Dann induziert die Multiplikation mit Elementen aus dem von $\boldsymbol{x}$ erzeugten Ideal $\boldsymbol{x}A$ auf $H_*(\boldsymbol{x}, M)$ den Nullhomomorphismus.*

Beweis. Man verifiziert leicht anhand der expliziten Gestalt des Koszul-Differentials, daß die Multiplikation mit Elementen aus $\boldsymbol{x}A$ auf $K_*(\boldsymbol{x}, M)$ nullhomotop ist. Wir geben einen alternativen Beweis: Nach Bemerkung 1.1.23 identifiziert sich $H_i(\boldsymbol{x}, M)$ mit $\mathrm{Tor}_i^{A[X]}(A[X]/(X), M)$, wobei $H_i(\boldsymbol{x}, M)$ unter $X_j \mapsto x_j$ als $A[X]$-Modul aufzufassen ist. Die Multiplikation mit X_j auf $\mathrm{Tor}_i^{A[X]}(A[X]/(X), M)$ ist jedoch der Nullhomomorphismus, da X_j trivial auf $A[X]/(X)$ operiert. □

Wir klären im folgenden den Zusammenhang zwischen der Existenz regulärer Folgen in dem von $\boldsymbol{x}$ erzeugten Ideal und dem Verschwinden der Koszul-Homologie von $\boldsymbol{x}$. Zunächst zeigen wir, daß die Existenz einer regulären Folge das Verschwinden bestimmer Koszul-Homologiemoduln impliziert.

1.1.25 Satz. *Sei A ein Ring, sei M ein A-Modul, und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ eine Folge von Elementen in A. Ist $f_1, \ldots, f_d \in \boldsymbol{x}A$ eine M-quasi-reguläre Folge der Länge $d \geq 0$, so gilt $H_j(\boldsymbol{x}, M) = 0$ für alle $j > n - d$. Ist insbesondere $\boldsymbol{x}$ quasi-regulär, so gilt $H_i(\boldsymbol{x}) = 0$ für alle $i \geq 1$.*

Beweis. Wir schließen mit Induktion nach d. Nach Bemerkung 1.1.20 verschwindet $H_j(\boldsymbol{x}, M)$ für $j > n$; damit ist die Aussage für $d = 0$ gezeigt. Sei also $d > 1$; wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \to M \xrightarrow{f_1} M \to M/f_1M \to 0 \quad .$$

Nach Korollar 1.1.24 sind in der zugehörigen langen exakten Koszul-Homologiesequenz sämtliche Abbildungen, welche durch Multiplikation mit Elementen aus $\boldsymbol{x}A$ gegeben sind, trivial; folglich erhalten wir für $j \geq 0$ kurze exakte Sequenzen

$$0 \to H_{j+1}(\boldsymbol{x}, M) \to H_{j+1}(\boldsymbol{x}, M/f_1M) \to H_j(\boldsymbol{x}, M) \to 0 \quad .$$

Da $f_2, \ldots, f_d$ auf M/f_1M quasi-regulär ist, gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$H_{j+1}(\boldsymbol{x}, M/f_1M) = 0$$

für alle $j+1 > n-(d-1) = n-d+1$. Da mit dem mittleren Term einer kurzen exakten Sequenz auch die äußeren Terme verschwinden, folgt somit $H_j(\boldsymbol{x}, M) = 0$ für alle $j > n-d$, wie gewünscht. □

Bemerkung. Satz 1.1.25 zeigt insbesondere, daß wir in Lemma 1.1.22 darauf verzichtet können, die Folgenglieder x_j als A-regulär vorauszusetzen.

Sind A und M noethersch, so ist können wir umgekehrt vom Nichtverschwinden der Koszul-Homologie auf die Existenz regulärer Folgen schließen:

1.1.26 Theorem. *Sei A ein noetherscher Ring, sei M ein noetherscher A-Modul, und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ eine Folge von Elementen in A. Gilt $M \neq \boldsymbol{x}M$, so besitzt jede M-reguläre Folge in $\boldsymbol{x}A$ höchstens die Länge n. Ist d die Länge einer maximalen M-regulären Folge in $\boldsymbol{x}A$, so gilt $H_j(\boldsymbol{x}, M) = 0$ für $j > n-d$, und $H_{n-d}(\boldsymbol{x}, M)$ ist von Null verschieden. Insbesondere besitzen alle maximalen M-regulären Folgen in $\boldsymbol{x}A$ dieselbe Länge.*

Beweis. Sei $f_1, \ldots, f_d$ eine M-reguläre Folgle in $\boldsymbol{x}A$; nach Satz 1.1.25 gilt dann $H_j(\boldsymbol{x}, M) = 0$ für $j > n-d$. Da $H_0(\boldsymbol{x}, M) = M/\boldsymbol{x}M$ nach Voraussetzung nicht verschwindet, folgt $d \leq n$. Somit genügt es zu zeigen, daß $H_{n-d}(\boldsymbol{x}, M)$ von Null verschieden ist, sobald $f_1, \ldots, f_d$ unter den M-regulären Folgen in $\boldsymbol{x}A$ maximale Länge besitzt. Sei also d maximal; wir schließen mit Induktion nach d. Ist $d = 0$, so besteht $\boldsymbol{x}A$ ausschließlich aus nicht M-regulären Elementen, ist nach Lemma 1.1.10 also in $\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)} \mathfrak{p}$ enthalten. Nach Korollar 1.1.17 ist $\mathrm{Ass}_A(M)$ endlich; folglich existiert ein zu M assoziiertes Primideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$, welches $\boldsymbol{x}A$ enthält, also ein nicht-triviales Element $y \in M$, welches durch $\boldsymbol{x}A$ annulliert wird. Nach Bemerkung 1.1.20 besteht die Gleichung $\mathrm{Ann}_M(\boldsymbol{x}) = H_n(\boldsymbol{x}, M)$; folglich ist $H_n(\boldsymbol{x}, M)$ von Null verschieden. Sei nun $d > 0$. Da die Folge $f_2, \ldots, f_n$ unter den M/f_1M-regulären Folgen in $\boldsymbol{x}A$ maximale Länge besitzt, ist $H_{n-d+1}(\boldsymbol{x}, M/f_1M)$ nach Induktionsvoraussetzung nicht-trivial. Wir betrachten die kanonische kurze exakte Sequenz

$$0 \to H_{n-d+1}(\boldsymbol{x}, M) \to H_{n-d+1}(\boldsymbol{x}, M/f_1M) \to H_{n-d}(\boldsymbol{x}, M) \to 0$$

aus dem Beweis von Satz 1.1.25. Nach Satz 1.1.25 ist $H_{n-d+1}(\boldsymbol{x}, M)$ trivial; folglich sind $H_{n-d}(\boldsymbol{x}, M)$ und $H_{n-d+1}(\boldsymbol{x}, M/f_1M)$ isomorph, und $H_{n-d}(\boldsymbol{x}, M)$ ist nicht der Nullmodul, wie gewünscht. □

Die bisherigen Resultate lieferten Aussagen über die Existenz regulärer Folgen. Um vom Verschwinden der M-wertigen Koszul-Homologie von $\boldsymbol{x}$ auf die M-Regularität von $\boldsymbol{x}$ schließen zu können, ist der Ring A als noethersch und lokal vorauszusetzen.

1.1.27 Lemma. *Sei A ein Ring, sei M ein A-Modul, und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ eine Folge von Elementen in A; es bezeichne $\boldsymbol{x}'$ die Folge $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Dann existiert für jedes $j \geq 1$ eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \to H_j(\boldsymbol{x}', M)/x_nH_j(\boldsymbol{x}', M) \to H_j(\boldsymbol{x}, M) \to \mathrm{Ann}_{H_{j-1}(\boldsymbol{x}', M)}(x_n) \to 0 \quad .$$

Beweis. Der Komplex $K_*(\boldsymbol{x}, M)$ ist nach Definition 1.1.19 der Totalkomplex des Tensorprodukts $K_*(\boldsymbol{x}', M) \otimes_R K_*(x_n, M)$, also der Abbildungskegel des durch Multiplikation mit x_n gegebenen Endomorphismus von $K_*(\boldsymbol{x}', M)$. Die zugehörige kurze exakte Sequenz

$$0 \to K_*(\boldsymbol{x}', M) \to K_*(\boldsymbol{x}, M) \to K_{*-1}(\boldsymbol{x}', M) \to 0$$

induziert eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \to & \cdots & \to & H_j(\boldsymbol{x}', M) \\ & \xrightarrow{\partial} & H_j(\boldsymbol{x}', M) & \to & H_j(\boldsymbol{x}, M) & \to & H_{j-1}(\boldsymbol{x}', M) \\ & \xrightarrow{\partial} & H_{j-1}(\boldsymbol{x}', M) & \to & \cdots & & . \end{array}$$

Ist z ein Zyklus in $K_{j-1}(\boldsymbol{x}', M)$, so ist $0 \otimes z$ eine Liftung von z nach $K_j(\boldsymbol{x}, M) = K_j(\boldsymbol{x}', M) \oplus K_{j-1}(\boldsymbol{x}', M)$, und das Bild von z in $K_{n-1}(\boldsymbol{x}, M) = K_{n-1}(\boldsymbol{x}', M) \oplus K_{n-2}(\boldsymbol{x}', M)$ unter dem Differential von $K_*(\boldsymbol{x}, M)$ ist $\pm x_n z \oplus 0$; folglich sind die Übergangshomomorphismen ∂ durch Multiplikation mit $\pm x_n$ gegeben. Die gesuchte kurze exakte Sequenz ergibt sich nun unmittelbar aus der angegebenen langen exakten Sequenz. □

1.1.28 Satz. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, sei M ein von 0 verschiedener endlich erzeugter A-Modul, und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ eine Folge in $\mathfrak{m}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(*i*) $H_1(\boldsymbol{x}, M) = 0$

(*ii*) $H_i(\boldsymbol{x}, M) = 0$ *für alle* $i \geq 1$

(*iii*) *Die Elemente $x_1, \ldots, x_n$ bilden eine M-reguläre Folge.*

(*iv*) *Jede maximale M-reguläre Folge in $\boldsymbol{x}A$ besitzt die Länge n.*

Beweis. Die Implikation $(iii) \Rightarrow (ii)$ folgt mit Satz 1.1.25; die Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$ ist trivial. Um $(i) \Rightarrow (iii)$ nachzuweisen, schließen wir mit Induktion nach n. Im Fall $n = 0$ ist nichts zu zeigen; der Fall $n = 1$ ist ebenfalls klar, denn nach Bemerkung 1.1.20 identifiziert sich $H_n(\boldsymbol{x}, M)$ mit $\mathrm{Ann}_M(\boldsymbol{x})$. Sei also $i > 1$; es bezeichne $\boldsymbol{x}'$ die Folge $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \to H_j(\boldsymbol{x}', M)/x_n H_j(\boldsymbol{x}', M) \to H_j(\boldsymbol{x}, M) \to \mathrm{Ann}_{H_{j-1}(\boldsymbol{x}', M)} x_n \to 0 \quad .$$

aus Lemma 1.1.27 und setzen wir $j := 1$, so verschwindet nach Voraussetzung (i) der mittlere Term; folglich gilt $H_1(\boldsymbol{x}', M) = x_n H_1(\boldsymbol{x}', M)$ und also $H_1(\boldsymbol{x}', M) = 0$ nach Nakayamas Lemma. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $\boldsymbol{x}'$ M-regulär. Da mit $H_1(\boldsymbol{x}, M)$ auch $\mathrm{Ann}_{H_0(\boldsymbol{x}', M)} x_n$ verschwindet und da $H_0(\boldsymbol{x}', M)$ nach Bemerkung 1.1.20 mit $M/\boldsymbol{x}'M$ übereinstimmt, ist folglich bereits $\boldsymbol{x}$ auf M regulär, wie gewünscht. Die Äquivalenz $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ schließlich folgt aus Theorem 1.1.26, denn M ist noethersch, und nach Nakayamas Lemma ist $H_0(\boldsymbol{x}, M) = M/\boldsymbol{x}M$ nicht trivial. □

1.1.4 Cohen-Macaulay-Ringe

1.1.29 Definition. *Sei A ein Ring, sei M ein A-Modul, und sei $I \subset A$ ein Ideal. Das Supremum der Längen aller M-regulären Folgen in I heißt die I-Tiefe* $\operatorname{depth}_I(M)$ *von M. Ist A noethersch lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, so schreiben wir kurz* $\operatorname{depth} M$ *für* $\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}} M$ *und bezeichnen* $\operatorname{depth} M$ *als die Tiefe von M über A.*

Im vorangehenden Abschnitt charakterisierten wir die $\operatorname{depth}_I(M)$ anhand der M-wertigen Koszul-Homologie eines Erzeugendensystems $\boldsymbol{x}$ von I. Im folgenden untersuchen wir für endliche Moduln über noetherschen lokalen Ringen den Zusammenhang zwischen Tiefe und Krulldimension.

1.1.30 Satz. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, sei $M \neq 0$ ein noetherscher R-Modul, und sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$ ein zu M assoziiertes Primideal. Dann gilt* $\operatorname{depth} M \leq \dim A/\mathfrak{p}$.

Beweis. Wir schließen mit Induktion nach $\operatorname{depth} M$; für $\operatorname{depth} M = 0$ ist nichts zu zeigen. Ist $\operatorname{depth} M > 0$, so existiert ein M-reguläres Element $x \in \mathfrak{m}$. Da M noethersch ist, existiert ein Element $w \in M$, derart daß Aw unter den einfachen A-Untermoduln von M, welche durch $\mathfrak{p}$ annulliert werden, maximal ist. Wir zeigen, daß w nicht in xM enthalten ist: Angenommen, es existiert ein Element $v \in M$ mit $w = xv$; dann gilt $Aw \subset Av$ sowie $x\mathfrak{p}v = 0$. Aus der M-Regularität von x folgt $\mathfrak{p}v = 0$, und aufgrund der Maximalität von Aw gilt somit $Aw = Av$. Es existiert also ein Element $y \in A$ mit $v = yw$; dann aber gilt $w = xyw$, also $(1 - xy)w = 0$, und mit $1 - xy \in \mathfrak{m} \Rightarrow 1 \in \mathfrak{m}$ erhalten wir den gesuchten Widerspruch.

Wegen $\mathfrak{p} \subset \operatorname{Ann}_A(w)$ und $w \notin xM$ ist $\mathfrak{p}$ in dem Annihilator eines nicht-trivialen Elements aus M/xM enthalten, und es folgt $\mathfrak{p} \subset \bigcup_{\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_A(M/xM)} \mathfrak{q}$. Nach Korollar 1.1.17 ist $\operatorname{Ass}(M/xM)$ endlich; folglich existiert ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_A(M/xM)$ mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. Da x auf M regulär und $\mathfrak{p}$ zu M assoziiert ist, gilt $x \notin \mathfrak{p}$; folglich ist x in $A_{\mathfrak{p}}$ eine Einheit, und wir erhalten $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp}(M/xM)$. Nun stimmt $\operatorname{Supp}(M/xM) \subset \operatorname{Spec} A$ mit der Zariski-abgeschlossenen Menge $V(\operatorname{Ann}_A(M/xM))$ überein, und da $\operatorname{Ann}_A(M/xM)$ in $\mathfrak{q}$ enthalten ist, liegt $\mathfrak{q} \subset V(\mathfrak{q})$ in $V(\operatorname{Ann}_A(M/xM))$, also in $\operatorname{Supp}(M/xM)$. Folglich kann $\mathfrak{p}$ nicht mit $\mathfrak{q}$ übereinstimmen, ist also echt in $\mathfrak{q}$ enthalten. Nach Theorem 1.1.26 gilt $\operatorname{depth}(M/xM) = \operatorname{depth} M - 1$; nach Induktionsvoraussetzung bestehen somit die Ungleichungen

$$\dim A/\mathfrak{p} > \dim A/\mathfrak{q} \geq \operatorname{depth}(M/xM) = \operatorname{depth} M - 1 \quad ,$$

also $\dim A/\mathfrak{p} \geq \operatorname{depth} M$, wie behauptet. □

1.1.31 Definition. *Sei A ein lokaler noetherscher Ring. Ein endlicher A-Modul M heißt Cohen-Macaulay-Modul, falls* $\operatorname{depth} M$ *mit* $\dim M := \dim A/\operatorname{Ann}_A(M)$ *übereinstimmt. Ist A ein Cohen-Macaulay-Modul über A, so heißt A ein Cohen-Macaulay-Ring.*

1.1.32 Theorem. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei M ein Cohen-Macaulay A-Modul. Dann gilt:*

(*i*) $\dim A/\mathfrak{p} = \operatorname{depth} M$ *für alle* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$.

(*ii*) $\operatorname{depth}_I M = \dim M - \dim M/IM$ *für alle Ideale* $I \subset \mathfrak{m}$.

(*iii*) *Eine Folge $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ in $\mathfrak{m}$ ist genau dann M-regulär, wenn* $\dim M/\boldsymbol{x}M$ *gleich* $\dim M - n$ *ist.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$; nach Satz 1.1.30 gilt $\operatorname{depth} M \leq \dim R/\mathfrak{p}$. Aufgrund der Inklusion $\mathrm{Ann}_A(M) \subset \mathfrak{p}$ ist $V(\mathfrak{p})$ ein abgeschlossenes Unterschema von $\mathrm{Supp}(M)$, und es folgt $\dim A/\mathfrak{p} \leq \dim M$; damit ist (i) gezeigt. Sei nun $I \subset \mathfrak{m}$ ein Ideal; wir zeigen (ii) mit Induktion nach $\operatorname{depth}_I M$. Sei zunächst $\operatorname{depth}_I M = 0$; dann ist $\dim M = \dim M/IM$ nachzuweisen. Indem wir A durch $A/\mathrm{Ann}_A(M)$ und I durch $I \cdot A/\mathrm{Ann}_A(M)$ ersetzen, dürfen wir $\mathrm{Ann}_A(M) = 0$ annehmen. Da $\operatorname{depth}_I M$ gleich Null ist, besteht I nur aus M-Nullteilern; nach Lemma 1.1.10 ist somit I in $\bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_A(M)} \mathfrak{p}$ enthalten. Da $\mathrm{Ass}_A(M)$ nach Korollar 1.1.17 endlich ist, existiert also ein zu M assoziiertes Primideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$ mit $I \subset \mathfrak{p}$. Nach Lemma 1.1.12 enthält $\mathrm{Ass}_A(M)$ die minimalen Primideale von A; mit (i) folgt somit, daß alle Primideale aus $\mathrm{Ass}_A(M)$ minimal sind und A äquidimensional ist. Folglich stimmt $\dim A/I$ mit $\dim A = \dim M$ überein. Es genügt nun einzusehen, daß der Pullback M/IM von M auf A/I vollen Support besitzt, denn dann ist $\mathrm{Ann}_{A/I}(M/IM)$ trivial, und es folgt $\dim M/IM = \dim A/I = \dim M$, wie gewünscht. Sei also z ein Punkt in $\operatorname{Spec} A/I$; da der Halmbildung exakt ist und mit Tensorprodukten kommutiert, gilt $(M/IM)_z = M_z/I_zM_z$. M ist über A endlich erzeugt, und I_z ist wegen $z \in \operatorname{Spec} A/I$ in dem maximalen Ideal von A_z enthalten; wäre also M_z/I_zM_z trivial, so nach Nakayamas Lemma auch M_z, im Widerspruch dazu, daß M auf ganz $\operatorname{Spec} A$ Support besitzt. Damit ist der Fall $\operatorname{depth}_I M = 0$ geklärt. Sei nun $\operatorname{depth}_I M > 0$; dann existiert ein M-reguläres Element $x \in I$. Nach Theorem 1.1.26 gilt $\operatorname{depth}_I M/xM = \operatorname{depth}_I M - 1$; es genügt also einzusehen, daß die Gleichung $\dim M/xM = \dim M - 1$ besteht. Sei $J \subset A$ ein beliebiges Ideal, und sei $z \in \operatorname{Spec} A$ ein beliebiger Punkt. Nach Nakayamas Lemma ist $(M/JM)_z = M_z/J_zM_z$ genau dann trivial, wenn M_z trivial ist oder J_z mit A_z übereinstimmt; folglich gilt $\mathrm{Supp}(M/JM) = \mathrm{Supp}(M) \cap V(J)$. Setzen wir $J := (x)$, so erhalten wir insbesondere $\mathrm{Supp}(M/xM) = \mathrm{Supp}(M) \cap V(x)$. Als M-reguläres Element ist x nach Lemma 1.1.10 $A/\mathrm{Ann}_A(M)$-regulär, so daß bei Division von $A/\mathrm{Ann}_A(M)$ durch x die Dimension um 1 abnimmt, wie gewünscht. Damit ist (ii) gezeigt; Aussage (iii) folgt nun unmittelbar aus (ii) und Satz 1.1.28. □

1.2 Reguläre noethersche Ringe

1.2.1 Definition. *Ein lokaler noetherscher Ring* $(A, \mathfrak{m}, k)$ *heißt regulär, falls seine Krull-Dimension* $\dim A$ *mit der Dimension* $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ *seines Tangentialraums* $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ *übereinstimmt.*

1.2.2 Bemerkung. *Ein regulärer lokaler noetherscher Ring ist ein Cohen-Macaulay-Ring.*

Beweis. Da sich die Dimension eines noetherschen lokalen Rings bei Division durch ein reguläres Element um 1 verringert, ist $\operatorname{depth} A$ durch $\dim A$ beschränkt. Da $\dim A = \operatorname{ht} \mathfrak{m}$ nach dem Krullschen Hauptidealsatz durch die Anzahl der Elemente eines Erzeugendensystems von $\mathfrak{m}$ und somit nach Nakayamas Lemma insbesondere durch $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ beschränkt ist, folgt $\dim A = \operatorname{depth} A$, wie gewünscht. □

Wir beweisen zunächst unter Verwendung der Dimensionstheorie noetherscher Ringe, daß reguläre lokale noethersche Ringe integer sind:

1.2.3 Satz. *Sei* $(A, \mathfrak{m}, k)$ *ein lokaler noetherscher Ring. Ist* A *regulär, so ist* A *integer.*

Beweis. Wir schließen mit Induktion nach $d := \dim A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$: Ist $d = 0$, so folgt $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ und somit $\mathfrak{m} = 0$, und A ist ein Körper. Ist $d \geq 1$, so fixieren wir ein

Element $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$. Offenbar gilt $\dim_k(\mathfrak{m}/x)/(\mathfrak{m}/x)^2 = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 - 1$. Da für einen lokalen noetherschen Ring $(C, \mathfrak{r}, l)$ stets die Ungleichung $\dim C \leq \dim_l \mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2$ gilt, ist notwendig $\dim A/x < \dim A$ und also $\dim A/x = \dim A - 1$; folglich ist A/x regulär von Dimension $d-1$. Sei nun $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal von A mit $\dim V(\mathfrak{p}) = d$, sei $B := A/\mathfrak{p}$, und sei y das Bild von x in B. Dann ist B noethersch lokal von Dimension d mit maximalem Ideal $\mathfrak{n} := \mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ und Restklassenkörper k, und es gilt

$$d - 1 \leq \dim B/yB \leq \dim_k \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \leq \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = d - 1 \quad ;$$

folglich ist auch $B/y = A/(\mathfrak{p} + Ax)$ regulär von Dimension $d-1$. Nach Induktionsvoraussetzung sind A/x und $A/(\mathfrak{p} + Ax)$ integer. Es folgt $A/x = B/y$ beziehungsweise $\mathfrak{p} + Ax = xA$, da ansonsten der Kern des surjektiven Homomorphismus $A/x \to A/(\mathfrak{p} + Ax)$ ein nicht-minimales Primideal darstellen würde und die Dimensionen der Ringe nicht übereinstimmen könnten. Somit ist $\mathfrak{p}$ in Ax enthalten; für jedes $z \in \mathfrak{p}$ existiert also ein $z' \in A$ mit $z = xz'$. Aufgrund der Ungleichung $d - 1 = \dim V(x) < \dim V(\mathfrak{p}) = d$ ist x nicht in $\mathfrak{p}$ enthalten, und es folgt $z' \in \mathfrak{p}$. Somit bestehen die Inklusionen $\mathfrak{p} \subset x\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}\mathfrak{p}$, und es folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} = 0$ nach dem Lemma von Nakayama. Folglich stimmen A und B überein, und somit ist A integer, wie behauptet. □

Wir werden zeigen, daß ein lokaler noetherscher Ring genau dann regulär ist, wenn sein Restklassenkörper endliche projektive Dimension besitzt. Mit Hilfe dieses Kriteriums folgt ohne Mühe, daß jede Lokalisierung eines regulären lokalen noetherschen Rings wieder regulär ist; diese Tatsache ermöglich es, den Begriff der Regularität auf allgemeine noethersche Ringe und somit auf lokal noethersche Schemata auszudehnen.

1.2.4 Definition. *Sei $A \neq 0$ ein Ring, und sei M ein A-Modul. Ist $M = 0$, so setzen wir $\mathrm{pd}_A M := 0$; ansonsten sei $\mathrm{pd}_A M$ gleich dem Infimum der Längen aller projektiven Auflösungen von M über A. Die Zahl $\mathrm{pd}_A M$ heißt die projektive Dimension von M über A.*

1.2.5 Lemma. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler noetherscher regulärer Ring der Dimension d; dann ist $\mathrm{pd}_A k$ durch d beschränkt und somit endlich.*

Beweis. Sei $\boldsymbol{x}$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$. Nach Satz 1.2.3 ist A integer; somit handelt es sich bei den Elementen $x_1, \dots, x_n$ um Nichtnullteiler. Da bei Division durch x_1 sowohl die Dimension des Rings als auch die des Restklassenvektorraums um Eins abnehmen, sehen wir induktiv, daß die Folge $\boldsymbol{x}$ regulär ist. Nach Lemma 1.1.22 ist $K_*(\boldsymbol{x})$ somit eine freie Auflösung von $A/(\boldsymbol{x}) = k$, und nach Definition von $K_*(\boldsymbol{x})$ ist diese endlich, wie gewünscht. □

Um die projektive Dimension endlich erzeugter Moduln über lokalen noetherschen Ringen zu charakterisieren, benötigen wir den Begriff der minimalen freien Auflösung:

1.2.6 Definition. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler noetherscher Ring, und sei M ein endlicher A-Modul. Wir fixieren ein minimales Erzeugendensystem $\boldsymbol{w} = w_1, \dots, w_n$ von M über A, setzen $F_0 := A^n$ und betrachten den durch $\boldsymbol{w}$ gegebenen Epimorphismus $\varphi : F_0 \to M$. Da A noethersch ist, besitzt* $\ker \varphi$ *über A ein endliches Erzeugendensystem; indem wir M durch* $\ker \varphi$ *ersetzen, erhalten wir iterativ eine freie Auflösung von M. Freie Auflösungen, welche in der beschriebenen Weise konstruierbar sind, heißen minimal.*

Bemerkung. Nach Nakayamas Lemma ist eine freie Auflösung genau dann minimal, wenn ihre Differentiale durch Koeffizienten in $\mathfrak{m}$ gegeben sind.

1.2.7 Bemerkung. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler noetherscher Ring, sei M ein endlich erzeugter A-Modul, und sei F_* eine minimale freie Auflösung von A. Dann ist $F_* \otimes_A k$ eine Instanz von $\mathrm{Tor}_*^A(M, k)$. Insbesondere besitzen alle minimalen freien Auflösungen von M dieselbe Länge, und diese ist durch die Länge von $\mathrm{Tor}_*^A(M, k)$ gegeben.*

Beweis. Da die Differentiale von F_* durch Koeffizienten in $\mathfrak{m}$ gegeben sind, sind die Differentiale des induzierten Komplexes $F_* \otimes_A k$ trivial. □

1.2.8 Bemerkung. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann stimmt $\mathrm{pd}_A M$ mit der Länge von $\mathrm{Tor}_*^A(M, k)$ überein; insbesondere ist $\mathrm{pd}_A M$ durch $\mathrm{pd}_A k$ beschränkt.*

Beweis. Sei l die Länge von $\mathrm{Tor}_*^A(M, k)$. Nach Bemerkung 1.2.7 existiert eine (minimale) freie Auflösung von M der Länge l; folglich ist $\mathrm{pd}_A M$ nicht größer als l. Andererseits kann $\mathrm{pd}_A M$ nicht kleiner als l sein, da ansonsten eine projektive Auflösung von M der Länge $< l$ existierte und $\mathrm{Tor}_*^A(M, k)$ bereits ab dem Index l verschwinden müßte. □

1.2.9 Lemma. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein noetherscher lokaler Ring, und sei*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

eine exakte Sequenz endlich erzeugter A-Moduln. Besitzen zwei der Moduln endliche projektive Dimension über A, so auch der dritte. Sind M, M'' von endlicher projektiver Dimension und gilt weiterhin $\mathrm{pd}_A M < \mathrm{pd}_A M''$, so ist $\mathrm{pd}_A M' = \mathrm{pd}_A M'' - 1$.

Beweis. Die folgt unmittelbar mit Bemerkung 1.2.8 durch Betrachten der langen exakten Sequenz für $\mathrm{Tor}_*^A(\cdot, k)$. □

1.2.10 Lemma. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler noetherscher Ring. Ist $\mathfrak{m}$ in $\mathrm{Ass}_A(A)$ enthalten, so ist jeder endlich erzeugte A-Modul von endlicher projektiver Dimension über A frei.*

Beweis. Angenommen, es existiert ein nicht freier endlich erzeugter A-Modul von endlicher projektiver Dimension. Dann existiert eine minimale freie Auflösung F_* von M der Länge $n \geq 1$. Das n-te Differential $d_n : F_n \to F_{n-1}$ korrespondiert zu einer Matrix mit Einträgen in $\mathfrak{m}$; ist also $x \in A - \{0\}$ ein Element mit $\mathfrak{m} = \mathrm{Ann}_A(x)$, so annulliert d_n alle Elemente des nicht-trivialen Untermoduls $xF_n \subset F_n$, im Widerspruch zur Injektivität von d_n. □

1.2.11 Lemma. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler noetherscher Ring. Ist M ein endlich erzeugter A-Modul von endlicher projektiver Dimension und ist $x \in A$ sowohl A-regulär als auch M-regulär, so ist M/xM von endlicher projektiver Dimension über A/xA.*

Beweis. Sei P_* eine endliche projektive Auflösung von M über A; dann ist $P_* \otimes_A A/xA$ ein endlicher Komplex projektiver A/xA-Moduln. Seine Homologiemoduln $\mathrm{Tor}_n^A(M, A/xA)$ sind nach Bemerkung 1.1.21 für $n \geq 1$ trivial, da x auf M und auf A regulär ist; somit ist $P_* \otimes_A A/xA$ eine endliche projektive Auflösung von $\mathrm{Tor}_0^A(M, A/xA) = M/xM$. □

1.2.12 Lemma. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler noetherscher Ring, sei a ein Element aus $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, sei $n \geq 1$ und seien $X, Y \in M(A, n)$ mit $XY = a1_n$. Dann gilt: Ist jeder Eintrag von X in $\mathfrak{m}$, so ist Y invertierbar.*

Beweis. Wir schließen mit Induktion nach n. Ist $n = 1$, so gilt $a = xy$ mit $x \in \mathfrak{m}$, so daß y wegen $a \notin \mathfrak{m}^2$ notwendig eine Einheit ist. Sei nun $n > 1$. Mindestens ein Eintrag y von Y ist eine Einheit, da ansonsten wiederum $a \in \mathfrak{m}^2$ folgen würde. Somit läßt sich durch elementare Matrixumformungen eine Gleichung

$$Y' = UYV = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix}$$

realisieren, mit invertierbaren Matrizen $U, V \in M(A, n)$ und einer Matrix $Y_0 \in M(A, n-1)$. Schreiben wir $X' := V^{-1}XU^{-1}$, so sind alle Einträge von X' in $\mathfrak{m}$, und es gilt

$$X'Y' = V^{-1}(a1_n)V = a(V^{-1}1_nV) = a1_n \quad ,$$

so daß wir ohne Einschränkung X' und Y' anstelle von X und Y betrachten dürfen. Schreiben wir X' in der Gestalt

$$X' = \begin{pmatrix} x & s \\ r & X_0 \end{pmatrix}$$

mit $x \in A$, $r, s^t \in A^{n-1}$ und einer Matrix $X_0 \in M(A, n-1)$, so gilt

$$a1_n = X'Y' = \begin{pmatrix} x & sY_0 \\ r & X_0Y_0 \end{pmatrix} \quad ,$$

und es folgt $a1_{n-1} = X_0Y_0$, so daß Y_0 nach Induktionsvoraussetzung invertierbar ist. Damit ist auch Y' invertierbar, wie behauptet. □

1.2.13 Satz. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler noetherscher Ring, sei M ein endlicher erzeugter A-Modul von endlicher projektiver Dimension, und sei $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ ein Nichtnullteiler in A mit $xM = 0$. Dann besitzt M endliche projektive Dimension über A/xA.*

Beweis. Ist $\mathfrak{m} = 0$, so sind die Voraussetzungen des Satzes nicht zu erfüllen, und es ist nichts zu zeigen; wir dürfen also $\mathfrak{m} \neq 0$ annehmen. Da M durch x annulliert wird, kann M über A nicht frei sein; folglich gilt $\mathrm{pd}_R M \geq 1$. Der A-Modul M ist in natürlicher Weise ein endlich erzeugter A/xA-Modul. Ist $\mathrm{pd}_A M > 1$, so betrachten wir für hinreichend großes $h > 0$ eine kurze exakte Sequenz von A/xA-Moduln

$$0 \to M' \to (A/xA)^h \to M \to 0 \quad ;$$

sie ist insbesondere als Sequenz von A-Moduln exakt. Da x auf A regulär ist, bildet der Komplex $0 \to A^h \xrightarrow{x} A^h \to 0$ eine minimale freie Auflösung des A-Moduls $(A/xA)^h$; nach Bemerkung 1.2.8 ist $(A/xA)^h$ somit über A von projektiver Dimension 1, und mit Lemma 1.2.9 folgt $\mathrm{pd}_A M' = \mathrm{pd}_A M - 1$. Ist $\mathrm{pd}_{A/xA} M'$ endlich, so nach Lemma 1.2.9 auch $\mathrm{pd}_{A/xA} M$; Induktion nach $\mathrm{pd}_A M$ reduziert also auf den Fall $\mathrm{pd}_A M = 1$. Eine minimale freie Auflösung von M über A entspricht dann einer exakten Sequenz

$$0 \to A^n \xrightarrow{d_1} A^k \to M \to 0$$

mit geeigneten natürlichen Zahlen $n, k \geq 1$, wo die zu d_1 korrespondierende Matrix $X \in M(A, k, n)$ Einträge in $\mathfrak{m}$ besitzt. Lokalisieren wir die betrachtete kurze exakte Sequenz nach x, so erhalten wir aufgrund der Flachheit der Lokalisierung und wegen $M_x = 0$ eine exakte Sequenz $0 \to A_x^n \to A_x^k \to 0$; somit gilt $k = n$. Sei nun e_j der

j-te Spaltenvektor von $1_n \in M(A,n)$. Da M durch x annulliert wird, liegt xe_j für alle $j \in \{1,\dots,n\}$ in dem Bild von d_1; folglich existieren geeignete Elemente $b_j \in A^n$ mit $xe_j = Xb_j$. Sei $Y \in M(A,n)$ die Matrix, deren Spalten durch die b_j gebildet werden; dann besteht die Gleichung $x1_n = XY$, und nach Lemma 1.2.12 ist Y invertierbar. Folglich existieren A-Isomorphismen

$$M \cong \text{coker }(d_1) \cong \text{coker }(XY) \cong \text{coker }(x1_n) \cong (A/xA)^n \quad ,$$

welche zeigen, daß es sich bei M um einen freien A/xA-Modul handelt. Somit gilt $\mathrm{pd}_{A/xA}M = 0 < \infty$, und insbesondere ist die projektive Dimension von M über A/xA endlich, wie behauptet. □

1.2.14 Theorem. *Sei $(A,\mathfrak{m},k)$ ein lokaler noetherscher Ring. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathrm{pd}_A k$ *ist endlich.*

(ii) *A ist regulär.*

Beweis. Die Implikation (ii) ⇒ (i) folgt unmittelbar aus Lemma 1.2.5. Es bleibt der Schritt von (i) nach (ii) zu begründen; sei also $\mathrm{pd}_A k$ endlich. Angenommen, $\mathfrak{m}$ ist in $\mathrm{Ass}_A(A)$ enthalten; dann ist k nach Lemma 1.2.10 frei, und folglich existiert ein Isomorphismus $k \cong A^n$. Da sich $k \otimes_A k$ über k kanonisch mit k identifiziert, folgt $k \cong k^n$ und somit $n = 1$; folglich ist A ein Körper, also regulär. Im Allgemeinfall schließen wir mit Induktion nach $\dim A$: Ist $\dim A = 0$, so ist $\mathfrak{m}$ ein minimales Primideal; nach Lemma 1.1.12 ist also $\mathfrak{m}$ in $\mathrm{Ass}_A(A)$ enthalten, und dieser Fall wurde bereits behandelt. Sei also ohne Einschränkung $\dim A \geq 1$ mit $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}_A(A)$. Nach Korollar 1.1.17 ist $\mathrm{Ass}_A(A)$ endlich; wäre also $\mathfrak{m}$ in $\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(A)} \mathfrak{p}$ enthalten, so schon in einem assoziierten Primideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A)$, was aufgrund der Maximalität von $\mathfrak{m}$ und wegen $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}_A(A)$ ausgeschlossen ist. Folglich existiert ein Element $x' \in \mathfrak{m}$ mit $x' \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(R)} \mathfrak{p}$. Da x' insbesondere von Null verschieden ist, existiert nach dem Krullschen Durchschnittssatz eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $x' \in \mathfrak{m}^n - \mathfrak{m}^{n+1}$. Schreiben wir x' in der Form $x' = xx''$ mit Elementen $x \in \mathfrak{m}, x'' \in \mathfrak{m}^{n-1}$, so ist x ein Element aus $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, welches in keinem assoziierten Primideal von A enthalten und somit nach Lemma 1.1.10 A-regulär ist. Nach Satz 1.2.13 ist folglich k von endlicher projektiver Dimension über A/xA, und nach Induktionsvoraussetzung ist A/xA regulär. Da mit x' auch x A-regulär ist und da x modulo $\mathfrak{m}^2$ nicht verschwindet, nehmen bei Division durch x sowohl die Krull-Dimension als auch die Dimension des Tangentialraums von A um 1 ab; folglich ist A regulär. □

Wir können nun leicht untersuchen, wie sich Regularität mit flachem Basiswechsel verträgt:

1.2.15 Lemma. *Sei A ein Ring, und sei M ein A-Modul. Dann gilt:*

(i) *Ist A' eine flache A-Algebra, so ist $\mathrm{pd}_{A'}(M \otimes_A A')$ durch $\mathrm{pd}_A M$ beschränkt.*

(ii) *Ist A noethersch lokal, ist $A \to A'$ ein flacher lokaler Homomorphismus in einen lokalen noetherschen Ring A' und ist M über A endlich erzeugt, so stimmt $\mathrm{pd}_{A'}(M \otimes_A A')$ mit $\mathrm{pd}_A M$ überein.*

Beweis. Ist P_* eine projektive Auflösung von M über A, so ist $P_* \otimes_A A'$ aufgrund der Exaktheit von $\cdot \otimes_A A'$ eine projektive Auflösung von $M \otimes_A A'$ über A'; da die Länge eines Komplexes bei Tensorieren höchstens abnimmt, folgt somit Aussage (i). Seien nun die Voraussetzungen von (ii) erfüllt. Nach Bemerkung 1.2.8 und Bemerkung 1.2.7 existiert eine minimale freie Auflösung F_* von M über A der

Länge $\mathrm{pd}_A M$. Da der Homomorphismus $A \to A'$ treuflach ist, erhalten wir durch Tensorieren mit A' über A eine freie Auflösung $F_* \otimes_A A'$ von $M \otimes_A A'$ über A' der Länge $\mathrm{pd}_A M$, und diese ist minimal, da $A \to A'$ lokal ist und folglich die Differentiale von $F_* \otimes_A A'$ durch Koeffizienten in dem maximalen Ideal von A' gegeben sind. Erneute Anwendung von Bemerkung 1.2.8 und Bemerkung 1.2.7 liefert somit $\mathrm{pd}_{A'}(M \otimes_A A') = \mathrm{pd}_A M$, wie gewünscht. □

1.2.16 Korollar. *Ist A ein regulärer lokaler noetherscher Ring und ist $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so ist auch $A_\mathfrak{p}$ regulär.*

Beweis. Da die Lokalisierung $A \to A_\mathfrak{p}$ flach ist, besteht nach Lemma 1.2.15 (i) die Ungleichung $\mathrm{pd}_{A_\mathfrak{p}} A_p/\mathfrak{p}A_p \leq \mathrm{pd}_A A/\mathfrak{p}$. Nach Bemerkung 1.2.8 ist $\mathrm{pd}_A A/\mathfrak{p}$ durch die projektive Dimension von k über A beschränkt, und aufgrund der Regularität von A ist diese nach Lemma 1.2.5 endlich. Nach Theorem 1.2.14 ist folglich $A_\mathfrak{p}$ regulär. □

1.2.17 Definition. *Ein noetherscher Ring A heißt regulär, falls für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ die Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$ regulär ist. Ein lokal noethersches Schema X heißt regulär im Punkt $x \in X$, falls der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist; ein lokal noethersches Schema X heißt regulär, wenn es in allen Punkten regulär ist.*

Sind A, A' noethersche lokale Ringe, ist A regulär und ist $A \to A'$ ein flacher lokaler Homomorphismus mit regulärer Faser, so ist auch A' regulär. Um dies zu beweisen, benötigen wir eine Aussage über die Dimension der Fasern flacher Morphismen, welche sich auch in späteren Kapiteln dieser Arbeit als nützlich erweisen wird:

1.2.18 Lemma. *Seien A, A' noethersche lokale Ringe, sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A, und sei $\varphi : A \to A'$ ein lokaler Homomorphismus; dann gilt*

$$\dim A' \leq \dim A + \dim A'/\mathfrak{m}A' \quad .$$

Ist φ flach, so stimmt $\dim A'$ mit $\dim A + \dim A'/\mathfrak{m}A'$ überein.

Beweis. Wir dürfen ohne Einschränkung $\varphi : A \to A'$ über A mit $A/\sqrt{0}$ tensorieren, so daß wir A als reduziert ansehen dürfen. Wir schließen mit Induktion nach $d := \dim A$. Ist $d = 0$, so ist $\mathfrak{m}$ nilpotent, also trivial, und es ist nichts zu zeigen. Sei $d > 0$; dann existiert ein Element $x \in \mathfrak{m}$, welches in keinem minimalen Primideal von A enthalten ist. Nach Lemma 1.1.18 ist x A-regulär. Da φ lokal ist, geht x unter φ auf eine Nichteinheit; ist φ flach, so ist $\varphi(x)$ A'-regulär. Wir erhalten somit $\dim(A/xA) = \dim A - 1$, $\dim(A'/xA') \geq \dim A' - 1$, mit Gleichheit im flachen Fall. Ist A' über A flach, so auch $A'/xA' = A' \otimes_A A/xA$ über A/xA; nach Induktionsvoraussetzung gilt somit

$$\dim(A'/xA') \leq \dim(A/xA) + \dim((A'/xA')/\mathfrak{m}(A'/xA')) \quad ,$$

mit Gleichheit im flachen Fall. Die Behauptung folgt nun unmittelbar mit Hilfe des kanonischen Isomorphismus $(A'/xA')/\mathfrak{m}(A'/xA') \cong A'/\mathfrak{m}A'$. □

1.2.19 Korollar. *Seien A, A' noethersche lokale Ringe, sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A, und sei $\varphi : A \to A'$ ein flacher lokaler Homomorphismus. Dann gilt:*

(i) *Ist A' regulär, so auch A.*

(ii) *Sind A und $A'/\mathfrak{m}A'$ regulär, so auch A'.*

Ist insbesondere $Y \to X$ ein treuflacher Morphismus von Schemata und ist Y regulär, so ist auch X regulär.

Beweis. Nach der zweiten Aussage von Lemma 1.2.15 stimmt $\mathrm{pd}_A A/\mathfrak{m}$ mit der projektiven Dimension von $A/\mathfrak{m} \otimes_A A'$ über A' überein; ist also A' regulär, so ist $\mathrm{pd}_A A/\mathfrak{m}$ nach Lemma 1.2.5 endlich; nach Theorem 1.2.14 ist A folglich regulär. Sind nun A und $A'/\mathfrak{m}A'$ als regulär vorausgesetzt, so fixieren wir minimale Erzeugendensysteme $x_1, \ldots, x_m$ von $\mathfrak{m}$ und $y_1, \ldots, y_n$ von $\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}A'$, wo $\mathfrak{m}'$ das maximale Ideal von A' bezeichnet. Dann gilt $m = \dim A$, $n = \dim A'/\mathfrak{m}A'$, und mit Lemma 1.2.18 folgt $\dim A' = n + m$. Da $\mathfrak{m}'$ durch die φ-Bilder der x_i und Liftungen der y_j erzeugt wird, ist $\mathfrak{m}'$ also von $m + n = \dim A'$ Elementen erzeugt; aufgrund der Ungleichung $\dim A' \leq \dim_{A'/\mathfrak{m}'} \mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2$ ist A' somit regulär, wie behauptet. □

1.2.20 Korollar. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring. Genau dann ist A regulär, wenn die $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung $\hat{A}$ von A regulär ist.*

Beweis. Der kanonische Homomorphismus $A \to \hat{A}$ ist flach, und $\hat{A}/\mathfrak{m}\hat{A} = A/\mathfrak{m}A$ ist ein Körper; somit folgt die Behauptung unmittelbar aus Korollar 1.2.19. □

Schließlich zeigen wir, daß Polynomringe in endlich vielen Variablen über regulären Grundringen regulär sind:

1.2.21 Lemma. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, sei T eine Variable, und sei $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal in $A[T]$ mit $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$. Dann gilt* $\mathrm{ht}(\mathfrak{n}) = \dim A + 1$.

Beweis. Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ eine echt aufsteigende Kette von Primidealen in A. Da $A[T]$ über A treuflach ist, bilden die Ideale $\mathfrak{p}_i A[T]$ in $A[T]$ eine echt aufsteigende Kette; sind prim und nicht maximal, da es sich bei den Quotienten $A[T]/\mathfrak{p}_i A[T] \cong (A/\mathfrak{p}_i)[T]$ um Integritätsringe handelt, welche keine Körper sind. Folglich ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{n})$ durch $\dim A + 1$ beschränkt. Für die umgekehrte Ungleichung schließen wir mit Induktion nach $\dim A$. Gilt $\dim A = 0$, so ist $A/\sqrt{0}$ ein Körper, und jedes von (0) verschiedene Primideal von $(A/\sqrt{0})[T]$ ist maximal, also von der Höhe 1; da Division durch nilpotente Elemente die Höhe von Primidealen nicht verändert, folgt $\mathrm{ht}(\mathfrak{n}) = 1$. Sei nun $\dim A \geq 1$. Da A als noetherscher Ring nur endlich viele minimale Primideale besitzt und $\mathfrak{m}$ in keinem enthalten ist, liegt $\mathfrak{m}$ auch nicht in ihrer Vereinigung; folglich existiert ein Element $x \in \mathfrak{m}$, welches zu keinem minimalen Primideal von A gehört. Sei $B := A/xA$, und sei $\mathfrak{n}'$ das Bild von $\mathfrak{n}$ in $B[T]$; dann gilt

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{n}) = \dim A[T]_\mathfrak{n} \leq \dim A[T]_\mathfrak{n}/(x) + 1 = \dim B[T]_{\mathfrak{n}'} + 1 = \mathrm{ht}(\mathfrak{n}') + 1 \quad .$$

Da x in keinem minimalen Primideal von A liegt, gilt $\dim B = \dim A - 1$; ferner ist offenbar $\mathfrak{n}' \cap B$ das maximale Ideal von B. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also $\mathrm{ht}(\mathfrak{n}') \leq \dim B + 1 = \dim A$, und es folgt $\mathrm{ht}(\mathfrak{n}) \leq \dim A + 1$, wie gewünscht. □

1.2.22 Korollar. *Sei A ein noetherscher Ring, sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $T_1, \ldots, T_n$ ein System von Variablen; dann gilt*

$$\dim A[T_1, \ldots, T_n] = \dim A + n \quad .$$

Beweis. Nach Hilberts Basissatz genügt es, den Fall $n = 1$ zu betrachten. Sei $T := T_1$, sei $\mathfrak{n}'$ ein maximales Ideal von $A[T]$, und sei $\mathfrak{p} := \mathfrak{n}' \cap A$. Dann faktorisiert der kanonische Homomorphismus $A \to A[T]_{\mathfrak{n}'}$ über $A_\mathfrak{p}$ und induziert einen Homomorphismus $\tau : A_\mathfrak{p}[T] \to A[T]_{\mathfrak{n}'}$. Sei $\mathfrak{n}$ das Urbild von $\mathfrak{n}' A[T]_{\mathfrak{n}'}$ unter τ. Dann ist $\mathfrak{n}$ maximal, denn mit $A[T] \to A[T]/\mathfrak{n}' = A[T]_{\mathfrak{n}'}/\mathfrak{n}' A[T]_{\mathfrak{n}'}$ ist auch $A_\mathfrak{p}[T] \to A[T]_{\mathfrak{n}'}/\mathfrak{n}' A[T]_{\mathfrak{n}'}$ surjektiv, $A_\mathfrak{p}[T]/\mathfrak{n} \to A[T]_{\mathfrak{n}'}/\mathfrak{n}' A[T]_{\mathfrak{n}'}$ also bijektiv, und somit ist $A_\mathfrak{p}[T]/\mathfrak{n} \cong A[T]/\mathfrak{n}'$ ein Körper. Wir verifizieren unmittelbar anhand der universellen Eigenschaft der Lokalisierung, daß sich $A[T]_{\mathfrak{n}'}$ mit $(A_\mathfrak{p}[T])_\mathfrak{n}$ identifiziert.

Offenbar liegt $\mathfrak{n}$ über $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$; nach Lemma Lemma 1.2.21 gilt also $\operatorname{ht}\mathfrak{n}' = \dim A[T]_{\mathfrak{n}'} = \dim(A_\mathfrak{p}[T])_\mathfrak{n} = \operatorname{ht}\mathfrak{n} = \dim A_\mathfrak{p} + 1 = \operatorname{ht}\mathfrak{p} + 1$. Da jedes maximale Ideal $\mathfrak{p} \subset A$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{n}' \subset A[T]$ mit $\mathfrak{n}' \cap A = \mathfrak{p}$ liegt, folgt $\dim A[T] = \dim A + 1$, wie behauptet. □

1.2.23 Lemma. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler noetherscher Ring, und sei $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal in $A[T]$ mit $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$. Dann ist $A[T]_\mathfrak{n}$ regulär.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{m}A[T]$ in $\mathfrak{n}$ enthalten; ferner identifiziert sich der Quotient $A[T]/\mathfrak{m}A[T]$ mit $k[T]$. Das Bild von $\mathfrak{n}$ in $A[T]/\mathfrak{m}A[T]$ ist von Null verschieden, denn ansonsten wäre $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}A[T]$, und $A[T]/\mathfrak{n}$ wäre isomorph zu $k[T]$, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{n}$. Sei $\overline{f}$ ein normierter Erzeuger des Bildes von $\mathfrak{n}$ in $k[T]$, und sei f eine normierte Liftung von $\overline{f}$ nach $A[T]$; dann gilt $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}A[T] + fA[T]$. Aufgrund der Regularität von A ist $\mathfrak{m}$ von $d := \dim A$ Elementen erzeugt; folglich ist $\mathfrak{n}$ von $d+1$ Elementen erzeugt. Nach Lemma 1.2.21 gilt $\operatorname{ht}(\mathfrak{n}) = d+1$; das Ideal $\mathfrak{n}$ ist also von $\dim A[T]_\mathfrak{n}$ Elementen erzeugt, und folglich ist $A[T]_\mathfrak{n}$ regulär. □

1.2.24 Korollar. *Sei A ein regulärer noetherscher Ring, sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, und sei $T_1, \ldots, T_n$ ein System von Variablen; dann ist $A[T_1, \ldots, T_n]$ regulär.*

Beweis. Wiederum genügt es, den Fall $n = 1$ zu betrachten; nach Korollar 1.2.16 genügt es zu zeigen, daß die Lokalsierungen $A[T]_{\mathfrak{n}'}$ in den maximalen Idealen $\mathfrak{n}'$ von $A[T]$ regulär sind. Sei also $\mathfrak{n}' \subset A[T]$ maximal, und sei $\mathfrak{p} := \mathfrak{n}' \cap A$; wie im Beweis von Korollar 1.2.22 sehen wir, daß ein maximales Ideal $\mathfrak{n} \subset A_\mathfrak{p}[T]$ über $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ existiert, derart daß $A[T]_{\mathfrak{n}'}$ zu $(A_\mathfrak{p}[T])_\mathfrak{n}$ isomorph ist. Aufgrund der Regularität von A ist $A_\mathfrak{p}$ regulär; nach Lemma 1.2.23 ist also auch $(A_\mathfrak{p}[T])_\mathfrak{n} \cong A[T]_{\mathfrak{n}'}$ regulär, wie gewünscht. □

1.2.25 Korollar. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler noetherscher Ring, sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $T_1, \ldots, T_n$ ein System von Variablen; dann ist $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ regulär.*

Beweis. Wir schreiben kurz T für das System $T_1, \ldots, T_n$. Nach Korollar 1.2.24 ist $A[T]$ regulär. Der noethersche Ring $A[[T]]$ ist offenbar lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m}A[[T]] + TA[[T]]$; anhand der universellen Eigenschaft der Komplettierung verifiziert man leicht, daß sich seine Komplettierung mit der Komplettierung des regulären lokalen noetherschen Rings $A[T]_{\mathfrak{m}''}$ identifiziert, wo $\mathfrak{m}''$ das Urbild von $\mathfrak{m}'$ in $A[T]$ bezeichnet. Nach Korollar 1.2.20 ist die Komplettierung von $A[[T]]$ also regulär, und die umgekehrte Implikation von Korollar 1.2.20 zeigt schließlich, daß $A[[T]]$ regulär ist, wie behauptet. □

1.3 Das Strukturtheorem von Cohen

In diesem Abschnitt geben wir einen Beweis des Theorems von Cohen über die Struktur vollständiger lokaler noetherscher Ringe. Es besagt, daß sich jeder vollständige lokale noethersche Ring $(A, \mathfrak{m}, k)$ als Quotient eines formellen Potenzreihenrings über einem lokalen noetherschen vollständigen Ring C darstellen läßt, wobei sich C als Körper, als vollständiger p-Ring oder als abgeschnittener vollständiger p-Ring realisieren läßt (Korollar 1.3.25). Für den Beweis ist zu zeigen, daß A einen Ring C des genannten Typs als Unterring enthält, derart daß sich der Restklassenkörper von C mit k identifiziert.

Ist k von Charakteristik 0, so folgt die Existenz eine zu k isomorphen Teilkörpers von A mit Hilfe von Hensels Lemma (Theorem 1.3.1). Ist k hingegen von positiver Charakteristik $p > 0$, so ist die Lage komplizierter: Es existiert stets ein vollständiger p-Ring B, dessen Restklassenkörper sich mit k identifiziert (Lemma 1.3.22); nach Theorem 1.3.20 liftet die Projektion $B \to k$ zu einem Homomorphismus $B \to A$, welcher für char $A = 0$ injektiv ist und für char $A = p^r > 0$ über einen Monomorphismus $B/(p^r) \to A$ faktorisiert. Wir führen den Beweis von Theorem 1.3.20, indem wir zunächst k als perfekt voraussetzen und sukzessiv den kanonischen Homomorphismus von $B_0 := \mathbb{Z}_{(p)} \subset B$ nach A auf Unterringe B' von B ausdehnen. Zur Konstruktion dieser Unterringe benötigen wir als technisches Hilfsmittel den Begriff des multiplikativen Repräsentanten. Ist k nicht perfekt, so konstruieren durch Adjunktion p-ter Wurzeln einen vollständigen lokalen Ring $(A', \mathfrak{m}', k^{p^{-\infty}})$ und einen vollständigen p-Ring B' über A beziehungsweise B, derart daß sich der Isomorphismus $B/(p) \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$ zu einem Isomorphismus $B'/(p) \xrightarrow{\sim} A'/\mathfrak{m}'$ ausdehnt. Hierfür benötigen wir den Begriff der p-Basis. Um sicherzustellen, daß A' und B' noethersch sind, stützen wir uns auf ein Kriterium, welches wir in Abschnitt 1.3.2 beweisen; dort behandeln wir auch einige allgemeine Approximationstechniken, welche sich noch an anderer Stelle als nützlich erweisen werden.

1.3.1 Der Fall char $k = 0$

1.3.1 Theorem. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein vollständiger lokaler noetherscher Ring. Ist k von Charakteristik 0, so enthält A einen Körper k', welcher sich unter der kanonischen Projektion $\varphi : A \to k$ mit k identifiziert.*

Beweis. Wegen char $A/\mathfrak{m} = 0$ sind alle Elemente der Form $n \cdot 1 \in A$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, in A invertierbar; folglich ist der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen in natürlicher Weise ein Teilkörper von A. Da die Menge der Teilkörper eines Rings induktiv ist, besitzt A nach dem Lemma von Zorn einen maximalen Teilkörper k'. Wir zeigen, daß das Bild von k' unter $\varphi : A \to k$ mit k übereinstimmt: Enthielte k ein über $\varphi(k')$ transzendentes Element $\overline{x}$, so wäre $\mathfrak{m} \cap k'[x] = 0$, wo $x \in A$ eine Liftung von $\overline{x}$ bezeichnet, und A enthielte den Teilkörper $k'(x) \supsetneq k'$, im Widerspruch zur Maximalität von k'. Somit ist k separabel algebraisch über $\varphi(k')$. Ist $\overline{a}$ ein Element in $k - \varphi(k')$, so sei $\overline{p} \in \varphi(k')[X]$ das Minimalpolynom von $\overline{a}$ über $\varphi(k')$. Dann ist $\overline{p}$ separabel und spaltet über k den Linearfaktor $X - \overline{a}$ ab, besitzt also in $k[X]$ die Faktorisierung $\overline{p} = (X - \overline{a}) \cdot \overline{g}$ mit einem $\overline{g} \in k[X]$. Aufgrund der Separabilität von $\overline{p}$ ist $\overline{a}$ keine Nullstelle von $\overline{g}$; folglich sind die Polynome $X - \overline{a}$ und $\overline{g}$ teilerfremd. Nach dem Henselschen Lemma ([Sa], Chap. IV, no. 1) liftet somit die Zerlegung $\overline{p} = (X - \overline{a}) \cdot \overline{g}$ zu einer Gleichung $p = (X - a) \cdot g$ in $A[X]$ mit $p \in k'[X]$. Da $\overline{a}$ nicht in $\varphi(k')$ enthalten ist, liegt a nicht in k', und als Nullstelle von $p \in k'[X]$ ist a über k' algebraisch; folglich ist $k'[a] = k'(a)$ ein echter Erweiterungskörper von k' in A, im Widerspruch zur Maximalität von k'. □

1.3.2 Endlichkeitsbedingungen in vollständigen Ringen

Sei A ein Ring, sei $I \subset A$ ein Ideal, sei A vollständig bezüglich der I-adischen Topologie, und sei M ein I-adisch separierter A-Modul. Ist M/IM über A/I endlich erzeugt, so ist bereits M über A endlich erzeugt, und jede Liftung eines Erzeugendensystems von M/IM bildet ein Erzeugendensystem von M. Ist ferner A/I noethersch und I/I^2 über A/I endlich erzeugt, so ist bereits A noethersch. Wir führen die Beweise für allgemeinere topologische Ringe:

1.3.2 Definition. *Sei A ein Ring, und sei M ein A-Modul. Eine Filtrierung von A ist eine Familie $(I_s)_{s\geq 0}$ von Idealen, derart daß I_0 mit A übereinstimmt und daß $I_s \cdot I_t$ für $s, t \in \mathbb{N}$ in I_{s+t} enthalten ist. Eine Filtrierung von M ist eine Familie $(M_s)_{s\geq 0}$ von Untermoduln, für welche M_0 mit M übereinstimmt und $I_s M_t$ für $s, t \in \mathbb{N}$ in M_{s+t} enthalten ist.*

1.3.3 Bemerkung und Definition. *Sei $A = (A, (I_s)_{s\geq 0})$ ein filtrierter Ring, und sei $M = (M, (M_s)_{s\geq 0})$ ein filtrierter A-Modul. Dann ist*

$$\operatorname{gr}(M) := \bigoplus_{j\geq 0} M_j/M_{j+1}$$

ein graduierter Modul über dem zweiten assoziierten graduierten Ring

$$\operatorname{gr}(A) := \bigoplus_{j\geq 0} I_j/I_{j+1} \quad .$$

Sind die betrachteten Filtrierungen durch die Potenzen eines Ideals $I \subset A$ gegeben, $I_s = I^s$, $M_s = I^s M$, so bezeichnen wir die zugehörigen graduierten Objekte $\operatorname{gr}(A)$, $\operatorname{gr}(M)$ mit $\operatorname{gr}_I(A)$, $\operatorname{gr}_I(M)$. Ist M separiert bezüglich der durch die Filtrierung erklärten Topologie, so existiert für jedes von Null verschiedene Element $x \in M$ eine eindeutig bestimmte Zahl $s \in \mathbb{N}$ mit $x \in M_s$, $x \notin M_{s+1}$, welche wir als den Initialgrad von x bezeichnen; das Bild $g(x)$ von x in M_s/M_{s+1} heißt dann die Initialform von x.

1.3.4 Lemma. *Sei $A = (A, (I_s)_{s\geq 0})$ ein vollständig filtrierter Ring, sei $M = (M, (M_s)_{s\geq 0})$ ein separiert filtrierter A-Modul, und seien $w_1, \ldots, w_n$ Elemente in M, deren Initialformen $g(w_i)$ den $\operatorname{gr}(A)$-Modul $\operatorname{gr}(M)$ erzeugen. Dann ist M über A durch $w_1, \ldots, w_n$ erzeugt.*

Beweis. Sei r_i der Initialgrad von w_i; wir betrachten den endlichen freien A-Modul $F := A^n$, filtriert durch

$$F_r := I_{r-r_1} \times \ldots \times I_{r-r_n} \quad (r \geq 0) \quad ,$$

wobei wir, falls s negativ ist, $I_s := A$ setzen. Mit A ist auch F vollständig. Wir betrachten nun den Homomorphismus $f : F \to M$, gegeben durch

$$f(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{s=1}^{n} x_s w_s \quad ;$$

offenbar ist $f(F_r)$ in M_r enthalten. Der induzierte graduierte Homomorphismus

$$\operatorname{gr}(f) : \operatorname{gr}(F) \to \operatorname{gr}(M)$$

von A-Moduln ist nach Voraussetzung surjektiv; es ist zu zeigen, daß auch f surjektiv ist. Seien hierzu $r \geq 0$ und $w \in M_r$ beliebig gegeben. Da $\operatorname{gr}(f)$ surjektiv ist, existiert ein Element $v_r \in F_r$ mit $w \equiv f(v_r)$ mod M_{r+1}. Indem wir w durch $w - f(v_r)$ ersetzen, erhalten wir induktiv eine Folge $(v_s)_{s \geq p}$ in F mit $v_s \in F_s$, derart daß für jedes $s \geq r$ die Kongruenz

$$x \equiv f(y_r + \ldots + y_s) \bmod M_{s+1}$$

erfüllt ist. Da F vollständig ist, konvergiert die Reihe $\sum_{s \geq r} y_s$ gegen ein Element $v \in F$, und es gilt $w \equiv f(v)$ mod M_{s+1} für jedes $s \geq r$. Da M separiert ist, stimmt somit w mit $f(v)$ überein; damit ist die Behauptung gezeigt. □

Bemerkung. Man beachte, daß in vorstehendem Lemma die x_i hinreichend kleinen Initialgrad besitzen müssen, um die Surjektivität des graduierten Homomorphismus $\mathrm{gr}(f)$ zu gestatten.

1.3.5 Korollar. *Sei A ein Ring, sei $I \subset A$ ein Ideal, und sei A vollständig bezüglich der I-adischen Topologie; ferner sei M ein I-adisch separierter A-Modul. Sind $w_1, \ldots, w_n$ Elemente in M, deren Klassen den Quotienten M/IM über A/I erzeugen, so erzeugen sie bereits M über A.*

Beweis. Erzeugen die Elemente $w_1, \ldots, w_n$ den A/I-Modul M/IM, so erzeugen ihre Initialformen den $\mathrm{gr}_I(A)$-Modul $\mathrm{gr}_I(M)$, und wir schließen mit Lemma 1.3.4. □

Bemerkung. Ist $A = (A, \mathfrak{m})$ lokal und $I = \mathfrak{m}$, so beachte man die Analogie zum Lemma von Nakayama, für welches allerdings M als endlich erzeugt vorauszusetzen ist.

1.3.6 Lemma. *Sei $A = (A, (I_s)_{s \geq 0})$ vollständig separiert filtrierter Ring. Ist der assoziierte Ring $\mathrm{gr}(A)$ noethersch, so ist auch A noethersch.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus A; filtrieren wir $\mathfrak{a}$ durch die Untermoduln $\mathfrak{a} \cap I_n$ und versehen wir $\mathfrak{a}$ mit der induzierten Topologie, so ist $\mathfrak{a}$ offenbar separiert. Der graduierte $\mathrm{gr}(A)$-Modul $\mathrm{gr}(\mathfrak{a})$ ist ein homogenes Ideal von $\mathrm{gr}(A)$; da $\mathrm{gr}(A)$ noethersch ist, besitzt $\mathrm{gr}(\mathfrak{a})$ somit über $\mathrm{gr}(A)$ ein endliches Erzeugendensystem. Wir können jeden Erzeuger als Summe seiner homogenen Komponenten schreiben und letzere als Initalformen endlich vieler geeigneter Elemente aus $\mathfrak{a}$ interpretieren; nach Lemma 1.3.4 bilden letztere ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}$ über A. □

1.3.7 Satz. *Sei A ein Ring und sei I ein Ideal. Angenommen, A ist vollständig und separiert bezüglich der I-adischen Topologie; dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(*i*) *A noethersch.*

(*ii*) *A/I ist noethersch, und I/I^2 ist als A/I-Modul endlich erzeugt.*

Beweis. Ist I/I^2 als A/I-Modul von endlichem Typ, so ist der zur I-adischen Topologie auf A assoziierte graduierte Ring $\mathrm{gr}_I(A) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$ Quotient eines Polynomsrings in endlich vielen Variablen über A/I. Nach Hilberts Basissatz ist $\mathrm{gr}_I(A)$ somit noethersch, falls dies für A/I der Fall ist, und nach Lemma 1.3.6 ist mit $\mathrm{gr}_I(A)$ somit auch A noethersch, wie gewünscht. Die umgekehrte Implikation ist trivial. □

Abschließend zeigen wir einige aus der noetherschen Situation wohlvertraute Eigenschaften der Komplettierung eines lokalen Rings $(A, \mathfrak{m})$, wo $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt ist:

1.3.8 Satz. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, dessen maximales Ideal $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt ist, und sei A' die $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung von A. Dann ist A' noethersch lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}A'$, und für $s \geq 0$ gilt $\mathfrak{m}^s A' \cap A = \mathfrak{m}^s$.*

Beweis. Für $s \geq 0$ sei $\mathfrak{m}'_s \subset A'$ das Ideal aller Elemente $(a_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \varprojlim A/\mathfrak{m}^{r+1}$ mit $a_r = 0$ für $r < s$; wir schreiben $\mathfrak{m}'$ für $\mathfrak{m}'_1$. Offenbar stimmt für alle $s \geq 0$ der Quotient $\mathfrak{m}^s/\mathfrak{m}^{s+1}$ kanonisch mit $\mathfrak{m}'_s/\mathfrak{m}'_{s+1}$ überein. Da $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt ist, besitzt folglich $\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2 = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ über dem Körper $A'/\mathfrak{m}' = A/\mathfrak{m}$ ein endliches Erzeugendensystem, und da A' bezüglich der $\mathfrak{m}'$-adischen Topologie vollständig und separiert ist, handelt es sich nach Satz 1.3.7 bei A' somit um einen noetherschen Ring. Wir fixieren ein endliches Erzeugendensystem $\boldsymbol{x}$ von $\mathfrak{m}^s$. Die Initialformen von $\boldsymbol{x}$ erzeugen den $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$-Modul $\bigoplus_{r\geq s} \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$ und somit den $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}'}(A')$-Modul $\bigoplus_{r\geq s} \mathfrak{m}'_r/\mathfrak{m}'_{r+1}$. Nun ist A' bezüglich der Fitrierung $(\mathfrak{m}'_r)_{r\geq 0}$ vollständig, und $\mathfrak{m}'_s$ ist bezüglich der Filtrierung $(\mathfrak{m}'_r)_{r\geq s}$ separiert; folglich bildet $\boldsymbol{x}$ nach Lemma 1.3.4 ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}'_s$. Somit stimmt $\mathfrak{m}^s A'$ mit $\mathfrak{m}'_s$ überein, und insbesondere folgt $\mathfrak{m}^s A' \cap A = \mathfrak{m}^s$. Es bleibt einzusehen, daß A' lokal ist mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}'$: Sei x' ein Element in $A' - \mathfrak{m}A'$, und sei $x \in A$ eine Liftung der Klasse von a' in $A'/\mathfrak{m}' \cong A/\mathfrak{m}$. Dann ist x nicht in $\mathfrak{m}$ enthalten; schreiben wir $x' = x + \varepsilon$ mit $\varepsilon \in \mathfrak{m}'$, so zeigt die geometrische Reihe, daß $x' = x(1 + x^{-1}\varepsilon)$ in A' invertierbar ist, wie gewünscht. □

1.3.3 Multiplikative Repräsentanten und p-Basen

1.3.9 Lemma. *Sei A ein Ring, sei $I \subset A$ ein Ideal, und sei p eine natürliche Zahl, deren kanonisches Bild in A in I liegt. Ferner sei $n \geq 1$, und seien x, y Elemente in A mit $x - y \in I^n$. Dann gilt $x^{p^s} - y^{p^s} \in I^{n+s}$ für alle $s \geq 0$.*

Beweis. Induktion nach s reduziert unmittelbar auf den Fall $s = 1$. Es gilt

$$x^p - y^p = (x - y)(x^{p-1} + \ldots + x^{p-1-i}y^i + \ldots + y^{p-1}) \quad ;$$

wir bezeichnen den rechten Faktor der rechten Seite mit z. Für jedes $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ ist die Differenz $x^{p-1} - x^{p-1-i}y^i = x^{p-1-i}(x^i - y^i)$ ein Vielfaches von $x - y \in I$; somit ist z eine Summe von p Termen, von denen jeder modulo I zu x^{p-1} kongruent ist. Folglich besteht die Kongruenz $z \equiv px^{p-1} \bmod I$, und da p modulo I verschwindet, folgt $z \equiv 0 \bmod I$ und somit $x^p - y^p = (x - y)z \in I^{n+1}$, wie gewünscht. □

1.3.10 Definition. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler Ring mit* $\mathrm{char}\, k = p > 0$*; ein Element $a \in A$ heißt multiplikativer Repräsentant seiner Klasse $\alpha \in A/\mathfrak{m}$, falls für jedes $n \geq 0$ in A eine p^n-te Wurzel von a existiert.*

1.3.11 Lemma. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein vollständiger lokaler noetherscher Ring, und sei k von positiver Charakteristik $p > 0$. Existiert für alle $n \geq 0$ in k die p^n-te Wurzel von α, so besitzt α einen eindeutig bestimmten multiplikativen Repräsentanten $a \in A$.*

Beweis. Sei $i \geq 0$, sei α_i die p^i-te Wurzel von α in k, und sei $c_i \in A$ ein beliebiger Repräsantant von α_i; ferner sei $n \geq 0$ beliebig gegeben. Aufgrund der Eindeutigkeit p-ter Wurzeln besteht für $j > i$ die Gleichung $\alpha_{n+i} = \alpha_{n+j}^{p^{j-i}}$; folglich ist $c_{n+i} - c_{n+j}^{p^{j-i}}$ in $\mathfrak{m}$ enthalten, und mit Lemma 1.3.9 folgt $c_{n+i}^{p^i} - c_{n+j}^{p^j} \in \mathfrak{m}^i$. Somit ist $(c_{n+i}^{p^i})_{i\geq 0}$ eine Cauchyfolge. Sei $a_n \in A$ der Limes von $(c_{n+i}^{p^i})_{i\geq 0}$, und sei $a := a_0$. Dann gilt nach Konstruktion $a = a_n^{p^n}$ für alle $n \geq 0$; somit ist a ein multiplikativer Repräsentant von α. Sei $b \in A$ ein weiterer multiplikativer Repräsentant von α, und für $n \in \mathbb{N}$ sei b_n eine p^n-te Wurzel von b in A. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig; aufgrund der Eindeutigkeit der p^n-ten Wurzel von α gilt $b_n - a_n \in \mathfrak{m}$, und mit Lemma 1.3.9 folgt $b - a \in \mathfrak{m}^n$. Da A nach dem Krullschen Durchschnittssatz separiert ist, folgt $b = a$. □

1.3.12 Bemerkung und Definition. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein vollständiger lokaler noetherscher Ring mit* char $k = p > 0$, *sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $a \in A$ der multiplikative Repräsentant eines Elementes $\alpha \in k$. Nach Lemma 1.3.11 besitzt die p^n-te Wurzel α_n von α einen eindeutig bestimmten multiplikativen Repräsentanten, welcher mit $a^{p^{-n}}$ bezeichnet werde. Offenbar ist die p^n-te Potenz von $a^{p^{-n}}$ ein multiplikativer Repräsentant von α; aufgrund der Eindeutigkeit multiplikativer Repräsentanten ist somit $a^{p^{-n}}$ eine p^n-te Wurzel von a.*

1.3.13 Definition. *Sei k ein Körper von positiver Charakteristik $p > 0$; eine Familie $(\alpha_i)_{i\in I}$ von Elementen aus k heißt p-unabhängig, falls für jede endliche Teilfamilie $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n})$ die Gleichung*

$$[k^p(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}) : k^p] = p^n$$

gilt. Ein maximal p-unabhängiges System heißt eine p-Basis von k.

Bemerkung. Die Existenz von p-Basen ist durch Zorns Lemma gesichert.

1.3.14 Bemerkung. *Sei k ein Körper der Charakteristik p, sei $\alpha \in k$ ein beliebiges Element, und sei $k^p \subset l \subset k$ ein Körperturm; dann ist α Nullstelle des rein inseparablen Polynoms $f_\alpha := X^p - \alpha^p \in k^p[X] \subset l[X]$. Entweder ist $f_\alpha \in l[X]$ irreduzibel, oder $f_\alpha \in l[X]$ zerfällt in Linearfaktoren; folglich ist α über l vom Grad* 1 *oder vom Grad p.*

1.3.15 Bemerkung. *Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Genau dann ist ein p-unabhängiges System $(\alpha_i)_{i\in I} \in k$ eine p-Basis von k, wenn $k^p(\alpha_i; i \in I)$ mit k übereinstimmt.*

Beweis. Sei $(\alpha_i)_{i\in I}$ eine p-Basis. Existierte ein Element $\alpha \in k - k^p(\alpha_i; i \in I)$, so wäre α nach Bemerkung 1.3.14 über $k^p(\alpha_i; i \in I)$ vom Grad p, im Widerspruch zur Maximalität von $(\alpha_i)_{i\in I}$. Stimmt umgekehrt $k^p(\alpha_i; i \in I)$ mit k überein, so ist $(\alpha_i)_{i\in I}$ aus trivialen Gründen maximal. □

Ist k ein Körper der Charakteristik $p > 0$, so fixieren wir einen algebraischen Abschluß k_a von k und betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Körper $k \subset k^{p^{-n}} \subset k^{p^{-\infty}} \subset k_a$.

1.3.16 Lemma. *Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Ist $(\alpha_i)_{i\in I}$ eine p-Basis von k, so bildet für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ die Familie $(\alpha_i^{p^n})_{i\in I}$ eine p-Basis von k^{p^n}.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß das System $(\alpha_j^{p^n})_{j\in I}$ in k^{p^n} p-unabhängig ist. Sei $J \subset I$ eine endliche Teilmenge; wir schließen mit Induktion nach card J. Im Fall $J = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei also $J \neq \emptyset$, und sei $i \in J$ ein beliebiges Element; wir setzen $J' := J - \{i\}$. Das Element $\alpha_i^{p^n} \in k^{p^n}$ ist nach Bemerkung 1.3.14 über $k^{p^{n+1}}(\alpha_j^{p^n}; j \in J')$ vom Grad $d = 1$ oder vom Grad $d = p$; es ist zu zeigen, daß $d = p$ gilt. Wäre $d = 1$, so ließe sich $\alpha_i^{p^n}$ als Polynom in den $\alpha_j^{p^n}$, $j \in J'$, mit Koeffizienten in $k^{p^{n+1}}$ schreiben. Potenzierung mit p^{-n} lieferte eine Darstellung von α_i als Polynom in den α_j, $j \in J'$, mit Koeffizienten in k^p, im Widerspruch zur p-Unabhängigkeit von $(\alpha_j)_{j\in J}$ in k. Somit ist das System $(\alpha_i^{p^n})_{i\in I}$ in k^{p^n} p-unabhängig; es bleibt einzusehen, daß es unter dieser Eigenschaft maximal ist: Ist $\alpha \in k^{p^n}$ ein beliebiges Element, so besitzt $\alpha^{p^{-n}} \in k$ eine polynomiale Darstellung durch die α_i, $i \in I$, mit Koeffizienten aus k^p; diese induziert eine Darstellung von α als Polynom in den $\alpha_i^{p^n}$, $i \in I$, mit Koeffizienten aus $k^{p^{n+1}}$. Nach Bemerkung 1.3.15 ist $(\alpha_i^{p^n})_{i\in I}$ in k^{p^n} folglich maximal p-unabhängig, wie gewünscht. □

1.3.17 Korollar. *Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei $(\alpha_i)_{i\in I}$ eine p-Basis von k. Dann stimmt für alle $s \geq 0$ $k^{p^s}(\alpha_i; i \in I)$ mit k überein.*

Beweis. Wir schließen mit Induktion nach s; der Fall $s = 0$ ist trivial. Nach Lemma 1.3.16 bilden die Potenzen $(\alpha_i^{p^s})_{i\in I}$ eine p-Basis von k^{p^s}; nach Bemerkung 1.3.15 gilt also $k^{p^{s+1}}(\alpha_i^{p^s}; i \in I) = k^{p^s}$. Nach Induktionsvoraussetzung identifiziert sich $k^{p^s}(\alpha_i; i \in I)$ mit k, und es folgt $k^{p^{s+1}}(\alpha_i; i \in I) = k$, wie gewünscht. □

1.3.4 Der Fall char $k = p > 0$

1.3.18 Bemerkung. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler Ring mit* char $k = p > 0$, *und sei φ die kanonische Projektion $A \to A/\mathfrak{m}$. Der Kern des kanonischen Homomorphismus $\iota : \mathbb{Z} \to A$ ist von einem Element $n \in \mathbb{N}$ erzeugt; da* ker ι *in* ker $\varphi \circ \iota = (p)$ *enthalten ist, wird n durch p geteilt. Existierte eine von p verschiedene Primzahl p' mit $p'|n$, so induzierte $\varphi \circ \iota$ einen Homomorphismus von Körpern $\mathbb{Z}/(p') \to A/\mathfrak{m}$ verschiedener Charakteristik; folglich gilt $n = 0$, oder es existiert ein $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ mit $n = p^r$.*

1.3.19 Definition. *Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Unter einem p-Ring verstehen wir einen diskreten Bewertungsring in Charakteristik Null, dessen Bewertungsideal von p erzeugt wird.*

1.3.20 Theorem. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein vollständiger lokaler noetherscher Ring mit* char $k = p > 0$, *sei $\sigma : A \to A/\mathfrak{m}$ der kanonische Homomorphismus, sei B ein vollständiger p-Ring, und sei $\tau : B \to A/\mathfrak{m}$ ein surjektiver Homomorphismus mit* ker $\tau = (p)$. *Dann existiert ein Homomorphismus $\sigma : B \to A$, derart daß folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, dashed, "\sigma"'] & A/\mathfrak{m} \\ & A \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Bemerkung. Der Homomorphismus σ ist offenbar automatisch lokal.

Beweis. Seien ι_A, ι_B die kanonischen Homomorphismen von $\mathbb{Z}$ nach A, B. Der Kern von $\varphi \circ \iota_A : \mathbb{Z} \to A/\mathfrak{m}$ ist durch p erzeugt; folglich faktorisiert ι in natürlicher Weise über $\mathbb{Z}_{(p)}$; ebenso faktorisiert ι_B kanonisch über einen Monomorphismus $\mathbb{Z}_{(p)} \hookrightarrow B$. Wir setzen $B_0 := \mathbb{Z}_{(p)}$; dann ist B_0 in natürlicher Weise ein Unterring von B, für welchen sich $\tau|_{B_0} : B_0 \to A/\mathfrak{m}$ zu einem Homomorphismus $\sigma_0 : B_0 \to A$ ausdehnt.

Sei $k_0 \cong \mathbb{F}_p$ der Primkörper von k, und sei $(\alpha_\mu)_{\mu\in I}$ eine Transzendenzbasis von k über k_0. Wir setzen $k = A/\mathfrak{m}$ zunächst als perfekt voraus; dann existieren in k beliebige p^n-te Wurzeln. Der surjektive Homomorphismus $\tau : B \to A/\mathfrak{m}$ induziert einen Isomorphismus $\overline{\tau} : B/(p) \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$; wir definieren $\beta_\mu := \overline{\tau}^{-1}(\alpha_\mu)$, $\mu \in I$. Mit $A/\mathfrak{m}$ ist auch $B/(p)$ perfekt, und es gilt $\beta_\mu^{p^{-n}} = \overline{\tau}^{-1}(\alpha_\mu^{p^{-n}})$. Ferner setzen wir

$$k_1 := k_0(\alpha_\mu^{p^{-n}}; \mu \in I, n \geq 0) \quad ,$$

und wir betrachten multiplikative Repräsentanten $a_\mu \in A$, $b_\mu \in B$ von α_μ beziehungsweise β_μ, $\mu \in I$; diese existieren nach Lemma 1.3.11 aufgrund der Vollständigkeit von A und B.

Ist $f \in B_0[X_\mu; \mu \in I]$ ein Polynom mit $f(b_\mu; \mu \in I) = 0$, so besitzt f eine Darstellung $f = p \cdot f'$ mit einem $f' \in B_0[X_\mu; \mu \in I]$, da ansonsten f eine nichttriviale algebraische Gleichung in den β_μ über $k_0 = B_0/(p)$ induzieren würde. Da B von

Charakteristik Null ist, gilt $f'(b_\mu, \mu \in I) = 0$; induktiv sehen wir, daß f in $\bigcap_{n\geq 0}(p^n)$ liegt und, da $\mathbb{Z}_{(p)}$ nach dem Krullschen Durchschnittssatz p-adisch separiert ist, somit trivial ist. Der surjektive Homomorphismus $B_0[X_\mu, \mu \in I] \to B_0[b_\mu, \mu \in I]$, welcher b_μ für X_μ einsetzt, ist folglich bijektiv, so daß wir $(b_\mu)_{\mu\in I}$ als System von Variablen ansehen können. Der Ring $B_0[b_\mu, b_\mu^{p^{-n}}] \subset B$ identifiziert sich mit $B_0[b_\mu][X]/(X^{p^n} - b_\mu)$, denn: Ist $f \in B_0[b_\mu][X]$ ein Polynom mit $f(b_\mu^{p^{-n}}) = 0$, so liefert Division mit Rest eine Zerlegung $f = (X^{p^n} - b_\mu)\cdot g + r$ mit $\operatorname{grad} r < p^n$; es genügt einzusehen, daß r trivial ist. Da $X^{p^r} - \beta_\mu \in k_0(\beta_\mu)[X]$ irreduzibel ist und $r(b_\mu^{p^{-n}}) = 0$ gilt, folgt die Existenz einer Gleichung $r = p\cdot r'$ in $B_0[b_\mu][X]$; offenbar ist $\operatorname{grad} r = \operatorname{grad} r'$, und da B von Charakteristik Null ist, gilt $r'(b_\mu^{p^{-n}}) = 0$. Induktiv sehen wir, daß r in $\bigcap_{n\geq 0} p^n B_0[b_\mu][X]$ liegt und somit, da B nach dem Krullschen Durchschnittssatz p-adisch separiert ist, trivial ist.

Wir können also durch die Zuordnung $b_\mu^{p^{-n}} \mapsto a_\mu^{p^{-n}}$ einen Homomorphismus

$$\sigma_1' : B_1' := B_0[b_\mu^{p^{-n}}; \mu \in I, n \geq 0] \longrightarrow A,$$

erklären, welcher die Restriktion $\tau|_{B_1'} : B_1' \to A/\mathfrak{m}$ fortsetzt. Sei ν die Bewertung von B, und sei B_1 der durch Restriktion von ν induzierte Bewertungsring von $\operatorname{Frac} B_1'$. Dann besitzt ein Element $b \in B_1$ eine Darstellung als Quotient $\frac{P}{Q}$, $P, Q \in B_1'$, mit $\nu(P) \geq \nu(Q)$. Nach Voraussetzung ist das Bewertungsideal von B durch p erzeugt, so daß wir annehmen dürfen, daß Q nicht durch p teilbar ist, daß also $\sigma_1'(Q) \notin \mathfrak{m}$ ein Einheit ist. Betrachten wir also B_1 als die Lokalisierung von B_1' nach dem multiplikativen System aller $Q \in B_1'$, welche nicht durch p teilbar sind und somit in B Einheiten darstellen, so sehen wir, daß σ_1' eine Fortsetzung $\sigma_1 : B_1 \to A$ besitzt, welche $\tau|_{B_1} : B_1 \to A/\mathfrak{m}$ liftet.

Sei nun $\mathcal{E}$ die Menge aller Paare $(B_\lambda, \sigma_\lambda)$, wo B_λ ein Unterring von B ist, welcher B_1 enthält und welcher mit dem Bewertungsring zur Restriktion von ν auf $\operatorname{Frac} B_\lambda$ übereinstimmt, und wo $\sigma_\lambda : B_\lambda \to A$ ein Homomorphismus ist, welcher $\tau|_{B_\lambda} : B_\lambda \to A/\mathfrak{m}$ liftet. Wegen $(B_1, \sigma_1) \in \mathcal{E}$ ist $\mathcal{E}$ nicht leer, und jede bezüglich der kanonischen partiellen Ordnung $(B_\lambda, \sigma_\lambda) \leq (B_{\lambda'}, \sigma_{\lambda'}) :\Leftrightarrow (B_\lambda \subset B_{\lambda'}, \sigma_{\lambda'}|_{B_\lambda} = \sigma_\lambda)$ aufsteigende Kette besitzt die Vereinigung als obere Schranke in $\mathcal{E}$; nach dem Lemma von Zorn besitzt $\mathcal{E}$ somit ein maximales Element (B', σ'). Wir versehen B' mit der p-adischen Topologie. Der Homomorphismus σ' ist aufgrund von $\sigma'(p) \in \mathfrak{m}$ stetig; folglich ist B' vollständig, da sich ansonsten σ' echt auf die Komplettierung von B' fortsetzen ließe, im Widerspruch zur Maximalität von (B', σ'). Wir wollen zeigen, daß $\tau(B') = k$ gilt. Zunächst ist $k_1 = k_0(\alpha_\mu^{p^{-n}}; \mu \in I, n \geq 0)$ perfekt, denn k_0 ist perfekt als endlicher Körper, so daß jedes Element aus k_1 aufgrund der binomischen Formel seine p^n-ten Wurzeln besitzt. Da die α_μ eine Transzendenzbasis von k über k_0 bilden, ist k somit über k_1 und damit insbesondere über $\tau(B')$ separabel algebraisch. Ist also $\alpha \in k - \{0\}$, so sei $\pi \in k_1[X]$ das Minimalpolynom von α über k_1; wir wählen unter $\tau|_{B'}$ eine normierte Liftung $f \in B'[X]$ von π mit $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} \pi$ und setzen $g := \sigma'(f)$. Da π separabel ist, liften α und $\beta := \overline{\tau}^{-1}(\alpha)$ nach dem Henselschen Lemma ([Sa], Chap. IV, no. 1) zu Nullstellen $a \in A, b \in B$ von $g \in A[X]$ und $f \in B'[X]$. Die Zuordnung $b \mapsto a$ erklärt eine Fortsetzung von σ' auf $B'[b]$, denn $\sigma'(f)(a) = g(a) = 0$, und $B'[b]$ identifiziert sich mit $B'[X]/(f)$. Um letzteres einzusehen, schließen wir wie gewohnt: f ist normiert, so daß wir mit Rest durch f dividieren können. Ein Element h im Kern des Homomorphismus $B'[X] \to B'[b]$, welcher b einsetzt, schreibt sich also in der eindeutigen Form $h = qf + r$ mit $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} f$, und wir sehen induktiv, daß r in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^n B'[X]$ liegt; da B' als Unterring von B p-adisch separiert ist, folgt $r = 0$, wie gewünscht. Als Liftung von $\beta \in B/(p) - \{0\}$ besitzt b die p-Ordnung Null; nach der strikten Dreiecksungleichung identifiziert sich $B'[b]$ mit dem Bewertungsring der Restriktion von ν auf seinen Quotientenkörper $(\operatorname{Frac} B')[b]$. Aufgrund der Maximalität von B' folgt $B' = B'[b]$; damit ist $\tau(B') = k$

gezeigt.

Da B' mit dem durch die Restriktion von ν gegebenen Bewertungsring seines Quotientenkörpers übereinstimmt, ist B' insbesondere lokal mit maximalem Ideal pB', und die Inklusion $B' \hookrightarrow B$ ist ein lokaler Homomorphismus; da $\tau(B')$ mit k übereinstimmt, induziert sie einen Isomorphismus $B'/(p) \xrightarrow{\sim} B/(p)$. B' ist p-adisch vollständig, und B ist p-adisch separiert; nach Korollar 1.3.5 ist B als B'-Modul von der 1 erzeugt, so daß B' mit B übereinstimmt. Damit ist das Liftungstheorem für den Fall, daß k perfekt ist, bewiesen.

Sei nun k nicht notwendig perfekt; wir konstruieren zunächst einen vollständigen lokalen Ring $(A', \mathfrak{m}', k^{p^{-\infty}})$ und einen vollständigen p-Ring B' zusammen mit lokalen Inklusionen $A \hookrightarrow A'$, $B \hookrightarrow B'$, derart daß sich der durch τ induzierte Isomorphismus $B/(p) \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$ zu einem Isomorphismus $B'/(p) \xrightarrow{\sim} A'/\mathfrak{m}'$ ausdehnt: Sei $(\alpha_i)_{i\in I}$ eine p-Basis von k, und für $i \in I$ seien $a_{i,0} \in A$, $b_{i,0} \in B$ Elemente mit $\varphi(a_{i,0}) = \tau(b_{i,0}) = \alpha_i$. Für jedes $i \in I$ adjungieren wir sukzessiv zu A beziehungsweise B Elemente $a_{i,n}, b_{i,n}$ mit $a_{i,n}^p = a_{i,n-1}$ und $b_{i,n}^p = b_{i,n-1}$. Zu einem endlichen Teilsystem $I' \subset I$ betrachten wir die A-Algebra $C_{I'} := A[a_{i,1}; i \in I']$, wobei wir abkürzend C für $C_{I'}$ schreiben. Sie ist als A-Modul endlich und frei, da wir bezüglich normierter Polynome $X^p - a_i$ eindeutig mit Rest dividieren können; insbesondere ist C vollständig und separiert bezüglich der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie. Offenbar ist $C/\mathfrak{m}C \cong k(\alpha_i^{p^{-1}}; i \in I')$ ein Körper. Ist $\mathfrak{n} \subset C$ ein maximales Ideal, so ist $\mathfrak{n} \cap A \subset A$ infolge der Endlichkeit von C über A maximal, und es folgt $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ und somit $\mathfrak{m}C \subset \mathfrak{n}$, also $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}C$ aufgrund der Maximalität von $\mathfrak{m}C$; somit ist C lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}C$. Schreiben wir C in der Gestalt $A \oplus M$ mit einem A-Modul M und ist $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so identifiziert sich $\mathfrak{a}C$ mit $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}M$; für alle $s \geq 0$ gilt folglich $(\mathfrak{m}C)^s \cap A = \mathfrak{m}^s C \cap A = \mathfrak{m}^s$. Die A-Algebra $A_1 := A[a_{i,1}; i \in I]$ wird durch das induktive System der lokalen A-Algebren $C_{I'}$ ausgeschöpft, wo I' die endlichen Teilmengen von I durchläuft. Da die maximalen Ideale der $C_{I'}$ von $\mathfrak{m}$ erzeugt werden, ist auch A_1 lokal, mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}A_1$; ferner folgen die Gleichungen $\bigcap_{s\geq 0} \mathfrak{m}^s A_1 = (0)$ und $\mathfrak{m}^s A_i \cap A = \mathfrak{m}^s$ unmittelbar aus den entsprechenden Relationen für die $C_{I'}$. Sie übertragen sich induktiv auf $A_n := A_{n-1}[a_{i,n}\ i \in I]$ und somit auf $A'' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Der Restklassenkörper $A''/\mathfrak{m}A''$ identifiziert sich nach Bemerkung 1.3.15 mit $k^{p^{-\infty}}$, da für jedes $n \geq 1$ die Adjunktion des Systems $(a_{i,n})_{i\in I}$ an A_{n-1} nach Lemma 1.3.16 zu der Adjunktion einer p-Basis von $k^{p^{-n}}$ an $k^{p^{-n+1}}$ korrespondiert. Sei nun A' die $\mathfrak{m}A''$-adische Komplettierung von A''; nach Satz 1.3.8 ist A' noethersch lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}A'$, und es gilt $\mathfrak{m}^s A' \cap A = \mathfrak{m}^s$.

Eine analoge Konstruktion liefert einen vollständigen p-Ring B', welcher B enthält, derart daß die Inklusion $B \hookrightarrow B'$ die Erweiterung $B/(p) \subset (B/(p))^{p^{-\infty}}$ induziert; es ist lediglich anzumerken, daß B' als noetherscher lokaler Ring, dessen maximales Ideal von einem Element erzeugt wird, ein diskreter Bewertungsring ist. Die Homomorphismen φ und τ dehnen sich nach Konstruktion durch die Zuordnungen

$$\varphi(a_{i,n}) := \tau(b_{i,n}) := \alpha_i^{p^{-n}} \quad (i \in I, n \geq 0)$$

in natürlicher Weise zu Homomorphismen φ', τ' von A' beziehungsweise B' nach $k^{p^{-\infty}}$ aus, derart daß sich der induzierte Isomorphismus $(B/(p))^{p^{-\infty}} \xrightarrow{\sim} (A/\mathfrak{m})^{p^{-\infty}}$ zu dem durch τ induzierten Isomorphismus $B/(p) \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$ einschränkt. Nach dem bereits behandelten Fall eines perfekten Restklassenkörpers existiert ein Homomorphismus $\sigma' : B' \to A'$ mit $\varphi' \circ \sigma' = \tau'$; es genügt einzusehen, daß dieser den Unterring $B \subset B'$ nach $A \subset A'$ abbildet. Da $(\varphi' \circ \sigma')(B)$ mit $\tau'(B) = k$ übereinstimmt, ist $\sigma(B)$ in $A + \mathfrak{m}A'$ enthalten. Wir schließen induktiv; angenommen, es gilt $\sigma(B) \subset A + \mathfrak{m}^s A'$ für ein $s \in \mathbb{N}$. Nach Korollar 1.3.17 ist k gleich $k^{p^s}(\alpha_i; i \in I)$; ist also $x \in B$ ein beliebiges Element, so existiert ein Polynom $\overline{f} \in k^{p^s}[X_i; i \in I]$ mit $\tau(x) = \overline{f}(\alpha_i\ i \in I)$. Folglich existiert eine Darstellung $x = f(b_i; i \in I) + pz$ mit einem geeigneten Element $z \in B$, wo $f \in B^{p^s}[X_i; i \in I]$

eine Liftung von $\overline{\tau}^{-1}(\overline{f})$ bezeichnet. Da σ einen Isomorphismus $B/(p) \cong A/\mathfrak{m}$ induziert, existiert zu jedem $y \in B$ ein $y' \in A$ mit $\sigma(y) \equiv y' \bmod \mathfrak{m}A'$; nach Lemma 1.3.9 besteht dann die Kongruenz $\sigma(y^{p^s}) \equiv y'^{p^s} \bmod \mathfrak{m}^{s+1}A'$. Wählen wir zu jedem Koefffizienten y^{p^s} von f solch ein y'^{p^s}, so erhalten wir ein Polynom $g \in A[X_i; i \in I]$ mit $\sigma(f) \equiv g \bmod \mathfrak{m}^{s+1}A'[X_i; i \in I]$; dann gilt insbesondere $\sigma(f(b_i)) \equiv g(a_i) \bmod \mathfrak{m}^{s+1}A'$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Element $d \in A$ mit $\sigma(z) \equiv d \bmod \mathfrak{m}^s A'$; somit gilt $\sigma(x) \equiv g(a_i) + dp \bmod \mathfrak{m}^{s+1}A'$ und es folgt $\sigma(B) \subset A + \mathfrak{m}^{s+1}A'$, wie gewünscht. Ist also a' ein Element in $\sigma(B)$, so existiert für jedes $s \geq 0$ eine Darstellung $a' = a_s + a'_s$ mit $a_s \in A$, $a'_s \in \mathfrak{m}^s A'$; die a_s bilden eine Folge in A, welche bezüglich des Fundamentalsystems $\mathfrak{m}^s A' \cap A = \mathfrak{m}^s$ der Cauchy-Bedingung genügt. Da A bezüglich der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie vollständig ist, existiert der Grenzwert $a \in A$, und da A' $\mathfrak{m}A'$-adisch separiert ist, folgt $a' = a$, also $\sigma(B) \subset A$, wie gewünscht. □

1.3.5 Folgerungen aus den Struktursätzen

1.3.21 Korollar. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein vollständiger lokaler noetherscher Ring, sei k von positiver Charakteristik $p > 0$, und sei B ein vollständiger p-Ring, dessen Restklassenkörper $B/(p)$ zu k isomorph ist. Dann gilt:*

(*i*) *Ist A von Charakteristik Null, so enthält A einen zu B isomorphen Unterring.*

(*ii*) *Ist A von Charakteristik p^r mit $r \geq 1$, so enthält A einen zu $B/(p^r)$ isomorphen Unterring.*

(*iii*) *Die Einschränkung der kanonischen Projektion $\varphi : A \to A/\mathfrak{m}$ auf den betrachteten Unterring ist surjektiv. Ist folglich A von Charakteristik p, so enthält A einen Körper k', welcher sich unter φ mit k identifiziert.*

Beweis. Nach Theorem 1.3.20 setzt sich der gegebene surjektive Homomorphismus $B \to A/\mathfrak{m}$ zu einem Homomorphismus $\sigma : B \to A$ fort. Jedes nicht-triviale Ideal von B ist von einer p-Potenz erzeugt. Gilt $\operatorname{char} A = 0$, so ist p^r für alle $r \geq 0$ nicht in $\ker \sigma$ enthalten, und es folgt $\ker \sigma = 0$; damit ist (*i*) gezeigt. Ist A von Charakteristik p^r, so ist $\ker \sigma$ von p^r erzeugt, und wir erhalten (*ii*). Die Gleichung $\varphi \circ \sigma = \tau$ zeigt schließlich, daß der durch σ induzierte Unterring von A unter φ surjektiv auf k abgebildet wird; damit ist (*iii*) gezeigt. □

Die naheliegende Frage, ob zu jedem Körper positiver Charakteristik $p > 0$ stets ein geeigneter vollständiger p-Ring B existiert, läßt sich positiv beantworten:

1.3.22 Lemma. *Sei k ein Körper von Charakteristik $p > 0$; dann existiert ein vollständiger p-Ring B mit Restklassenkörper k.*

Beweis. Sei k_0 der Primkörper von k, und sei $B_0 := \mathbb{Z}_{(p)}$; dann stimmt $B_0/(p)$ mit k_0 überein. Sei $L_0 := \operatorname{Frac} B_0$, und sei $(\alpha_i)_{i \in I}$ eine Transzendenzbasis von k über k_0. Wir wählen ein System $(X_i)_{i \in I}$ von Variablen, setzen $L'_1 := L_0(X_i; i \in I)$ und versehen L'_1 mit der p-adischen Bewertung. Sei L_1 die Komplettierung von L'_1; dann identifiziert sich der Restklassenkörper von L_1 mit $k_1 := k_0(\alpha_i; i \in I)$. Ist α ein Element in $k - k_1$, so betrachten wir eine Liftung $\pi \in L_1[X]$ des Minimalpolynoms $\overline{\pi}$ von α mit $\operatorname{grad} \pi = \operatorname{grad} \overline{\pi}$, adjungieren zu L_1 eine Nullstelle a von π und setzen die Bewertung eindeutig dem vollständig bewerteten Körper von L_1 zu einer vollständigen Bewertung auf $L_1(a)$ fort. Nach Konstruktion ist $[L_1(a) : L_1]$ durch $[k_1(\alpha) : k_1]$ beschränkt; nach Korollar 6.3.7, welches wir an späterer Stelle beweisen werden, ist $L_1(a)$ über L_1 somit unverzweigt, so daß das Bewertungsideal von

$L_1(a)$ wiederum von p erzeugt ist. Iterativ erhalten wir eine aufsteigende Familie vollständiger p-Ringe. Ihre Vereinigung B' ist ein lokaler Ring, dessen maximales Ideal von p erzeugt wird und dessen Restklassenkörper sich mit k identifiziert; nach Satz 1.3.8 ist somit die Komplettierung B von B' der gesuchte vollständige p-Ring. □

Schließlich wollen wir folgern, daß sich jeder vollständige lokale noethersche Ring als Quotient eines regulären vollständigen lokalen noetherschen Rings realisieren läßt. Hierzu benötigen wir ein Lemma, welches auch anderweitig Verwendung finden wird:

1.3.23 Definition. *Sei A ein Ring, sei $I \subset A$ ein Ideal, und sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal. Das Ideal I heißt $\mathfrak{m}$-primär, falls es eine Potenz von $\mathfrak{m}$ enthält.*

1.3.24 Lemma. *Seien $(A, \mathfrak{m}, k)$, $(B, \mathfrak{n}, l)$ vollständige lokale noethersche Ringe, und sei $\sigma : B \to A$ ein lokaler Homomorphismus. Ferner sei $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_r$ ein Erzeugendensystem eines $\mathfrak{m}$-primären Ideals von A, sei $X = X_1, \dots, X_r$ ein System von Variablen, und sei*

$$\sigma' : B[[X_1, \dots, X_r]] \to A$$

die durch $X_i \mapsto x_i$ gegebene eindeutige stetige Fortsetzung von σ. Dann gilt:

(*i*) *Ist die durch σ induzierte Erweiterung k/l endlich, so erklärt σ' den Ring A als endlichen $R[[X_1, \dots, X_r]]$-Modul.*

(*ii*) *Ist k/l sogar trivial und ist $\boldsymbol{x}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$, so ist σ' bereits surjektiv.*

Beweis. Sei k über l endlich. Das von dem maximalen Ideal $(\mathfrak{n}, X) \subset B[[X]]$ in A erzeugte Ideal $\mathfrak{n}A + (\boldsymbol{x})$ enthält nach Voraussetzung eine Potenz $\mathfrak{m}^n$ von $\mathfrak{m}$; folglich ist $A/(\mathfrak{n}, X)A$ ein Quotient von $A/\mathfrak{m}^n$. Nun besitzt $A/\mathfrak{m}^n$ eine kanonische endliche Filtrierung, deren Faktoren $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ endliche k-Vektorräume sind; folglich ist $A/(\mathfrak{n}, X)A$ über k und somit auch über l von endlicher Dimension. Seien $u_1, \dots, u_s$ Elemente in A, welche ein endliches Erzeugendensystem von $A/(\mathfrak{n}, X)A$ über l induzieren; da A aufgrund der Inklusion $(\mathfrak{n}, X) \subset \mathfrak{m}$ insbesondere $(\mathfrak{n}, X)$-adisch separiert ist, bildet $u_1, \dots, u_s$ nach Korollar 1.3.5 ein Erzeugendensystem von A über $B[[X_1, \dots, X_r]]$; damit ist (i) gezeigt. Stimmt k mit l überein und ist $(\boldsymbol{x}) = \mathfrak{m}$, so gilt $A/(\mathfrak{n}, X)A = l$, und wir können $s = 1$, $u_1 = 1 \in A$ wählen; hiermit folgt Aussage (ii). □

1.3.25 Korollar. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein vollständiger lokaler noetherscher Ring; dann ist A zu einem Quotienten eines regulären vollständigen lokalen noetherschen Rings der Charakteristik 0 isomorph.*

Beweis. Sei $x_1, \dots, x_r$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$. Ist $\operatorname{char} k = 0$, so existiert nach Theorem 1.3.1 ein Körper $k' \subset A$, welcher sich unter der Projektion $\varphi : A \to A/\mathfrak{m}$ mit k identifiziert; sei $\sigma' : k'[[X_1, \dots, X_n]] \to A$ die stetige Fortsetzung des durch $X_i \mapsto x_i$ gegebenen Homomorphismus. Nach Lemma 1.3.24 (ii) ist σ' surjektiv, und nach Korollar 1.2.25 ist $k'[[X_1, \dots, X_n]]$ regulär; somit ist die Behauptung für $\operatorname{char} k = 0$ bewiesen. Ist $\operatorname{char} k = p > 0$, so existiert nach Lemma 1.3.22 ein vollständiger p-Ring B, dessen Restklassenkörper $B/(p)$ zu k isomorph ist; nach Korollar 1.3.21 existiert somit ein Unterring C von A, welcher zu B oder für geeignetes $s \geq 0$ zu $B/(p^s)$ isomorph ist. Da B und die abgeschnittenen Ringe $B/(p^s)$ vollständig sind, existiert somit nach Lemma 1.3.24 (ii) ein surjektiver Homomorphismus $C[[X_1, \dots, X_n]] \to A$; insbesondere existiert ein surjektiver Homomorphismus $B[[X_1, \dots, X_n]] \to A$. Da diskrete Bewertungsringe regulär sind, ist nach Korollar

1.2.25 auch $B[[X_1,\dots,X_n]]$ regulär. Somit besitzt A eine Darstellung als Quotient eines regulären vollständigen lokalen noetherschen Rings der Charakteristik 0, wie behauptet. □

1.4 Vollständige Durchschnittsringe

1.4.1 Definition. *Ein lokaler noetherscher Ring A heißt ein vollständiger Durchschnittsring, falls seine Komplettierung $\hat{A}$ zu einem Quotienten B/I eines regulären vollständigen lokalen notherschen Rings B isomorph ist, derart daß das Ideal I von einer regulären Folge erzeugt ist.*

1.4.2 Bemerkung. *Nach Korollar 1.2.20 ist jeder reguläre lokale noethersche Ring ein vollständiger Durchschnittsring.* □

Sei A ein lokaler noetherscher Ring, und sei $\hat{A}$ seine Komplettierung. Nach Korollar 1.3.25 besitzt $\hat{A}$ eine Darstellung als Quotient eines regulären vollständigen lokalen noetherschen Rings. Ist A ein vollständiger Durchschnittsring, so stellt sich die Frage, ob bereits jede derartige Darstellung von $\hat{A}$ durch ein reguläres Ideal gegeben ist. Sie läßt sich positiv beantworten; der Beweis dieser grundlegenden Tatsache ist Gegenstand dieses Unterkapitels.

1.4.3 Bemerkung und Definition. *Sei $(B_0,\mathfrak{n}_0)$ ein lokaler noetherscher Ring, und sei $(A,\mathfrak{m})$ zu einem Quotienten B_0/I_0 isomorph. Ist I_0 nicht in $\mathfrak{n}_0^2$ enthalten, so fixieren wir ein Element $x_0 \in I_0$ mit $x_0 \notin \mathfrak{n}_0^2$ und setzen $B_1 := B_0/(x_0)$, $I_1 := I_0/(x_0)$; dann identifiziert sich A mit B_1/I_1. Da x_0 modulo $\mathfrak{n}_0^2$ nicht verschwindet, ist x_0 nach Nakayamas Lemma Teil eines minimalen Erzeugendensystems von $\mathfrak{n}_0$. Iterieren wir das Verfahren, indem wir sukzessiv Elemente $x_i \in I_i - \mathfrak{n}_i^2$ herauskürzen, so gelangen wir, da die Dimension von $\mathfrak{n}_i/\mathfrak{n}_i^2$ über $B_i/\mathfrak{n}_i$ stets echt abnimmt, nach endlich vielen Schritten zu einer Darstellung $A = B/I$, wo I in $\mathfrak{n}^2$ enthalten ist. Eine solche Darstellung von A heißt minimal.*

1.4.4 Bemerkung. *Sei $(B_0,\mathfrak{n}_0)$ ein lokaler noetherscher Ring, sei $I_0 \subset B_0$ ein echtes Ideal, und seien B, I nach dem Verfahren aus Bemerkung 1.4.3 konstruiert. Ist B_0 regulär, so auch B, und ist I_0 durch eine reguläre Folge erzeugt, so auch I.*

Beweis. Ist B_0 regulär, so ist B_0 nach Satz 1.2.3 integer, und jedes Element x_0 in $\mathfrak{n}_0 - \mathfrak{n}_0^2$ ist B_0-regulär, so daß die Dimension von B_0 bei Division durch x_0 um 1 abnimmt. Ist I_0 durch eine reguläre Folge erzeugt, so können wir das gewählte Element $x_0 \in I_0 - \mathfrak{n}_0^2$ nach Lemma 1.1.4 als letztes Glied einer regulären Folge ansehen, welche I_0 erzeugt; folglich ist mit I_0 auch I_1 regulär. Die Behauptung folgt somit durch Induktion nach der Anzahl der Konstruktionsschritte. □

1.4.5 Bemerkung und Definition. *Sei $(A,\mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, und sei $A \cong B/I$ eine minimale Darstellung von A als Quotient eines lokalen noetherschen Rings $(B,\mathfrak{n})$. Da I in $\mathfrak{n}^2$ enthalten ist, stimmt $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ über dem gemeinsamen Restklassenkörper von A und B in natürlicher Weise mit $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ überein; ist B regulär, so ist* $\dim B$ *folglich durch* $\dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ *gegeben. Die natürliche Zahl*

$$\operatorname{embdim} A := \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$$

heißt die Einbettungsdimension von A; offenbar stimmt $\operatorname{embdim} A$ *mit* $\operatorname{embdim} \hat{A}$ *überein.*

1.4.6 Bemerkung. *Nach Korollar 1.3.25 und den Bemerkungen 1.4.3, 1.4.4 besitzt jeder vollständige lokale noethersche Ring eine minimale Darstellung als Quotient eines regulären vollständigen lokalen noetherschen Rings; es bleibt lediglich zu bemerken, daß Quotienten vollständiger lokaler noetherscher Ringe wieder vollständig sind.*

1.4.7 Satz. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler noetherscher Ring, und sei $A \cong B/I$ eine minimale Darstellung von A als Quotient eines regulären lokalen noetherschen Rings $(B, \mathfrak{n})$. Ist $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$, so stimmt $\dim_k H_1(\boldsymbol{x})$ mit $\dim_k I/\mathfrak{n}I$ überein.*

Bemerkung. Nach Korollar 1.1.24 besitzt $H_1(\boldsymbol{x})$ in natürlicher Weise die Struktur eines k-Vektorraums

Beweis. Sei $\boldsymbol{y} = y_1, \dots, y_n$ das zu $\boldsymbol{x}$ korrespondierende minimale Erzeugendensystem von $\mathfrak{n}$, und sei $\boldsymbol{z} = z_1, \dots, z_m$ ein minimales Erzeugendensystem von I. Die Sequenz

$$A^n \xrightarrow{\boldsymbol{x}} A \to 0$$

läßt sich zu einer minimalen freien Auflösung von k ergänzen, und die Linearform $\boldsymbol{x} : A^n \to A$ stimmt mit dem ersten Differential $d_{\boldsymbol{x},1}$ von $K_*(\boldsymbol{x})$ überein. Sei $Z :=$ ker $\boldsymbol{x}$, sei $\boldsymbol{a} = a_1, \dots, a_n$ ein Element in Z, und sei $\boldsymbol{b} = b_1, \dots, b_n$ ein Repräsentant von $\boldsymbol{a}$. Dann geht $\boldsymbol{b}$ unter dem ersten Differential $d_{\boldsymbol{y},1} = \boldsymbol{y} : B^n \to B$ von $K_*(\boldsymbol{y})$ auf ein Element in I; folglich existieren Elemente $c_1, \dots, c_m$ in B mit

$$d_{\boldsymbol{y},1}(\boldsymbol{b}) = \sum_{r=1}^{m} c_r z_r \quad .$$

Für $r \in \{1, \dots, m\}$ sei $\boldsymbol{u}_r \in B^n$ ein Urbild von z_r unter $d_{\boldsymbol{y},1}$; da die z_r in $I \subset \mathfrak{n}^2$ liegen und $\boldsymbol{y}$ eine Basis von $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ über $B/\mathfrak{n}$ induziert, sind die Komponenten der $\boldsymbol{u}_r$ in $\mathfrak{n}$ enthalten. Aufgrund der Regularität von B ist $K_*(\mathbf{y})$ nach Lemma 1.1.22 azyklisch; folglich ist der Kozyklus $\boldsymbol{b} - \sum_{r=1}^m c_i \boldsymbol{u}_i$ ein Korand und besitzt somit eine Darstellung als B-lineare Kombination der Differentiale einer Basis von $K_2(\boldsymbol{y})$. Sei $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n$ die kanonische Basis von B^n; dann schreiben sich die $\binom{n}{2}$ Basisvektoren von $K_2(\boldsymbol{y})$ in der Form $\boldsymbol{f}_r \wedge \boldsymbol{f}_s$, $(1 \le r < s \le n)$ wobei das Differential $d_{\boldsymbol{y},2}(\boldsymbol{f}_r \wedge \boldsymbol{f}_s)$ nach Konstruktion von $K_*(\boldsymbol{y})$ durch

$$\begin{aligned} d_{\boldsymbol{y},2}(\boldsymbol{f}_r \wedge \boldsymbol{f}_s) &= d_{\boldsymbol{y},1}(\boldsymbol{f}_r)\boldsymbol{f}_s - \boldsymbol{f}_r d_{\boldsymbol{y},1}(\boldsymbol{f}_s) \\ &= y_r \boldsymbol{f}_s - \boldsymbol{f}_r y_s \end{aligned}$$

gegeben ist. Wir haben gezeigt, daß Z über A durch die Klassen der $\boldsymbol{u}_r$ und der $d_{\boldsymbol{y},2}(\boldsymbol{f}_r \wedge \boldsymbol{f}_s)$ erzeugt ist. Es genügt einzusehen, daß dieses Erzeugendensystem minimal ist, denn dann bilden die Klassen der $\boldsymbol{u}_r$ ein minimales Erzeugendensystem der Homologie $H_1(\boldsymbol{x})$ über A und somit eine Basis von $H_1(\boldsymbol{x})$ über k. Seien also α_{rs}, β_t Elemente in B mit

$$\sum_{1 \le r < s \le n} \alpha_{pq}\, d_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{f}_r \wedge \boldsymbol{f}_s) + \sum_{t=1}^{m} \beta_t\, \boldsymbol{u}_t \in IB^n \quad ;$$

es ist zu zeigen, daß die $\alpha_{r,s}$, β_t in $\mathfrak{n}$ liegen. Wenden wir das Differential $d_{\boldsymbol{y},1}$ auf die betrachtete Summe an, so erhalten wir die Relation $\sum_{t=1}^m \beta_t z_i \in \mathfrak{n}I$, denn das Bild von $d_{\mathbf{y}} : B^n \to B$ liegt in $\mathfrak{n}$. Da $\boldsymbol{z}$ eine $B/\mathfrak{n}$-Basis von $I/\mathfrak{n}I$ induziert, folgt $\beta_i \in \mathfrak{n}$. Da die Komponenten der $\boldsymbol{u}_t$ in $\mathfrak{n}$ liegen, folgt somit

$$\sum_{1 \le r < s \le n} \alpha_{rs}\, d_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{f}_r \wedge \boldsymbol{f}_s) \in \mathfrak{n}^2 B^n \quad .$$

Da die Produkte $y_r \boldsymbol{f}_s$ für $r, s \in \{1, \dots, n\}$ eine Basis des $B/\mathfrak{n}$-Moduls $(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)^n \cong \mathfrak{n}B^n/\mathfrak{n}^2B^n$ induzieren, liegen somit alle α_{rs} in $\mathfrak{n}$, wie gewünscht. □

1.4.8 Bemerkung und Definition. *Offenbar ist* $\varepsilon_1(A) := \dim_k H_1(\boldsymbol{x})$ *von der Wahl des minimalen Erzeugendensystems* $\boldsymbol{x}$ *von* $\mathfrak{m}$ *unabhängig; nach Lemma 1.2.5 ist die Invariante* $\varepsilon_1(A)$ *ein Maß für den Regularitätsdefekt von* A.

Das folgende Theorem liefert nun die gesuchte intrinsische Charakterisierung vollständiger Durchschnittsringe:

1.4.9 Theorem. *Sei* $(A, \mathfrak{m}, k)$ *ein lokaler noetherscher Ring. Dann sind folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *A ist ein vollständiger Durchschnittsring.*

(ii) $\varepsilon_1(A) = \operatorname{embdim} A - \dim A$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei A ein vollständiger Durchschnittsring. Nach Definition 1.4.1 besitzt $\hat{A}$ eine Darstellung als Quotient B/I eines regulären vollständigen lokalen noetherschen Rings B, wo das Ideal I durch eine reguläre Folge erzeugt ist; nach Bemerkung 1.4.4 dürfen wir diese Darstellung als minimal voraussetzen. Sei $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$, und sei $\hat{\boldsymbol{x}}$ das kanonische Bild von $\boldsymbol{x}$ in $\hat{A}$. Da der Homologiefunktor H_* mit flachem Basiswechsel kommutiert, identifiziert sich $H_*(\hat{\boldsymbol{x}})$ mit $H_*(\boldsymbol{x}) \otimes_A \hat{A}$; folglich stimmen $\dim_k H_\bullet(\boldsymbol{x})$ und $\dim_k H_\bullet(\hat{\boldsymbol{x}})$ überein. Die reguläre Folge, welche I erzeugt, besitzt nach Lemma 1.1.4 die Länge $\dim_k I/\mathfrak{n}I$, wo $\mathfrak{n}$ das maximale Ideal von B bezeichnet, und nach Satz 1.4.7 ist $\dim_k I/\mathfrak{n}I$ gleich $\dim_k H_1(\hat{\boldsymbol{x}})$; somit folgt die Gleichung

$$\dim B - \dim \hat{A} = \dim_k H_\bullet(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad .$$

Da die betrachtete Darstellung von A minimal gewählt wurde, stimmt $\dim B$ mit $\operatorname{embdim} \hat{A} = \operatorname{embdim} A$ überein, und nach Lemma 1.2.18 ist $\dim \hat{A}$ gleich $\dim A$; hiermit folgt (ii), wie gewünscht.

Für die Impliktion $(ii) \Rightarrow (i)$ betrachten wir eine minimale Darstellung $\hat{A} = B/I$, wo B regulär, vollständig, lokal und noethersch ist; eine solche existiert nach Bemerkung 1.4.6. Sei $\mathfrak{n}$ das maximale Ideal von B. Nach Satz 1.4.7 stimmt $\dim_k H_1(\hat{A})$ mit $\dim_k I/\mathfrak{n}I$ überein; die Identitäten $\dim_k H_1(\hat{A}) = \dim_k H_1(A)$, $\dim \hat{A} = \dim A$ und $\dim B = \operatorname{embdim} A$ liefern somit nach (ii) die Gleichung

$$\dim B - \dim \hat{A} = \dim_k I/\mathfrak{n}I \quad .$$

Da B als regulärer lokaler noetherscher Ring nach Bemerkung 1.2.2 der Cohen-Macaulay-Bedingung genügt und da I ein Erzeugendensystem der Länge $\dim_k I/\mathfrak{n}I$ besitzt, ist I somit nach Theorem 1.1.32 (iii) regulär, wie gewünscht. □

Wir sehen nun leicht ein, daß die definierende Eigenschaft vollständiger Durchschnittsringe bezüglich einer beliebigen Einbettung getestet werden kann:

1.4.10 Korollar. *Sei A ein lokaler noetherscher Ring, und sei $A \cong B/I$ eine Darstellung von A als Quotient eines regulären lokalen noetherschen Rings B. Genau dann ist A ein vollständiger Durchschnittsring, wenn I durch eine reguläre Folge erzeugt ist.*

Beweis. Nach Bemerkung 1.4.3 und Bemerkung 1.4.4 existiert eine reguläre Folge $\boldsymbol{y}$ in I, derart daß die induzierte Darstellung von A als Quotient des regulären lokalen noetherschen Rings $B/(\boldsymbol{y})$ minimal ist; wir dürfen somit ohne Einschränkung die betrachtete Darstellung als minimal ansehen. Dann gilt $\operatorname{embdim} A = \dim B$. Nach Satz 1.4.7 stimmt $\varepsilon_1(A)$ mit $\dim_k I/\mathfrak{n}I$ überein, wo $\mathfrak{n}$ das maximale Ideal von B bezeichnet. Nach Theorem 1.4.9 ist somit A genau dann ein vollständiger Durchschnittsring, wenn die Gleichung $\dim B - \dim A = \dim_k I/\mathfrak{n}I$ erfüllt ist. Da B als regulärer lokaler noetherscher Ring nach Bemerkung 1.2.2 der Cohen-Macaulay-Bedingung genügt und da I ein Erzeugendensystem der Länge $\dim_k I/\mathfrak{n}I$ besitzt, ist dies nach Theorem 1.1.32 (*iii*) genau dann der Fall, wenn I regulär ist. □

Die durch Korollar 1.4.10 garantierte Freiheit bei der Wahl einer Einbettung ermöglicht es, mit vollständigen Durchschnittsringen komfortabel zu arbeiten; beispielsweise können wir nun leicht zeigen, daß die lokalen Ringe eines Schemas von lokal endlichem Typ über einem Körper genau dann die Eigenschaft vollständiger Durchschnittsringe besitzen, wenn dies nach Erweiterung des Grundkörpers der Fall ist. Diese Tatsache liefert die Einsicht, daß die in Abschnitt 2.2 zu definierende Eigenschaft eines vollständigen Durchschnitts nach treuflachem Basiswechsel zu verifizieren ist.

1.4.11 Lemma. *Sei k ein Körper, sei X ein k-Schema von lokal endlichem Typ, und sei k' ein Erweiterungskörper von k. Wir schreiben $X' := X \otimes_k k'$ und betrachten einen Punkt x' in X' sowie seine Projektion x auf X. Genau dann ist $\mathcal{O}_{X,x}$ ein vollständiger Schnittring, wenn dies für $\mathcal{O}_{X',x'}$ der Fall ist.*

Beweis. Die Aussage ist lokal auf X; folglich dürfen wir X für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ als abgeschlossenes Unterschema des k-Schemas $\mathbb{A}_k^n = \operatorname{Spec} k[T]$ ansehen, wo $T = T_1, \ldots, T_n$ ein System von n Variablen bezeichnet. Sei $I \subset k[T]$ das zu $X \subset \mathbb{A}_k^n$ korrespondierende Ideal; dann ist X' durch $I' := I \otimes_k k' = Ik'[T]$ als abgeschlossenes Unterschema des regulären k'-Schemas $\mathbb{A}_{k'}^n = \operatorname{Spec} k'[T]$ gegeben. Aufgrund der Exaktheit induktiver Limiten über gerichtete Indexmengen bestehen die kanonischen Identitäten $\mathcal{O}_{X',x'} = k'[T]_{x'}/I'_{x'}$ und $\mathcal{O}_{X,x} = k[T]_x/I_x$. Da der lokale noethersche Ring $k[T]_x$ nach Korollar 1.2.24 regulär ist, handelt es sich nach Korollar 1.4.10 bei dem Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ genau dann um einen vollständigen Schnittring, wenn I_x durch eine reguläre Folge erzeugt ist; die entsprechende Aussage gilt für die Ringe $k'[T]_{x'}$, $\mathcal{O}_{X',x'}$ und das Ideal $I_{x'}$. Der lokale Homomorphismus $k[T]_x \to k'[T]_{x'}$ ist treuflach, und es bestehen kanonische Identitäten

$$\begin{aligned} I'_{x'} &= I' \otimes_{k'[T]} k'[T]_{x'} \\ &= I \otimes_{k[T]} k'[T] \otimes_{k'[T]} k'[T]_{x'} \\ &= I \otimes_{k[T]} k[T]_x \otimes_{k[T]_x} k'[T]_{x'} \\ &= I_x \otimes_{k[T]_x} k'[T]_{x'} \quad . \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.1.5 und aufgrund der Tatsache, daß quasi-reguläre Folgen unter flachem Basiswechsel stabil sind, ist somit I_x genau dann durch eine reguläre Folge erzeugt, wenn dies für $I'_{x'}$ der Fall ist, wie gewünscht. □

2. Vollständige Durchschnitte

Wir werden nun die in Kapitel 1 entwickelte lokale Algebra in die Theorie der Schemata integrieren. Nach Grothendieck ist ein Schema stets als relatives Objekt anzusehen; Eigenschaften von Schemata sollten möglichst mit Basiswechsel verträglich sein und sich somit insbesondere auf die Fasern ausdehnen, welche als absolute Objekte zu betrachten sind. Von diesem Standpunkt aus ist es naheliegend, ein Schema als vollständigen Durchschnitt zu bezeichnen, wenn es sich bei den lokalen Ringen seiner Fasern um vollständige Durchschnittsringe handelt. In der Tat erhalten wir eine zufriedenstellende Theorie, wenn wir vollständige Durchschnitte zusätzlich als flach und lokal endlich präsentiert voraussetzen.

2.1 Flache Morphismen und transversal reguläre Immersionen

Wir wollen reguläre Folgen in der Strukturgarbe eines flachen Schemas mit regulären Folgen in den Strukturgarben der Fasern in Verbindung bringen Als Schlüssel hierzu erweist sich das allgemeine Flachheitskriterium von Bourbaki, welches wir zunächst beweisen werden.

2.1.1 Das Bourbaki-Kriterium für Flachheit

2.1.1 Satz. *Sei A ein Ring, sei M ein A-Modul, und sei $J \subset A$ ein Ideal, derart daß M/JM ist über A/J flach ist und $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/J)$ verschwindet. Ist $I \subset A$ ein Ideal, welches eine Potenz von J enthält, so ist M/IM über A/I flach, und $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/I)$ ist trivial.*

Beweis. Wir betrachten eine exakte Sequenz

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

von A/J-Moduln; Anwendung von $\cdot \otimes_A M$ liefert die lange exakte Sequenz

$$\cdots \to \operatorname{Tor}_1^A(M, N) \to \operatorname{Tor}_1^A(M, N'') \to M \otimes_A N' \to M \otimes_A N \to M \otimes_A N'' \to 0 \quad .$$

Für jeden A/J-Modul $\tilde{N}$ existieren kanonische Isomorphismen

$$M \otimes_A \tilde{N} \cong M \otimes_A (A/J) \otimes_{A/J} \tilde{N} \cong (M/JM) \otimes_{A/J} \tilde{N} \quad ;$$

da M/JM über A/J flach ist, erkennen wir $M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ als injektiv und somit $\operatorname{Tor}_1^A(M, N) \to \operatorname{Tor}_1^A(M, N'')$ als surjektiv. Der Funktor $\operatorname{Tor}_1^A(M, \cdot)$ ist auf der Kategorie der A/J-Moduln folglich rechtsexakt. Sei

$$0 \to K \to F \to N \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A/J-Moduln, wo F über A/J frei sei; da $\mathrm{Tor}_1^A(M,\cdot)$ mit direkten Summen kommutiert, ist $\mathrm{Tor}_1^A(M,F)$ eine direkte Summe von Kopien von $\mathrm{Tor}_1^A(M,A/J)$ und somit nach Voraussetzung trivial. Die Surjektivität des Homomorphismus

$$\mathrm{Tor}_1^A(M,F) \to \mathrm{Tor}_1^A(M,N)$$

zeigt also $\mathrm{Tor}_1^A(M,N) = 0$; folglich ist $\mathrm{Tor}_1^A(M,\cdot)$ auf der Kategorie der A/J-Moduln trivial. Sei nun N ein A/J^2-Modul; dann ist

$$0 \to JN \to N \to N/JN \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A/J^2-Moduln, wobei wir JN und N/JN auch als A/J-Moduln ansehen können. Nach dem bislang bewiesenen sind die Moduln $\mathrm{Tor}_1^A(M,JN)$ und $\mathrm{Tor}_1^A(M,N/JN)$ trivial; die lange exakte Tor-Sequenz zeigt somit $\mathrm{Tor}_1^A(M,N) = 0$, und wir sehen, daß $\mathrm{Tor}_1^A(M,\cdot)$ auch auf der Kategorie der A/J^2-Moduln trivial ist. Ist also $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ eine exakte Sequenz von A/J^2-Moduln, so bleibt diese wegen $\mathrm{Tor}_1^A(M,N'') = 0$ unter Anwendung von $\cdot \otimes_{A/J^2} M/J^2M = \cdot \otimes_{A/J^2} A/J^2 \otimes_A M = \cdot \otimes_A M$ exakt; folglich ist M/J^2M über A/J^2 flach. Da zudem $\mathrm{Tor}_1^A(M,A/J^2)$ trivial ist, genügt J^2 denselben Voraussetzungen wie J, und wir sehen induktiv, daß dies für alle Ideale J^m der Fall ist, wo $m \in \mathbb{N}$ eine Potenz von 2 ist. Nach Voraussetzung existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $J^n \subset I$; wir dürfen n als 2-Potenz ansehen. Da sich nun M/IM mit $(M/J^nM) \otimes_{A/J^n} (A/I)$ identifiziert, ist M/IM über A/I flach, und da $\mathrm{Tor}_1^A(M,N)$ für alle A/J^n-Moduln N verschwindet, gilt insbesondere $\mathrm{Tor}_1^A(M,A/I) = 0$, wie gewünscht. □

2.1.2 Satz. *Sei A ein noetherscher Ring, sei B eine noethersche A-Algebra, und sei M ein endlich erzeugter B-Modul; ferner sei $J \subset A$ ein Ideal, derart daß JB in dem Jacobson-Radikal von B enthalten ist. Ist M/JM über A/J flach und gilt $\mathrm{Tor}_1^A(M,A/J) = 0$, so ist M flach über A.*

Beweis. Sei $I \subset A$ ein Ideal; es genügt zu zeugen, daß der kanonische Homomorphismus $I \otimes_A M \to M$ injektiv ist. Die kanonische Sequenz

$$0 \to (J^n \cap I)/J^nI \to I/J^nI \to A/J^n$$

von A/J^n-Moduln ist offenbar exakt. Nach Satz 2.1.1 ist für jedes $n \geq 1$ der Modul M/J^nM über A/J^nA flach; folglich erhalten wir für $n \geq 1$ durch Anwendung des Funktors $\cdot \otimes_{A/J^n} M/J^nM$ eine kanonische exakte Sequenz

$$0 \to (J^n \cap I)/J^nI \otimes_{A/J^n} M/J^nM \to I/J^nI \otimes_{A/J^n} M/J^nM \to M/J^nM \quad .$$

Nach dem Lemma von Artin und Rees ([L], Cor. 1.3.12) existiert eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, derart daß für alle $n \geq n_0$ die Gleichung

$$J^{n+1} \cap I = J(J^n \cap I)$$

erfüllt ist; für alle $p \geq 1$ gilt dann $J^{n+p} \cap I = J^p(J^n \cap I)$. Insbesondere stimmt $(J^{n+p} \cap I)/J^{n+p}I$ für $n \geq n_0$ und $p \geq 1$ mit $J^p(J^n \cap I)/J^{n+p}I$ überein, so daß der kanonische Homomorphismus

$$(J^{n+p} \cap I)/J^{n+p}I \to (J^n \cap I)/J^nI$$

für $p \geq n \geq n_0$ trivial ist; folglich verschwindet der projektive Limes der Moduln $(J^n \cap I)/J^nI \otimes_{A/J^n} M/J^nM$. Da die Bildung des projektiven Limes linksexakt ist, erhalten wir mit $I/J^nI = I \otimes_A A/J^n$ eine exakte Sequenz $0 \to I \otimes_A \hat{M} \to \hat{M}$, wo $\hat{M}$ die JB-adische Komplettierung von M bezeichnet. Da B noethersch und M über B endlich ist, gilt $\hat{M} = M \otimes_B \hat{B}$, wo wir mit $\hat{B}$ die JB-adische Komplettierung von B bezeichnen. Letztere ist über B flach und, da IB in dem Jacobson-Radikal von B enthalten ist, sogar treuflach; folglich ist bereits der Homomorphismus $I \otimes_A M \to M$ injektiv, wie gewünscht. □

2.1.2 Transversal reguläre Folgen

2.1.3 Definition. *Sei $A \to B$ ein Homomorphismus von Ringen, und sei M ein B-Modul. Eine Folge $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ von Elementen aus B heißt A-transversal M-regulär, wenn sie M-regulär ist, derart daß die B-Moduln*

$$M/(x_1, \ldots, x_i)M$$

für $0 \leq i \leq n$ über A flach sind.

Es wird sich zeigen, daß transversale Regularität einer Folge in den Fasern verifiziert werden kann. Wir behandeln in diesem Abschnitt in erster Linie die lokale noethersche Situation; zunächst zeigen wir allerdings allgemein, daß transversal reguläre Folgen mit Basiswechsel verträglich sind insbesondere auf die Fasern absteigen.

2.1.4 Lemma. *Sei A ein Ring, sei B eine A-Algebra, sei M ein B-Modul, und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ eine A-transversal M-reguläre Folge in B. Ferner sei $A \to A'$ ein Ringhomomorphismus; wir setzen $B' := B \otimes_A A'$, $M' := M \otimes_A A'$. Dann ist die durch Basiswechsel induzierte Folge $\boldsymbol{x}' = x'_1, \ldots, x'_n \in B'$ A'-transversal M'-regulär.*

Beweis. Für $i \in \{0, \ldots, n\}$ bezeichne M_i den B-Modul $M/(x_1, \ldots, x_i)M$. Offenbar identifiziert sich $M'_i := M'/(x'_1, \ldots, x'_i)M'$ mit $M_i \otimes_A A'$; folglich sind die M'_i flach über A'. Für $0 \leq i \leq n-1$ betrachten wir die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \to M_i \stackrel{x_{i+1}}{\to} M_i \to M_i/x_{i+1}M_i \to 0 \quad .$$

Aufgrund der Flachheit von $M_i/x_{i+1}M_i$ über A bleiben diese unter Anwendung des Funktors $\cdot \otimes_A A'$ exakt; folglich ist die Multiplikation mit x'_{i+1} auf M'_i injektiv, wie gewünscht. $\square$

Notation. Unter der Faser eines Schemas über einer lokalen Basis verstehen wir im folgenden stets die Faser über dem abgeschlossenen Punkt. Wir werden in ungenauer Sprechweise oft den Ring der globalen Schnitte einer affinen Faser als Faser bezeichnen.

Ein Element, welches in der Faser einer flachen lokalen noetherschen Algebra regulär ist, bildet bereits eine einelementige transversal reguläre Folge; zum Beweis dieser Tatsache stützen wir uns auf das Flachheitskriterium von Bourbaki:

2.1.5 Lemma. *Seien $(A, \mathfrak{m})$, $(B, \mathfrak{n})$ lokale noethersche Ringe, und sei $A \to B$ ein flacher lokaler Homomorphismus; ferner sei $x \in B$ ein $B/\mathfrak{m}B$-reguläres Element, und sei $\mathfrak{b}$ das von x erzeugte Ideal. Dann gilt:*

(*i*) *$B/\mathfrak{b}$ ist flach über A.*

(*ii*) *Das Element x ist B-regulär.*

Beweis. Wir zeigen zunächst Aussage (*i*); hierzu betrachten wir $B/\mathfrak{b}$ als endlichen B-Modul. Da $A \to B$ lokal ist, liegt $\mathfrak{m}B$ in dem Jacobson-Radikal $\mathfrak{n}$ von B; ferner ist $(B/\mathfrak{b})/\mathfrak{m}(B/\mathfrak{b})$ aus trivialen Gründen über $A/\mathfrak{m}$ flach. Nach Satz 2.1.2 genügt es somit einzusehen, daß $\operatorname{Tor}_1^A(B/\mathfrak{b}, A/\mathfrak{m})$ verschwindet. Tensorieren wir die Inklusion $\mathfrak{b} \hookrightarrow B$ über A mit $A/\mathfrak{m}$, so erhalten wir den kanonischen Homomorphismus $\mathfrak{b}/\mathfrak{m}\mathfrak{b} \to B/\mathfrak{m}B$. Ist xy ein Element in $\mathfrak{b}$, dessen Klasse in $B/\mathfrak{m}B$ trivial ist, so ist bereits y in $\mathfrak{m}B$ enthalten, denn nach Voraussetzung ist x $B/\mathfrak{m}B$-regulär. Folglich liegt xy in $\mathfrak{m}\mathfrak{b}$; der kanonische Homomorphismus $\mathfrak{b} \otimes_A A/\mathfrak{m} \to B \otimes_A A/\mathfrak{m}$ ist somit injektiv. Da B über A flach ist, verschwindet $\operatorname{Tor}_1^A(B, A/\mathfrak{m})$; die exakte Sequenz

$$\operatorname{Tor}_1^A(B, A/\mathfrak{m}) \to \operatorname{Tor}_1^A(B/\mathfrak{b}, A/\mathfrak{m}) \to \mathfrak{b} \otimes_A A/\mathfrak{m} \to B \otimes_A A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{b} \otimes_A A/\mathfrak{m} \to 0$$

zeigt nun, daß auch $\mathrm{Tor}_1^A(B/\mathfrak{b}, A/\mathfrak{m})$ trivial ist, wie gewünscht. Kommen wir nun zum Beweis von Aussage (*ii*); sei K der Kern der Multiplikation mit x auf B. Tensorieren wir die kurze exakte Sequenz $0 \to \mathfrak{b} \to B \to B/\mathfrak{b} \to 0$ über A mit $A/\mathfrak{m}$, so bleibt diese exakt, denn nach (*i*) ist $\mathrm{Tor}_1(B/\mathfrak{b}, A/\mathfrak{m})$ trivial. Ferner erhalten wir die lange exakte Sequenz

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_2^A(B/\mathfrak{b}, A/\mathfrak{m}) \to \mathrm{Tor}_1^A(\mathfrak{b}, A/\mathfrak{m}) \to \mathrm{Tor}_1^A(B, A/\mathfrak{m}) \to \cdots \quad ;$$

da nach Voraussetzung $\mathrm{Tor}_1^A(B, A/\mathfrak{m})$ verschwindet und nach (*i*) auch der Modul $\mathrm{Tor}_2^A(B/\mathfrak{b}, A/\mathfrak{m})$ trivial ist, folgt somit $\mathrm{Tor}_1^A(\mathfrak{b}, A/\mathfrak{m}) = 0$, so daß die kurze exakte Sequenz $0 \to K \to B \to \mathfrak{b} \to 0$ gleichfalls unter Anwendung des Funktors $\cdot \otimes_A A/\mathfrak{m}$ exakt bleibt. Die exakte Sequenz

$$0 \to K \to B \xrightarrow{x} B \to B/\mathfrak{b} \to 0$$

zerlegt sich in die betrachteten kurzen exakten Sequenzen und bleibt somit ebenfalls unter Anwendung von $\cdot \otimes_A A/\mathfrak{m}$ exakt. Da die Multiplikation mit x auf $B \otimes_A A/\mathfrak{m}$ nach Voraussetzung injektiv ist, verschwindet somit $K \otimes_A A/\mathfrak{m}$, und es folgt $K = \mathfrak{m}K$; induktiv sehen wir, daß K mit $\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n K$ übereinstimmt. Da $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{n}$ enthalten ist und B nach dem Krullschen Durchschnittssatz $\mathfrak{n}$-adisch separiert ist, folgt somit $K = 0$, wie gewünscht. □

Nach Lemma 2.1.5 können wir von der Flachheit von B auf die Flachheit von $B/(x)$ schließen, falls x im Ring der Faser regulär ist. Das folgende Lemma zeigt, daß sich umgekehrt die Flachheit von $B/(x)$ nach B ausdehnt, sofern x als B-reguläre Nichteinheit vorausgesetzt ist:

2.1.6 Lemma. *Sei A ein noetherscher Ring, sei $(B, \mathfrak{n})$ ein lokaler noethersche Ring, sei $A \to B$ ein Homomorphismus, und sei M ein endlicher B-Modul; ferner sei $x \in \mathfrak{n}$ ein M-reguläres Element. Ist M/xM über A flach, so auch M.*

Beweis. Für $i \geq 0$ setzen wir $M_i := x^i M$. Der kanonische Epimorphismus

$$M \xrightarrow{x^i} M_i \to M_i/M_{i+1}$$

besitzt xM als Kern, denn für $v, w \in M$ folgt aus $x^i v = x^{i+1} w$ notwendig $v = xw$, da x M-regulär ist. Insbesondere identifiziert sich M_i/M_{i+1} für $i \geq 0$ mit dem flachen A-Modul M/xM. Betrachten wir nun für $i \geq 1$ die kanonischen kurzen exakten Sequenzen

$$0 \to M_i/M_{i+1} \to M/M_{i+1} \to M/M_i \to 0 \quad ,$$

so folgt durch Induktion nach i unter Verwendung der langen Tor-Sequenz, daß die Moduln M/M_i flach über A sind. Um die Flachheit von M über A nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß für jeden injektiven Homomorphismus $u : N \to N'$ endlich erzeugter A-Moduln der induzierte Homomorphismus $\mathrm{id}_M \otimes u : M \otimes_A N \to M \otimes_A N'$ injektiv ist. Für $i \geq 1$ betrachten wir hierzu das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \otimes_A N' \arrow[r, "s_i'"] & (M/M_i) \otimes_A N' \\ M \otimes_A N \arrow[u, leftarrow, "\mathrm{id}_M \otimes u"'] \arrow[r, "s_i"] & (M/M_i) \otimes_A N \arrow[u, leftarrow, "\mathrm{id}_{M/M_i} \otimes u"] \end{tikzcd} \quad ,$$

wo s_i und s_i' durch den kanonischen Homomorphismus $M \to M/M_i$ induziert sind. Die M/M_i sind über A flach; folglich sind die Homomorphismen $\mathrm{id}_{M/M_i} \otimes u$ sämtlich injektiv, so daß der Kern von $\mathrm{id}_M \otimes u$ im Durchschnitt der Kerne der s_i' enthalten ist. Tensorieren wir die kanonische exakte Sequenz $0 \to M_i \to M \to M/M_i \to 0$ über A mit N', so sehen wir, daß

$$\ker(s_i') \qquad \text{mit} \qquad \operatorname{im}(M_i \otimes_A N' \to M \otimes_A N') = x^i \cdot M \otimes_A N'$$

übereinstimmt. Als B-Modul endlichen Typs ist $M \otimes_A N$ $\mathfrak{n}$-adisch separiert, und nach Voraussetzung ist x in $\mathfrak{n}$ enthalten; folglich ist der Durchschnitt der Moduln $x^i \cdot M \otimes_A N'$ trivial, wie gewünscht. □

In dem folgenden Satz erweitern wir die Aussagen der Lemmata 2.1.5 und 2.1.6 induktiv auf transversal reguläre Folgen beliebiger Länge und erhalten eine umfassende Charakterisierung transversal regulärer Folgen in der flachen lokalen noetherschen Situation. Insbesondere zeigen wir, daß sich die transversale Regularität einer Folge in der Faser verifizieren läßt.

2.1.7 Satz. *Seien $(A, \mathfrak{m}), (B, \mathfrak{n})$ zwei lokale noethersche Ringe, sei $A \to B$ ein lokaler Homomorphismus, und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$ eine Folge von Elementen in $\mathfrak{n}$. Wir schreiben $\boldsymbol{y} = y_1, \dots, y_n$ für das Bild von $\boldsymbol{x}$ in der Faser $B \otimes_A A/\mathfrak{m}$; ferner bezeichnen wir für $i \in \{0, \dots, n\}$ den Quotienten $B/(x_1, \dots, x_i)$ mit B_i. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (i) *Die Folge $\boldsymbol{x}$ ist B-regulär, und die B_i sind flach über A.*
- (ii) *Die Folge $\boldsymbol{x}$ ist B-regulär, und B_n ist flach über A.*
- (iii) *Der A-Modul B ist flach, und die Folge $\boldsymbol{y}$ ist $(B \otimes_A A/\mathfrak{m})$-regulär.*
- (iv) *Der A-Modul B ist flach, und für jeden Ringhomomorphismus $A \to A'$ ist die durch Basiswechsel induzierte Folge $\boldsymbol{x}'$ $(B \otimes_A A')$-regulär.*

Beweis. Die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ ist trivial, und der Schritt von (ii) nach (i) erfolgt unmittelbar mit Lemma 2.1.6, wo wir $M := B_i$ setzen und unter Berücksichtigung der Gleichung $B_{i+1} = B_i/x_{i+1}B_i$ absteigend induktiv nach i schließen. Die Implikation $(i) \Rightarrow (iv)$ gilt nach Lemma 2.1.4. Aussage (iii) ist ein Spezialfall von (iv), so daß lediglich die Implikation $(iii) \Rightarrow (i)$ zu begründen bleibt. Wir schließen mit Induktion nach n; für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $n \geq 1$; nach Induktionsannahme wissen wir, daß B_{n-1} über A flach und die Folge $x_1, \dots, x_{n-1}$ B-regulär ist. Da die Multiplikation mit y_n in $B_{n-1} \otimes_A A/\mathfrak{m}$ injektiv ist, zeigt Lemma 2.1.5, daß $B_n = B_{n-1}/x_n B_{n-1}$ über A flach ist und daß es sich bei x_n um ein B_{n-1}-reguläres Element handelt; damit ist (i) gezeigt. □

Aus Satz 2.1.7 ergibt sich nun leicht das folgende Resultat: Repräsentieren wir in der flachen lokalen noetherschen Situation einen Ring als Quotient eines Rings mit regulärer Faser, so ist die Faser des dargestellten Rings genau dann ein vollständiger Durchschnittsring, wenn die Darstellung durch eine transversal reguläre Folge gegeben ist. Wir werden diese Aussage in Satz 2.2.2 globalisieren.

2.1.8 Lemma. *Seien A, B lokale noethersche Ringe, sei $A \to B$ ein lokaler Homomorphismus, und sei $I \subset B$ ein Ideal. Es bezeichne $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A. Ist B über A flach und ist die Faser $B \otimes_A A/\mathfrak{m}$ regulär, so sind folgende Bedingungen äquivalent:*

- (i) *Das Ideal I ist durch eine A-transversal reguläre Folge erzeugt.*
- (ii) *B ist ein flacher A-Modul, und die Faser $B \otimes_A A/\mathfrak{m}$ ist ein vollständiger Schnittring.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$: Ist I durch eine transversal reguläre Folge erzeugt, so ist B/I nach Definition 2.1.3 über A flach, und nach Satz 2.1.7 $(i) \Rightarrow (iii)$ ist das Ideal $I(B \otimes_A A/\mathfrak{m})$ regulär. Da der noethersche lokale Ring $B \otimes_A A/\mathfrak{m}$ regulär ist, handelt es sich bei $B/I \otimes_A A/\mathfrak{m} = (B \otimes_A A/\mathfrak{m})/I(B \otimes_A A/\mathfrak{m})$ folglich um einen vollständigen Schnittring, wie gewünscht. Zeigen wir nun die Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$. Ist B/I über A flach, so bleibt die kanonische kurze exakte Sequenz $0 \to I \to B \to B/I \to 0$ unter Anwendung des Funktors $\cdot \otimes_A A/\mathfrak{m}$ exakt, so daß sich $I(B \otimes_A A/\mathfrak{m})$ kanonisch mit $I \otimes_A A/\mathfrak{m}$ identifiziert. Ist $B/I \otimes_A A/\mathfrak{m}$ ein vollständiger Schnittring, so ist folglich $I \otimes_A A/\mathfrak{m}$ aufgrund der Regularität von $B \otimes_A A/\mathfrak{m}$ nach Korollar 1.4.10 von einer regulären Folge erzeugt. Diese läßt sich als Liftung einer Folge in I realisieren; nach Satz 2.1.7 $(iii) \Rightarrow (i)$ ist somit I von einer A-transversal regulären Folge erzeugt, wie behauptet. □

Satz 2.1.7 charakterisiert transversal reguläre Folgen in den Halmen flacher lokal noetherscher Schemata. Transversal reguläre Folgen von lokalen Schnitten in der Strukturgarbe eines flachen Schemas von lokal endlicher Präsentation lassen sich in analoger Weise beschreiben. Beschränken wir uns auf flache Schemata von lokal endlichem Typ über einer lokal noetherschen Basis, so befinden wir uns in einer noetherschen Situation, so daß wir Satz 2.1.7 anwenden können und lediglich zeigen müssen, daß sich die transversale Regularität einer Folge lokaler Schnitte in den Halmen verifizieren läßt. Im nachfolgenden Abschnitt beweisen wir die hierfür wesentliche Tatsache, daß der flache Ort eines Schemas von lokal endlichem Typ über einer lokal noetherschen Basis stets offen ist.

2.1.3 Topologische Eigenschaften flacher Morphismen

Eine lokale Eigenschaft eines Schemas X ist als Eigenschaft einzelner Punkte von X anzusehen; beispielsweise heißt ein Schema X flach in einem Punkt x, wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ über dem zugehörigen lokalen Ring der Basis flach ist. Ist X von lokal endlicher Präsentation, so sind sämtliche Gleichungen, welche die lokale Struktur von X bei x charakterisieren, bereits auf einer offenen Umgebung U von x definiert; dann dehnen sich zahlreiche lokale Eigenschaften von x auf alle Punkte von U aus, und der Ort, wo die betrachtete Eigenschaft erfüllt ist, bildet ein offenes Unterschema von X. Wir beweisen in diesem Abschnitt, daß der flache Ort eines Schemas von lokal endlichem Typ über einer lokal noetherschen Basis offen ist; hierauf aufbauend werden wir in Abschnitt 2.1.4 wie angekündigt beweisen, daß die transversale Regularität einer Folge lokaler Schnitte in den Halmen zu testen ist. Unter Verwendung dieser Tatsachen werden wir in Abschnitt 2.2 zeigen können, daß in der betrachteten Situation auch der noch zu definierende vollständige Durchschnittsort offen ist.

Bemerkung. Selbstverständlich dehnt sich nicht jede lokale Eigenschaft eines lokal endlich präsentierten Schemas von Punkten auf offene Umgebungen dieser Punkte aus; beispielsweise ist der nicht-flache Ort eines lokal endlich präsentierten Schemas abgeschlossen.

Wir zeigen zunächst, daß zu jedem Schema X von lokal endlichem Typ über einer lokal noetherschen lokal integren Basis S ein offener Ort in S existiert, über welchem X frei ist. Dieses sogenannte Theorem von der generischen Flachheit wird auch in Kapitel 4.3 Verwendung finden, wo wir beweisen werden, daß bestimmte dominante Homomorphismen von Gruppenschemata treuflach sind.

2.1.9 Lemma. *Sei A ein noetherscher Integritätsring, sei B eine A-Algebra von endlichem Typ, und sei M ein endlicher B-Modul. Dann existiert ein Element $f \in A$, derart daß $M_f = M \otimes_A A_f$ über A_f frei ist.*

Beweis. Wir dürfen $M \neq 0$ annehmen. Nach Lemma 1.1.15 existiert eine endliche Kette $0 = M_0 \subset \ldots \subset M_r = M$ von B-Moduln, derart daß für jedes $i \in \{0, \ldots, r-1\}$ ein Primideal $\mathfrak{p}_i \in B$ existiert, so daß der Quotient M_{i+1}/M_i zu $B/\mathfrak{p}_i$ isomorph ist. Da Lokalisieren kurze exakte Sequenzen respektiert und da eine Erweiterung freier Moduln frei ist, dürfen wir somit annehmen, daß es sich bei B um einen Integritätsring handelt und daß M mit B übereinstimmt. Ist der Strukturhomomorphismus $A \to B$ nicht injektiv, so verschwindet B_f für ein beliebiges von Null verschiedenes Element $f \in \ker(A \to B)$, und die Behauptung gilt aus trivialen Gründen; somit dürfen wir ohne Einschränkung A als Unterring von B ansehen. Sei K der Quotientenkörper von A; dann ist $B \otimes_A K = BK$ ein Integritätsring, welcher kanonisch in dem Quotientenkörper von B enthalten ist. Da B als A-Algebra endlich erzeugt ist, besitzt auch BK über K ein endliches algebraisches Erzeugendensystem; nach dem Noetherschen Normalisierungssatz existiert folglich ein über K algebraisch unabhängiges System $\boldsymbol{y} = y_1, \ldots, y_n$ von Elementen in BK, derart daß BK über $K[\boldsymbol{y}]$ endlich ist. Indem wir die y_i durch geeignete Einheiten aus K abändern, können wir sie als Elemente von B realisieren. Nach dem Lying-Over-Theorem und nach Korollar 1.2.22 ist $\dim BK$ gleich n; wir schließen mit Induktion nach n. Sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_m$ ein System von Elementen aus B, welche B als A-Algebra und BK als $K[\boldsymbol{y}]$-Modul erzeugen. Für $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ fixieren wir eine Darstellung $x_i x_j = \sum_{k=1}^{m} z_{ijk} x_k$ mit Koeffizienten z_{ijk} in $K[\boldsymbol{y}]$. Sei $g \in A$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner der Koeffizienten der z_{ijk}; dann liegen die z_{ijk} in $A_g[\boldsymbol{y}]$, und die x_i erzeugen B_g als $A_g[\boldsymbol{y}]$-Modul. Indem wir A, B durch A_g, B_g ersetzen, dürfen wir also annehmen, daß B ein endlicher Modul über dem Polynomring $C := A[\boldsymbol{y}]$ ist. Nach Korollar 1.2.22 ist $\dim CK$ gleich n. Sei L der Quotientenkörper von C, und seien $b_1, \ldots, b_r \in B$ Elemente, welche eine Basis von $B \otimes_C L$ über L induzieren. Die b_i korrespondieren zu einer kurzen exakten Sequenz von C-Moduln

$$0 \to C^m \to B \to B' \to 0 \quad ,$$

wo B' ein endlich erzeugter C-Torsionsmodul ist. Sei $d_1, \ldots, d_s$ ein System von Erzeugern für B' über C; dann existiert zu jedem $j \in \{1, \ldots, s\}$ ein $c_j \in C - \{0\}$ mit $c_j d_j = 0$. Bezeichnet c das Produkt der c_j, so liegt c in $\mathrm{Ann}_C B'$, so daß wir B' als $C/(c)$-Modul ansehen können. Da c in C und damit insbesondere in $C \otimes_A K$ von Null verschieden und somit CK-regulär ist, gilt $\dim(C/(c))K < \dim CK = n$; nach Induktionsvoraussetzung existiert somit ein Element $f \in A$, derart daß B'_f über A_f frei ist. Da auch $C_f^m = (A_f[\boldsymbol{y}])^m$ über A_f frei ist, zeigt die kurze exakte Sequenz

$$0 \to C_f^m \to B_f \to B'_f \to 0 \quad ,$$

daß B_f über A_f frei ist, wie gewünscht. □

2.1.10 Korollar. *Sei X ein lokal noethersches lokal integeres Schema, und sei $f : Y \to X$ ein Morphismus von lokal endlichem Typ. Ist der induzierte Homomorphismus $f_*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ injektiv, so existiert ein offenes affines Unterschema U von X mit nicht-leerem f-Urbild V, derart daß die Restriktion von f auf V frei ist; dann ist $f|_V$ insbesondere treuflach.*

Beweis. Wir dürfen X und Y als affin ansehen, $X = \mathrm{Spec}\, A$, $Y = \mathrm{Spec}\, B$. Nach Lemma 2.1.9 existiert ein nicht-triviales Element f in A, derart daß B_f über A_f frei ist; aufgrund der Injektivität von $A \to B$ ist B_f nicht der Nullring, wie gewünscht. □

Besitzt ein noetherscher topologischer Raum X genügend viele generische Punkte, so läßt sich die Frage, ob eine gegebene Teilmenge von X offen ist, anhand ihres Spezialisierungsverhaltens beantworten.

2.1.11 Lemma. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum mit der Eigenschaft, daß jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge von X einen generischen Punkt besitzt, und sei $U \subset X$ eine Teilmenge. Genau dann ist U offen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(*i*) *U ist stabil unter Generalisierung.*

(*ii*) *Ist $x \in U$ ein Punkt, so enthält $U \cap \overline{\{x\}}$ eine nicht-leere Teilmenge, welche relativ zu $\overline{\{x\}}$ offen ist.*

Beweis. Sei U als offen vorausgesetzt. Sind $x \in U$, $y \in X$ Punkte, derart daß x in $\overline{\{y\}}$ enthalten ist, so liegt y bereits in U, da ansonsten $\overline{\{y\}}$ in dem abgeschlossenen Komplement von U enthalten wäre und x nicht treffen könnte. Somit folgt (i); Bedingung (ii) gilt nach Definition der Relativtopologie. Seien umgekehrt (i) und (ii) erfüllt. Sei V das Komplement von U, und seien $\eta_1, \ldots, \eta_n$ die generischen Punkte der irreduziblen Komponenten des Abschlusses $\overline{V}$ von V in X. Läge ein η_i in U, so enthielte nach (ii) der Durchschnitt $U \cap \overline{\{\eta_i\}}$ eine in $\overline{\{\eta_i\}}$ offene Menge; insbesondere enthielte $U \cap \overline{V}$ eine in $\overline{V}$ offene Menge, so daß sich $\overline{V}$ unter der Bedingung $V \subset \overline{V}$ echt verkleinern ließe, im Widerspruch zur Minimalität von $\overline{V}$. Folglich sind alle generischen Punkte η_i von $\overline{V}$ in V enthalten. Ist $y \in \overline{V}$ ein beliebiger Punkt, so generalisiert y zu einem der η_i; da η_i in V und somit nicht in U liegt, kann nach (i) auch y nicht in U enthalten sein; somit liegt y in V, und es folgt $\overline{V} \subset V$, also $V = \overline{V}$. Folglich ist V in X abgeschlossen und U in X somit offen, wie behauptet. □

Wir können nun zeigen, daß der flache Ort eines Schemas von lokal endlichem Typ über einer lokal noetherschen Basis offen ist:

2.1.12 Theorem. *Sei X ein lokal noethersches Schema, sei $f : Y \to X$ ein Morphismus von lokal endlichem Typ, und sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul. Dann ist die Menge U der Punkte $y \in Y$, wo $\mathcal{F}$ über X flach ist, in Y offen.*

Beweis. Die Aussage ist lokal auf X und Y zu verifizieren, so daß wir die betrachteten Schemata als affin ansehen dürfen, $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$; dann ist $\mathcal{F}$ zu einem endlichen B-Modul M assoziiert. Sei $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{q}'$ eine Inklusion von Primidealen in B, wo $M_\mathfrak{q}$ über A flach sei. Für jeden A-Modul N identifiziert sich $N \otimes_A M_{\mathfrak{q}'}$ kanonisch mit $(N \otimes_A M_\mathfrak{q}) \otimes_{B_\mathfrak{q}} B_{\mathfrak{q}'}$; somit ist $M_{\mathfrak{q}'}$ über A flach, und folglich ist U stabil unter Generalisierung. Sei $\mathfrak{q} \in U$ ein beliebiger Punkt; wir setzen $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q}$. Wenden wir Lemma 2.1.9 auf den noetherschen Integritätsring $A/\mathfrak{p}$, die endlich erzeugte $A/\mathfrak{p}$-Algebra $B/\mathfrak{p}B$ und den endlichen $B/\mathfrak{p}B$-Modul $M/\mathfrak{p}M$ an, so erhalten wir in $\operatorname{Spec} B/\mathfrak{p}B = V(\mathfrak{p}B)$ eine offene Umgebung W des zu $\mathfrak{q}$ korrespondierenden Punktes, derart daß für alle Punkte $\mathfrak{q}' \in W$ der Modul $(M/\mathfrak{p}M)_{\mathfrak{q}'} = M_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{q}'}$ über $A/\mathfrak{p}$ flach ist. Berechnen wir $\operatorname{Tor}_1^A(M_\mathfrak{q}, A/\mathfrak{p})$ mittels einer projektiven Auflösung von $A/\mathfrak{p}$, so sehen wir, daß sich $\operatorname{Tor}_1^A(M_\mathfrak{q}, A/\mathfrak{p})$ mit $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p}) \otimes_B B_\mathfrak{q}$ identifiziert; aufgrund der Flachheit von $M_\mathfrak{q}$ über A ist somit $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p}) \otimes_B B_\mathfrak{q}$ trivial. Mit M ist auch $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p})$ über B endlich erzeugt; folglich existiert eine Umgebung W' von $\mathfrak{q}$ in $\operatorname{Spec} B$, über welcher $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p})$ verschwindet. Wir betrachten die $V(\mathfrak{q})$-relativ offene Umgebung $W'' := (W \cap V(\mathfrak{q})) \cap (W' \cap V(\mathfrak{q}))$ von $\mathfrak{q}$. Ist $\mathfrak{q}'$ ein Punkt in W'', so ist nach dem bislang bewiesenen $M_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{q}'}$ über $A/\mathfrak{p}$ flach, und es gilt $\operatorname{Tor}_1^A(M_{\mathfrak{q}'}, A/\mathfrak{p}) = \operatorname{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}'} = 0$. Da $\mathfrak{q}'$ nach $\mathfrak{q}$ spezialisiert, ist $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}'}$ und somit auch $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}'}$ in dem Jacobson-Radikal $\mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}'}$ von $B_{\mathfrak{q}'}$ enthalten; nach Satz 2.1.2 ist somit $M_{\mathfrak{q}'}$ flach über A. Folglich enthält $U \cap V(\mathfrak{q})$ die nichtleere $V(\mathfrak{q})$-relativ offene Menge W'', so daß auch die zweite Bedingung aus Lemma 2.1.11 erfüllt ist. Es folgt, daß U in Y offen ist, wie behauptet. □

Bemerkung. Die Aussage von Theorem 2.1.12 bleibt wahr, wenn man auf die Endlichkeitsbedingung an X verzichtet und statt dessen den Morphismus $f : Y \to X$ als lokal endlich präsentiert voraussetzt. Der Beweis beruht auf der Idee, Ringe als filtrierende direkte Limiten noetherscher Unterringe anzusehen; siehe [EGA IV]$_3$, Théorème 11.3.1.

Flache Morphismen besitzen weitere interessante topologische Eigenschaften; beispielsweise sind flache Morphismen von lokal endlicher Präsentation offen (siehe [EGA IV]$_2$ Théorème 2.4.6 oder [Mi], Chapter I, Theorem 2.12). Exemplarisch zeigen wir die schwächere Aussage, daß lokal endliche flache Morphismen offen sind; wir werden von dieser Tatsache im Beweis von Lemma 6.1.5 Gebrauch machen.

2.1.13 Satz. *Sei $f : Y \to X$ ein lokal endlicher flacher Morphismus von Schemata; dann ist f offen.*

Beweis. Die Aussage ist lokal auf X und Y zu verifizieren, so daß wir beide Schemata als affin ansehen dürfen, $X = \mathrm{Spec}\ A$, $Y = \mathrm{Spec}\ B$. Als flacher endlich präsentierter A-Modul ist B über A lokal frei, so daß wir ferner annehmen dürfen, daß B für ein $r \in \mathbb{N}$ als A-Modul zu A^r isomorph ist. Sei b ein Element in B. Ist $\mathfrak{q} \subset B$ ein Primideal, welches b nicht enthält, so liegt b insbesondere nicht in $(A \cap \mathfrak{q})B$; ist umgekehrt $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal mit $b \notin \mathfrak{p}B$, so ist $\mathfrak{p}B_b$ in B_b als echtes Ideal in einem Primideal von B_b enthalten, welches über $\mathfrak{p}$ liegt. Somit liegt ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ genau dann in $f(\mathrm{Spec}\ B_b)$, wenn $B_b/\mathfrak{p}B_b$ nicht der Nullring ist, wenn also die Klasse $\overline{b}$ von b in $B/\mathfrak{p}B$ nicht nilpotent ist. Sei K der Quotientenkörper von $A/\mathfrak{p}$; offenbar ist $\overline{b} \in B/\mathfrak{p}B \subset B/\mathfrak{p}B \otimes_{A/\mathfrak{p}} K$ genau dann nilpotent, wenn der durch $\overline{b}$ gegebene K-Endomorphismus des K-Vektorraums $B/\mathfrak{p}B \otimes_{A/\mathfrak{p}} K \cong K^r$ nur nilpotente und somit triviale Eigenwerte besitzt. Sei $\chi_b(T) = T^r + a_1T^{r-1} + \ldots + a_r \in A[T]$ das charakteristische Polynom von b; da χ_b mit Basiswechsel verträglich ist, ist $\overline{b}$ nach dem gesagten genau dann nilpotent, wenn das Bild von χ_b in $K[T]$ nur triviale Nullstellen besitzt, also genau dann, wenn sämtliche Koeffizienten a_i von χ_b in $\mathfrak{p}$ liegen. Somit stimmt $f(\mathrm{Spec}\ B_b)$ mit $\bigcup_{i=1}^r \mathrm{Spec}\ A_{a_i}$ überein, und folglich ist $f(\mathrm{Spec}\ B_b)$ offen, wie behauptet. □

2.1.4 Transversal reguläre Immersionen

2.1.14 Definition. *Sei S ein Schema, seien X, Y Schemata über S, sei $f : Y \to X$ eine S-Immersion, und sei $y \in Y$ ein Punkt. Dann heißt f (S-transversal) regulär in y, falls eine offene affine Umgebung $U \subset X$ von $f(y)$ über einem offenen affinen Unterschema V von S existiert, derart daß $f(Y) \cap U$ in U abgeschlossen ist und derart daß das $\Gamma(\mathcal{O}_X, U)$-Ideal, welches $f(Y) \cap U$ als Unterschema von U definiert, durch eine ($\Gamma(\mathcal{O}_S, V)$-transversale) reguläre Folge erzeugt ist. Die Immersion f heißt (S-transversal) regulär, falls sie in allen Punkten (S-transversal) regulär ist.*

Bemerkung. Nach Lemma 2.1.4 sind transversal reguläre Immersionen stabil unter beliebigem Basiswechsel.

Transversal reguläre Immersionen sind also durch transversal reguläre Folgen lokaler Schnitte in der Strukturgarbe des einbettenden Schemas erklärt. Wir zeigen nun wie angekündigt, daß sich die transversale Regularität einer Immersion anhand der in den Halmen induzierten Folgen verifizieren läßt:

2.1.15 Lemma. *Sei S ein lokal noethersches Schema, sei X ein S-Schema von lokal endlichem Typ, und sei Y ein Schema, welches durch eine Immersion $f : Y \to X$ als S-Unterschema von X erklärt sei. Sei $y \in Y$ ein Punkt, und seien x, s seine*

Bilder in X beziehungsweise S. Wir fixieren ein offenes Unterschema U von X, derart daß $f(Y) \cap U$ in U abgeschlossen ist. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(*i*) *f ist in y (S-transversal) regulär.*

(*ii*) *Der Halm $\mathcal{I}_x$ des quasikohärenten $\mathcal{O}_U$-Ideals $\mathcal{I}$, welches $f(Y) \cap U$ als abgeschlossenes Unterschema von U definiert, ist von einer ($\mathcal{O}_{S,s}$-transversal) regulären Folge erzeugt.*

Beweis. Die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ folgt ohne Endlichkeitsvoraussetzungen unmittelbar aus der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts und der Flachheit der Lokalisierung. Zum Beweis der nicht-trivialen Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$ fixieren wir eine reguläre Folge $a_{1,x}, \dots, a_{m,x}$, welche den Halm $\mathcal{I}_x$ erzeugt. Wir verkleinern U notfalls, so daß $\mathcal{I}$ auf U durch endlich viele globale Schnitte $b_1, \dots, b_n$ erzeugt ist, und fixieren eine Darstellung

$$b_{j,x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij,x} a_{i,x} \qquad (1 \le j \le n)$$

der Keime $b_{j,x}$ der b_j in x mit Koeffizienten $\alpha_{ij,x} \in \mathcal{O}_{X,x}$. Indem wir U weiter geeignet verkleinern, können wir erreichen, daß sich die Elemente $a_{i,x}$ sowie die Koeffizienten $\alpha_{ij,x}$ zu Schnitten a_i, α_{ij} auf U ausdehnen; ferner dürfen wir U als affin annehmen, $U = \operatorname{Spec} A$. Wir erhalten eine Gleichung

$$b_j = c_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} a_i \qquad (1 \le j \le n)$$

mit geeigneten Elementen $c_j \in A$, deren Keime $c_{j,x}$ in x verschwinden; indem wir U weiter verkleinern, dürfen wir die c_j als trivial annehmen, so daß die a_i das Ideal $\mathcal{I}$ über U erzeugen. Für $0 \le i \le m$ setzen wir $A_i := A/(a_1, \dots, a_i)$, und für $0 \le i \le m-1$ definieren wir $\mathfrak{a}_i \subset A_i$ als das Ideal der Elemente, welche a_{i+1} annullieren. Die Ideale $\mathfrak{a}_i$ sind endlich erzeugt, denn die Ringe A_i sind noethersch. Da die Keime $a_{i,x}$ eine reguläre Folge bilden und exakte Sequenzen unter Lokalisierung erhalten bleiben, sind die Halme $\mathfrak{a}_{i,x}$ der $\mathfrak{a}_i$ trivial; indem wir U weiter verkleinern, können wir die Folge $a_1, \dots, a_m$ somit als regulär annehmen. Ist die Folge der $a_{i,x}$ sogar $\mathcal{O}_{S,s}$-transversal regulär, so sind die $A_{i,x}$ über $\mathcal{O}_{S,s}$ flach. Nach Theorem 2.1.12 existiert somit zu jedem $i \in \{0, \dots, n\}$ eine offene Teilmenge $U_i \subset \operatorname{Spec} A_i$, derart daß U_i über S flach ist. Als abgeschlossene Unterschemata von $\operatorname{Spec} A$ tragen die $\operatorname{Spec} A_i$ die Relativtopologie; zu jedem i fixieren wir eine offene Teilmenge $W_i \subset \operatorname{Spec} A$ mit $W_i \cap \operatorname{Spec} A_i = U_i$. Setzen wir $W := \bigcap_{i=0}^{n} W_i$, so ist $W \subset \operatorname{Spec} A$ eine offene Umgebung von x, derart daß die Folge $a_1, \dots, a_m$ auf W sogar S-transversal regulär ist, wie gewünscht. □

Bemerkung. Die Aussage von Lemma 2.1.15 bleibt wahr, wenn wir auf die Voraussetzung, daß S lokal noethersch sei, verzichten und statt dessen die Strukturmorphismen $X \to S$, $Y \to S$ als lokal endlich präsentiert voraussetzen; siehe hierzu [EGA IV]$_4$, Proposition 19.2.4.

2.2 Vollständige Durchschnitte

Wir definieren nun wie angekündigt vollständige Durchschnitte als flache lokal endlich präsentierte Schemata, deren Fasern die Eigenschaft besitzen, daß es sich bei den lokalen Ringe ihrer Strukturgarben um vollständige Durchschnittsringe handelt.

2.2.1 Definition. *Sei S ein Schema, sei X ein flaches S-Schema von lokal endlicher Präsentation, sei $x \in X$ ein Punkt, sei s das Bild von x in S, und sei X_s die Faser von f über s. Wir sagen, daß X im Punkt x die Eigenschaft eines vollständigen Durchschnitts besitzt, falls $\mathcal{O}_{X_s,x}$ ein vollständiger Durchschnittsring ist; X heißt ein vollständiger Durchschnitt, falls die genannte Eigenschaft in allen Punkten von X erfüllt ist.*

Wir sind nun in der Lage, die Aussage von Lemma 2.1.8 zu globalisieren und vollständige Durchschnitte als transversal regulär eingebettete Unterschemata von Schemata mit regulären Fasern zu charakterisieren:

2.2.2 Satz. *Sei S ein lokal noethersches Schema, seien X, Y flache S-Schemata von lokal endlichem Typ, sei $f : Y \to X$ eine S-Immersion, und sei y ein Punkt von Y; wir schreiben s für das Bild von y in S. Angenommen, die Faser X_s von X über s ist im Punkt $f(y)$ regulär; dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(*i*) *Die Immersion f ist in y transversal regulär.*

(*ii*) *Y ist in y ein vollständiger Durchschnitt.*

Beweis. Die Aussage ist lokal auf S, X und Y zu verifizieren, so daß wir die betrachteten Schemata als affin ansehen können, $S = \text{Spec } A$, $X = \text{Spec } B$, $Y = \text{Spec } B/I$, wo I ein geeignetes Ideal von B bezeichnet. Wir schreiben $k(s)$ für den Restklassenkörper in s. Nach Lemma 2.1.15 ist f genau dann in y transversal regulär, wenn $I_y \subset B_y$ durch eine A_s-transversal reguläre Folge erzeugt ist; da $B_y \otimes_{A_s} k(s)$ nach Voraussetzung regulär ist, gilt dies nach Lemma 2.1.8 genau dann, wenn $(B_y/I_y) \otimes_{A_s} k(s)$ ein vollständiger Durchschnittsring ist, wie gewünscht. □

Bemerkung. Die Aussage von Satz 2.2.2 bleibt gültig, wenn wir auf die Endlichkeitsbedingung an S verzichten und statt ihrer die S-Schemata X, Y als lokal endlich präsentiert voraussetzen, siehe [EGA IV]$_4$ 19.3.7.

Wir zeigen nun, daß die Eigenschaft vollständiger Durchschnitte unter Basiswechsel und Komposition stabil ist und daß sie fpqc-lokal auf der Basis verifiziert werden kann:

2.2.3 Satz. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(*i*) *Jede offene Immersion ist ein vollständiger Durchschnitt.*

(*ii*) *Seien S, S' Schemata, sei $S' \to S$ ein Morphismus, und sei X ein S-Schema. Ist X ein vollständiger Durchschnitt über S, so ist $X \times_S S'$ ein vollständiger Durchschnitt über S'. Ist der betrachtete Basiswechselmorphismus treuflach quasikompakt, so gilt die Umkehrung.*

(*iii*) *Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ vollständige Durchschnitte; dann ist auch $g \circ f : X \to Z$ ein vollständiger Durchschnitt.*

Beweis. Aussage (i) gilt nach Definition 2.2.1, denn die Fasern offener Immmersionen sind Spektren von Körpern. Für Aussage (ii) bemerken wir zunächst, daß die Eigenschaften 'flach' und 'lokal von endlicher Präsentation' unter Basiswechsel stabil sind und sich nach treuflach-quasikompaktem Basiswechsel nachweisen lassen. Sei nun s' ein Punkt in S', und sei s seine Projektion nach S; wir schreiben k und k' für die Restklassenkörper in s beziehungsweise s'. Die Faser $X'_{s'}$ identifiziert sich mit $X_s \otimes_k k'$, und Aussage (ii) folgt unmittelbar aus Lemma 1.4.11 unter Beachtung der Tatsache, daß treuflache Morphismen surjektiv sind. Unter den Voraussetzungen von Aussage (iii) ist die Komposition $g \circ f$ flach von lokal endlicher Präsentation. Nach Definition 2.2.1 dürfen wir Z als Körper ansehen; es genügt dann zu zeigen, daß die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ vollständige Durchschnittsringe sind. Dies folgt aus dem folgenden allgemeineren Satz, welchen wir auf den Morphismus $f : X \to Y$ anwenden. □

2.2.4 Satz. *Sei $X \to S$ ein vollständiger Durchschnitt, sei $x \in X$ ein Punkt, und sei s das Bild von x in S. Ist $\mathcal{O}_{S,s}$ ein noetherscher Ring, welcher ein vollständiger Durchschnittsring ist, so ist auch $\mathcal{O}_{X,x}$ noethersch und ein vollständiger Durchschnittsring.*

Beweis. Basiswechsel mit $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,s} \to S$ reduziert unmittelbar auf die Situation, daß S das Spektrum eines lokalen noetherschen Rings $(A, \mathfrak{m})$ ist und daß s mit dem abgeschlossenen Punkt von S übereinstimmt. Sei $A' := \hat{A}$ die Komplettierung von A, sei $S' := \operatorname{Spec} A'$ ihr Spektrum, sei $X' := X \times_S S'$, und sei s' der abgeschlossene Punkt von S', also der eindeutig bestimmte Punkt von S' über s. Aufgrund der kanonischen Identität

$$A/\mathfrak{m} = A'/\mathfrak{m}A' = A' \otimes_A A/\mathfrak{m} \tag{2.1}$$

sind die Fasern X_s, $X'_{s'}$ in natürlicher Weise isomorph; folglich existiert genau ein Punkt x' in X' über x. Wir wollen zunächst einsehen, daß der kanonische Homomorphismus $\varphi : \mathcal{O}_{X,s} \to \mathcal{O}_{X',s'}$ einen Isomorphismus maximaladischer Komplettierungen induziert: Sei $U \subset X$ eine offene affine Umgebung von x, $U = \operatorname{Spec} B$, und sei $\mathfrak{p} \subset B$ das zu x korrespondierende Primideal. Es besteht die kanonische funktorielle Identität

$$\cdot \otimes_B B/\mathfrak{p} = \cdot \otimes_A A/\mathfrak{m} \otimes_{(B \otimes_A A/\mathfrak{m})} B/\mathfrak{p} \quad . \tag{2.2}$$

Nach (2.1) und (2.2) ist der kanonische Homomorphismus $B \to B \otimes_A A'$ nach Division durch das jeweils durch $\mathfrak{p}$ erzeugte Ideal bijektiv, so daß das durch $\mathfrak{p}$ in $B \otimes_A A'$ erzeugte Ideal $\mathfrak{p}'$ prim ist und somit zu dem Punkt $x' \in X'$ korrespondiert. Ferner zeigen (2.1) und (2.2), daß sich die kanonischen Homomorphismen $B \to (B \otimes_A A')_{\mathfrak{p}'}$, $B \otimes_A A' \to B_{\mathfrak{p}} \otimes_A A'$ nach Division durch das jeweils durch $\mathfrak{p}$ erzeugte Ideal mit der kanonischen Insklusion von $B/\mathfrak{p}$ in seinen Quotientenkörper $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ identifizieren; Elemente aus $B - \mathfrak{p}$ oder $(B \otimes_A A') - \mathfrak{p}'$ gehen somit in $(B \otimes_A A')_{\mathfrak{p}'}$ beziehungsweise $B_{\mathfrak{p}} \otimes_A A'$ auf Einheiten. Die universellen Eigenschaften von Komplettierung und Tensorprodukt liefern folglich die horizontalen Pfeile des kanonischen kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
 & B_{\mathfrak{p}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
B_{\mathfrak{p}} \otimes_A A' \arrow[rr, shift left] & & (B \otimes_A A')_{\mathfrak{p}'} \arrow[ll, shift left] \\
 & B \otimes_A A' \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \quad ;$$

welche zueinander invers sind. Sei $\hat{\varphi}$ der durch $\varphi : B_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{p}} \otimes_A A'$ induzierte Homomorphismus maximaladischer Komplettierungen. Nach Korollar 1.3.5 ist dieser surjektiv; es genügt somit zu zeigen, daß $\hat{\varphi}$ injektiv ist. Sei also $(y_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $B_{\mathfrak{p}}$, deren Bild unter φ eine Nullfolge bildet; wir dürfen annehmen, daß $\varphi(y_n)$ in $(\mathfrak{p}(B_{\mathfrak{p}} \otimes_A A'))^n$ enthalten ist. Da $B_{\mathfrak{p}}$ und $B_{\mathfrak{p}} \otimes_A A'$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ modulo $\mathfrak{m}^n$ übereinstimmen, liegt dann jedes y_n in $(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})^n + \mathfrak{m}^n B_{\mathfrak{p}} \subset (\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})^n$. Somit bilden die y_n in $B_{\mathfrak{p}}$ eine Nullfolge, und es folgt wie gewünscht, daß $\hat{\varphi} : \hat{\mathcal{O}}_{X,x} \to \hat{\mathcal{O}}_{X',x'}$ ein Isomorphismus ist. Da $\mathcal{O}_{X,x}$ nach Theorem 1.4.9 genau dann ein vollständiger Schnittring ist, wenn dies für $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ der Fall ist, dürfen wir also den Grundring A als vollständig annehmen.

Wir arbeiten lokal auf X; sei wiederum $X = \operatorname{Spec} B$ eine offene affine Umgebung von x. Wir fixieren eine Darstellung $B = C/I$ von B als Quotient der Polynomalgebra $C := A[T_1, \dots, T_n]$. Da Polynomringe über Körpern regulär sind, folgt aus Satz 2.2.2, daß wir die Immersion $X \to Z := \operatorname{Spec} C$ nach Verkleinern von Z und X als transversal regulär annehmen dürfen; das Verkleinern von Z können wir realisieren, indem wir für ein geeignetes Element $c \in C$ den Polynomring C durch den Polynomring $C[T_{n+1}]$ ersetzen und dem Ideal $I \subset C$ die Relation $cT_{n+1} - 1$ hinzufügen. Somit dürfen wir annehmen, daß I durch eine reguläre Folge $\boldsymbol{y} = y_1, \dots, y_n$ erzeugt ist. Da der vollständige Durchschnittsring A vollständig ist, besitzt er nach Definition 1.4.1 eine Darstellung $A \cong A'/K$ als Quotient eines regulären vollständigen lokalen noetherschen Rings A' durch ein Ideal $K \subset A'$, welches von einer regulären Folge $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_m$ von Elementen aus A' erzeugt ist. In dem Polynomring $C' := A'[T_1, \dots, T_n]$ bilden die x_i wiederum eine reguläre Folge; sei $K' \subset C'$ das von ihnen erzeugte Ideal. Ist $\boldsymbol{y}'$ eine Liftung von $\boldsymbol{y}$ nach C', so ist die zusammengesetzte Folge $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}'$ C'-regulär, und das von ihr erzeugte Ideal I' induziert eine Darstellung $B = C'/I'$ von B. Nach Korollar 1.2.24 ist C' im Punkt x regulär, und mit I' ist auch der Halm I'_x durch eine reguläre Folge erzeugt; nach Theorem 1.4.9 ist somit die Lokalisierung von B in x ein vollständiger Durchschnittsring, wie behauptet. □

Bemerkung. Beschränken wir uns in Satz 2.2.4 auf lokal noethersche Basisschemata S, deren lokale Ringe Darstellungen als Quotienten regulärer lokaler noetherscher Ringe besitzen, so können wir im Beweis von Satz 2.2.4 darauf verzichten, auf den Fall eines vollständigen Grundrings zu reduzieren; vergleiche hierzu die Anmerkungen zu Beginn von Kapitel 1.

2.3 Approximation vollständiger Durchschnitte

Sei R ein diskreter Bewertungsring, und sei $\pi \in R$ ein uniformisierendes Element, und sei $\hat{R}$ die Komplettierung von R. Ist X ein Schema über R und ist $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so heißt $X_n := X \otimes_R R/(\pi^{n+1})$ die n-te Reduktion von X; entsprechend heißt $R_n := R/(\pi^{n+1})$ die n-te Reduktion von R. Die X_n bilden in offensichtlicher Weise eine aufsteigende Kette abgeschlossener Unterschemata

$$X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X \quad .$$

In ihrer Arbeit [CY] zeigen Chai und Yu die folgende Tatsache ([CY] 6.2): Ist X ein vollständiger Durchschnitt, so läßt sich X_n in X als schematischer Abschluß einer bestimmten Punktmenge rekonstruieren; bei dieser handelt es sich um die n-te Reduktion der Menge aller Punkte von X mit Werten in lokalen endlichen vollständigen Durchschnitten über $\hat{R}$. Ferner zeigen Chai und Yu, daß jeder lokale endliche vollständige Durchschnitt über R_n durch einen lokalen endlichen vollständigen Durchschnitt über $\hat{R}$ induziert ist ([CY] 6.4). Wir wollen diese Resultate im folgenden beweisen; zunächst zeigen wir ein Analogon des Noetherschen Normalisierungssatzes, wofür wir die Technik der Weierstraß-Division verwenden werden.

2.3.1 Weierstraß-Division

2.3.1 Definition. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein vollständiger lokaler noetherscher Ring, und sei $A[[T]]$ der formale Potenzreihenring in einer Variablen über A; ferner sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in A[[T]]$ eine formale Potenzreihe. Existiert eine natürliche Zahl h, derart daß a_h eine Einheit ist und alle a_n mit $n < h$ in $\mathfrak{m}$ liegen, so heißt f allgemein der Ordnung h.*

2.3.2 Satz. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein vollständiger lokaler noetherscher Ring, und sei $A[[T]]$ der formale Potenzreihenring in einer Variablen über A; ferner sei $f \in A[[T]]$ allgemein der Ordnung h. Dann besitzt jedes Element $g \in A[[T]]$ eine eindeutige Darstellung der Form $g = qf + r$ mit $q \in A[[T]]$ und einem Polynom $r \in A[T]$ vom Grad $\leq h-1$. Insbesondere ist der A-Modul $A[[T]]/(f)$ frei vom Rang h, wobei eine Basis durch die Klassen der Elemente $1, T, \ldots, T^{h-1}$ gegeben ist.*

Beweis. Sei $\overline{f}$ das Bild von f in $A[[T]] \otimes_A k \cong k[[T]]$. Der erste nicht-triviale Term von $\overline{f}$ ist von der Gestalt cT^h mit einem $c \in k^*$; wir erhalten eine Darstellung der Form $\overline{f} = T^h \gamma$, wo γ in $k[[T]]$ eine Einheit ist. Folglich ist

$$A[[T]]/(f) \otimes_A k \cong k[[T]]/(\overline{f}) \cong k[[T]]/(T^h)$$

ein endlichdimensionaler k-Vektorraum, dessen Elemente $1, T, \ldots, T^{h-1}$ eine Basis bilden. Mit $A[[T]]$ ist insbesondere $A[[T]]/(f)$ $\mathfrak{m}$-adisch separiert; nach Korollar 1.3.5 ist somit $A[[T]]/(f)$ als A-Modul von den Elementen $1, T, \ldots, T^{h-1}$ erzeugt. Für jedes $g \in A[[T]]$ existiert also eine Darstellung $g = qf + r$ mit $q \in A[[T]]$ und einem Polynom $r \in A[T]$ vom Grad $\leq h-1$; es bleibt zu zeigen, daß diese Darstellung eindeutig ist. Ist $q'f + r'$ eine weitere Darstellung des betrachteten Typs, so gilt $(q'-q)f + (r'-r) = 0$. Es genügt also zu zeigen, daß in dem Fall, daß $qf = r$ ein Polynom vom Grad $\leq h-1$ ist, notwendig $q = 0$ gilt. Angenommen, $q = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n$ ist in $A[[T]]$ von Null verschieden; dann existiert eine kleinste natürliche Zahl $t \geq 0$, für welche die Klasse $\overline{q}$ von q in $A[[T]]/\mathfrak{m}^{t+1}A[[T]] \cong (A/\mathfrak{m}^{t+1})[[T]]$ nicht verschwindet. Für jedes $n \geq 0$ bezeichne $\overline{b}_n$ den n-ten Koeffizienten von $\overline{q}$; wir wählen $d \geq 0$ minimal unter der Bedingung $\overline{b}_d \neq 0$. Aufgrund der Minimalität von t sind für $i \geq 0$ alle b_i in $\mathfrak{m}^t$ enthalten, wobei wir $\mathfrak{m}^0 := A$ setzen. Sei $\overline{f}$ die Klasse von f modulo $\mathfrak{m}^{t+1}$, und für jedes $n \geq 0$ sei $\overline{a}_n$ der n-te Koeffizient von $\overline{f}$.

Für $n < h$ wird $\overline{q}$ von den Monomen $\overline{a}_n T^n$ annulliert, denn die a_n liegen in $\mathfrak{m}$, so daß für alle $i \geq 0$ die Produkte $a_n b_i$ in $\mathfrak{m}^{t+1}$ enthalten sind. Folglich besitzt das Cauchy-Produkt von $\overline{f}$ mit $\overline{q}$ höchstens einen Term vom Grad $h + d$; dieser ist von Null verschieden, da a_h nach Voraussetzung nicht in $\mathfrak{m}$ liegt, also in A und damit in $A/\mathfrak{m}^t$ eine Einheit ist, und da $\overline{b}_d$ nicht verschwindet. Somit besitzt die Klasse von qf modulo $\mathfrak{m}^{t+1}$ einen von Null verschiedenen Term vom Grad $h + d > h - 1$, im Widerspruch dazu, daß $qf \in A[[T]]$ ein Polynom vom Grad $\leq h - 1$ ist. □

2.3.3 Definition. *Sei k ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, und sei $A := k[[T_1, \dots, T_n]]$ der Ring formaler Potenzreihen über k in n Variablen. Ein Element $f \in A$ heißt T_n-allgemein der Ordnung h, wenn f im Sinne von Definition 2.3.1 über $k[[T_1, \dots, T_{n-1}]]$ allgemein der Ordnung h ist.*

Bemerkung. Offenbar ist f genau dann T_n-allgemein der Ordnung h, wenn f unter dem kanonischen Homomorphismus $\varphi : k[[T_1, \dots, T_n]] \to k[[T_n]]$, welcher für alle T_i mit Index $< n$ die Null einsetzt, auf ein von Null verschiedenes Element $\varphi(f)$ abgebildet wird, derart daß h gleich dem Grad des kleinsten nicht-trivialen Monoms von $\varphi(f)$ ist.

2.3.4 Satz. *Sei k ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A := k[[T_1, \dots, T_n]]$ der Ring der formalen Potenzreihen in n Variablen mit Koeffizienten in k, und sei $f \in A$ ein beliebiges von Null verschiedenes Element. Dann existiert ein Automorphismus ϑ von A, welcher f auf ein T_n-allgemeines Element $\vartheta(f)$ abbildet.*

Beweis. Sei $(d_1, \dots, d_n)$ lexikographisch minimal unter den Graden der nichttrivialen Monome von f, sei $d := \max\{d_1, \dots, d_n\}$, und für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $N_i := (nd)^{n-i}$. Wir definieren den Automorphismus ϑ vermöge stetiger Fortsetzung durch die Zuordnungen $T_i \mapsto T_i + T_n^{N_i}$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $T_n \mapsto T_n$. Sei $\varphi : k[[T_1, \dots, T_n]] \to k[[T_n]]$ der Homomorphismus, welcher für alle T_i mit Index $< n$ die Null einsetzt; es ist zu zeigen, daß $\varphi(\vartheta(f)) = f(T_n^{N_1}, \dots, T_n^{N_{n-1}}, T_n)$ nichttrivial ist. Das lexikographisch minimale Monom $cT_1^{d_1} \cdots T_n^{d_n}$ von f wird unter $\varphi \circ \vartheta$ auf das nichttriviale Monom $cT_n^{d_1 N_1 + \ldots + d_{n-1} N_{n-1} + d_n}$ abgebildet; es genügt zu zeigen, daß der betreffende Exponent unter den Exponenten der Bilder der verbleibenden Monome von f nicht vorkommt. Sei also $(e_1, \dots, e_n)$ der Grad eines weiteren Monoms von f; es ist zu zeigen, daß die Differenz

$$\sum_{j=1}^{n} (e_j - d_j) N_j \qquad (*)$$

strikt positiv ist. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ die Zahl, mit $e_j = d_j$ für $j < i$ und $e_i > d_i$. Die in der Summe $(*)$ auftretenden Terme mit Index $j < i$ sind trivial; für $j = i$ ist der Beitrag strikt positiv, zumindest gleich N_i. Stimmt i mit n überein, so ist nichts weiter zu zeigen; ist i strikt kleiner als n, so sind für $j > i$ die Summanden womöglich negativ, sie sind jedoch nach unten durch $-d_j N_j \geq -dN_j \geq -\max_{j>i}\{dN_j\} \geq -dN_{i+1}$ beschränkt. Da höchstens $n - 1$ Terme mit Index $j > i$ auftreten, ist die betrachtete Differenz nach unten streng durch $N_i - (nd)N_{i+1} = N_i - (nd)^{n-i} = 0$ beschränkt, wie gewünscht. □

Mit Hilfe der beiden vorangehenden Sätze können wir nun ein Analogon des Noetherschen Normalisierungssatzes beweisen: Ist B ein formeller Potenzreihenring über einem vollständigen lokalen noetherschen Grundring A und ist $\boldsymbol{x}$ eine Folge der Länge n in B, welche in der Faser regulär ist, so ist $B/\boldsymbol{x}B$ über A endlich.

2.3.5 Lemma. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein vollständiger lokaler noetherscher Ring, sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, sei $B := A[[T_1, \dots, T_n]]$ der Ring formaler Potenzreihen in n*

Variablen mit Koeffizienten in A, und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ eine Folge der Länge n in B, derart daß die in $B \otimes_A A/\mathfrak{m} \cong k[[T_1, \ldots, T_n]]$ induzierte Folge $\boldsymbol{y} = y_1, \ldots, y_n$ regulär ist. Dann ist $B/\boldsymbol{x}B$ über A endlich.

Beweis. Wir schreiben I_0 für das von $\boldsymbol{x}$ in B erzeugte Ideal, und für $i \in \{0, \ldots, n\}$ setzen wir $B_{n-i} := A[[T_1, \ldots, T_{n-i}]]$. Sei $i \in \{0, \ldots, n\}$ maximal gewählt, derart daß ein endlicher A-Homomorphismus $\tau_i : B_{n-i} \to B/I_0$ existiert; aufgrund der Surjektivität der kanonischen Projektion $B_n = B \to B/I_0$ ist i wohldefiniert. Es ist zu zeigen, daß i gleich n ist. Wir setzen $I_i := \ker \tau_i$. Ist I_i in $\mathfrak{m}B_{n-i}$ enthalten, so ist das Bild von I_i in $B_{n-i} \otimes_A A/\mathfrak{m} \cong k[[T_1, \ldots, T_{n-i}]]$ trivial, und Anwendung des Funktors $\cdot \otimes_A A/\mathfrak{m}$ induziert somit einen endlichen injektiven Homomorphismus $\tau_i \otimes 1 : k[[T_1, \ldots, T_{n-i}]] \to k[[T_1, \ldots, T_n]]/(\boldsymbol{y})$. Die Folge $\boldsymbol{y}$ ist nach Voraussetzung regulär; folglich ist $k[[T_1, \ldots, T_n]]/(\boldsymbol{y})$ von Dimension Null. Nach dem Going-up-Theorem ist dann auch $k[[T_1, \ldots, T_{n-i}]]$ von Dimension Null, und mit Korollar 1.2.22 folgt somit $i = n$. Es bleibt also einzusehen, daß I_i in $\mathfrak{m}B_{n-i}$ enthalten ist. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann ist das von I_i in $B_{n-i} \otimes_A A/\mathfrak{m}$ erzeugte Ideal I_i' von Null verschieden; sei $X \in I_i$ ein Element, dessen Bild x in I_i' nicht-trivial ist. Nach Satz 2.3.4 existiert ein Automorphismus ϑ_i von $B_{n-i} \otimes_A A/\mathfrak{m}$, welcher x auf ein T_{n-i}-allgemeines Element abbildet; nach Konstruktion ist ϑ_i durch einen Automorphismus Θ_i von B_{n-i} induziert. Wir erhalten einen endlichen Homomorphismus $\tau_i' := \tau_i \circ \Theta_i^{-1} : B_{n-i} \to B/I_0$, dessen Kern das Element $\Theta(X)$ enthält. Nach Wahl von Θ wird $\Theta(X)$ bei Division durch $(\mathfrak{m}, T_1, \ldots, T_{n-i-1})$ auf ein von Null verschiedenes Element abgebildet. Somit ist $\Theta(X)$ im Sinne von Definition 2.3.1 allgemein über B_{n-i-1}, und nach Satz 2.3.2 ist $B_{n-i}/(\Theta(X))$ folglich über B_{n-i-1} endlich. Der durch τ_i' induzierte endliche Homomorphismus $B_{n-i}/(\Theta(X)) \to B/I_0$ liefert also einen endlichen Homomorphismus $B_{n-i-1} \to B/I_0$, im Widerspruch zur Maximalität von i. □

2.3.2 Beweis der Lemmata [CY] 6.2, [CY] 6.4

Wir führen nun den Beweis des in der Einleitung von Abschnitt 2.3 genannten Approximationstheorems. Hierfür zeigen wir zunächst zwei Lemmata, welche es uns an späterer Stelle ermöglichen werden, auf den Fall einer trivialen Restklassenkörpererweiterung zu reduzieren.

2.3.6 Lemma. *Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler noetherscher Ring, und sei k' eine endliche Erweiterung von k. Dann existiert ein lokaler noetherscher Ring A' mit Restklassenkörper k', welcher A dominiert, derart daß $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A' erzeugt und der Morphismus* $\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$ *ein endlicher freier vollständiger Durchschnitt ist.*

Beweis. Nach Satz 2.2.3 (*iii*) sind vollständige Durchschnitte stabil unter Komposition; Induktion nach der Mächtigkeit eines algebraischen Erzeugendensystems von k' über k reduziert das Problem somit auf den Fall, daß die endliche Erweiterung k'/k einfach ist, erzeugt durch ein Element $\alpha \in k'$. Sei $q \in k[T]$ das Minimalpolynom von α über k, und sei Q eine normierte Liftung von q nach $A[T]$. Da jedes Polynom $F \in A[T]$ eine eindeutige Darstellung $F = GQ + S$ mit $\operatorname{grad} S < \operatorname{grad} Q$ besitzt, ist der noethersche Ring $A' := A[T]/(Q)$ über A frei von endlichem Rang. Aufgrund der Endlichkeit von A' über A liegt jedes maximale Ideal von A' über dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von A. Die kanonische Identität $A' \otimes_A k \cong k[T]/(q) = k'$ zeigt, daß das Ideal $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m}A'$ in A' maximal ist und daß die Faser von $\operatorname{Spec} A'$ über dem abgeschlossenen Punkt von $\operatorname{Spec} A$ aus genau dem durch $\mathfrak{m}'$ gegebenen Punkt besteht; somit ist A' lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}'$ und Restklassenkörper k'. Es bleibt zu zeigen, daß $\operatorname{Spec} A'$ über $\operatorname{Spec} A$ ein vollständiger Durchschnitt ist: Sei $\mathfrak{P}$ das Urbild von $\mathfrak{m}'$ unter der Projektion $A[T] \to A[T]/(Q) = A'$.

Der kanonische lokale Homomorphismus $A \to A[T] \to A[T]_{\mathfrak{P}}$ ist flach, und das Bild q von Q in dem Integritätsring $k[T] \subset A[T]_{\mathfrak{P}} \otimes_A k$ ist regulär. Mit Lemma 2.1.5 erkennen wir Q als $A[T]_{\mathfrak{P}}$-regulär und den ohnehin freien Homomorphismus $A \to A' = A[T]_{\mathfrak{P}}/QA[T]_{\mathfrak{P}}$ erneut als flach. Die betrachtete abgeschlossene A-Immersion $\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A[T]$ ist also nach Lemma 2.1.15 in einer offenen Umgebung $U \subset \operatorname{Spec} A[T]$ des zu $\mathfrak{P}$ korrespondierenden Punktes transversal regulär; da A' lokal ist, faktorisiert $\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A[T]$ über U. Nach Korollar 1.2.24 sind die Fasern des kanonischen Morphismus $\operatorname{Spec} A[T] \to \operatorname{Spec} A$ regulär; nach Satz 2.2.2 ist somit $\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$ ein vollständiger Durchschnitt. □

2.3.7 Lemma. *Seien $(A, \mathfrak{m}, k)$, $(B, \mathfrak{n}, k')$ lokale noethersche Ringe, sei B vollständig, und sei $A \to B$ ein lokaler Homomorphismus, derart daß die induzierte Erweiterung k'/k endlich ist. Dann existieren*

(*i*) *ein lokaler noetherscher Ring A' mit Restklassenkörper k' zusammen mit einem lokalen Homomorphismus $A \to A'$, derart daß $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A' erzeugt und* $\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$ *ein endlicher freier vollständiger Durchschnitt ist,*

(*ii*) *ein lokaler noetherscher Ring B' mit Restklassenkörper k' zusammen mit einem lokalen Homomorphismus $B \to B'$, derart daß* $\operatorname{Spec} B' \to \operatorname{Spec} B$ *ein endlicher freier vollständiger Durchschnitt ist*

(*iii*) *und ein lokaler Homomorphismus $A' \to B'$, derart daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Ist $A \to B$ flach, so notwendig auch $A' \to B'$.

Beweis. Wir konstruieren A' wie im Beweis zu Lemma 2.3.6. Da sich die Vollständigkeit von B unter endlichen Homomorphismen $B \to B'$ auf B' überträgt und da vollständige Durchschnitte nach Satz 2.2.3 (*iii*) unter Komposition stabil sind, dürfen wir zur Konstruktion von B' annehmen, daß die Erweiterung k'/k von einem separablen oder rein inseparablen Element $\alpha \in k'$ erzeugt ist, und daß A' in der Gestalt $A[T]/(Q)$ gegeben ist, wobei es sich bei $Q \in A[T]$ um eine normierte Liftung des Minimalpolynoms $q \in k[T]$ von α über k handelt. Ist α separabel, so besitzt das Bild Q' von Q in $B[T]$ nach dem Henselschen Lemma ([Sa], Chap. IV, no. 1) eine Liftung $a \in B$ von α als Nullstelle; in diesem Fall setzen wir $B' := B$ und erklären den Homomorphismus $A' \to B'$ durch die Zuordnung $T \mapsto a$. Ist nun α über k rein inseparabel, so setzen wir $B' := B[T']/(Q')$; dann ist B' über B endlich und frei, so daß insbesondere jedes maximale Ideal von B' über $\mathfrak{n}$ liegt. Die Faser $B' \otimes_B k'$ von B' über B identifiziert sich mit dem lokalen artinschen Ring $k'[T]/(T-\alpha)^r$, wo r den Grad von q bezeichnet; insbesondere ist B' also lokal mit maximalem Ideal $\sqrt{\mathfrak{n}B'}$ und Restklassenkörper k'. Die Zuordnung $T \mapsto T'$ liefert wie gewünscht einen lokalen Homomorphismus $A' \to B'$, welcher den gegebenen Homomorphismus $A \to B$ fortsetzt. Sei $\mathfrak{P}$ das Urbild von $\sqrt{\mathfrak{n}B'}$ in $B[T']$; da das Bild q von Q' in $k'[T] \subset B[T']_{\mathfrak{P}} \otimes_B k'$ nicht-trivial und somit regulär ist, sehen wir wie im Beweis zu Lemma 2.3.6, daß $\operatorname{Spec} B' \to \operatorname{Spec} B$ ein vollständiger Durchschnitt ist. Ist schließlich $A \to B$ flach, so ist mit $A \to B \to B'$ auch $A \to A' \to B'$ flach, und $A \to A'$ ist als freier Homomorphismus sogar treuflach; folglich ist dann $A' \to B'$ flach. □

Wir kommen nun zum Beweis von Lemma [CY] 6.2:

2.3.8 Lemma. ([CY] 6.2) *Sei R ein diskreter Bewertungsring, und sei $\underline{X}$ ein vollständiger Durchschnitt über R. Dann ist für jedes $n \geq 0$ die Punktmenge*

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \operatorname{im}\,(\underline{X}(C) \to \underline{X}_n(C_n))$$

in $\underline{X}_n$ schematisch dominant, wo C in der Menge $\mathcal{C}$ der lokalen endlichen vollständigen Durchschnitte über $\hat{R}$ variiert.

Beweis. Wir fixieren ein uniformisierendes Element $\pi \in R$ und schreiben k für den Restklassenkörper $R/\pi R$ von R. Sei Spec A_n ein offenes affines Unterschema von $\underline{X}_n$; der kanonische Homomorphismus

$$A_n \to \prod_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A_n} A_{n,\mathfrak{m}}$$

ist injektiv, denn geht ein Element $a \in A_n$ in allen Lokalisierungen $A_{n,\mathfrak{m}}$ nach maximalen Idealen $\mathfrak{m} \subset A_n$ auf Null, so ist $\operatorname{Ann}_A(a)$ in keinem maximalen Ideal von A_n enthalten und folglich das Einheitsideal. Variiert also x in der Menge der lokal abgeschlossenen Punkte von $\underline{X}_n$, so ist die Menge der kanonischen Morphismen Spec $\mathcal{O}_{\underline{X}_n,x} \to \underline{X}_n$ schematisch dominant. Da die lokalen noetherschen Ringe $\mathcal{O}_{\underline{X}_n,x}$ nach dem Krullschen Durchschnittssatz maximaladisch separiert sind, ist für jedes $x \in \underline{X}_n$ der kanonische Homomorphismus $\mathcal{O}_{\underline{X}_n,x} \to \hat{\mathcal{O}}_{\underline{X}_n,x}$ injektiv, der korrespondierende Morphismus Spec $\hat{\mathcal{O}}_{\underline{X}_n,x} \to$ Spec $\mathcal{O}_{\underline{X}_n,x}$ also schematisch dominant. Sei C in $\mathcal{C}$; da $\hat{\mathcal{O}}_{\underline{X}_n,x}$ kanonisch mit $(\hat{\mathcal{O}}_{\underline{X},x})_n$ übereinstimmt, induziert jeder Punkt $c \in$ Spec $\hat{\mathcal{O}}_{\underline{X},x}(C)$ einen Punkt aus $\underline{X}(C)$, dessen Bild in $\underline{X}_n(C_n)$ über Spec $\hat{\mathcal{O}}_{\underline{X}_n,x}$ faktorisiert. Die lokal abgeschlossenen Punkte von $\underline{X}_n$ entsprechen den lokal abgeschlossenen Punkten von $\underline{X}$, welche in der abgeschlossenen speziellen Faser $\underline{X}_0$ liegen. Es genügt also zu zeigen, daß für jeden lokal abgeschlossenen Punkt $x \in \underline{X}_0$ die Punktmenge

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \operatorname{im}\,(\hat{\mathcal{O}}_{\underline{X},x}(C) \to \hat{\mathcal{O}}_{\underline{X}_n,x}(C_n))$$

in Spec $\hat{\mathcal{O}}_{\underline{X}_n,x}$ schematisch dominant ist. Wir schreiben $A := \hat{R}$, $B := \hat{\mathcal{O}}_{\underline{X},x}$; dann identifiziert sich $\hat{\mathcal{O}}_{\underline{X}_n,x}$ kanonisch mit B_n. Nach Voraussetzung ist $\underline{X} \to$ Spec R ist ein vollständiger Durchschnitt; nach Definition 2.2.1 ist somit $\mathcal{O}_{\underline{X},x}/\pi\mathcal{O}_{\underline{X},x}$ ein vollständiger Durchschnittsring, und nach Definition 1.4.1 ist hiermit auch die maximaladische Komplettierung B_0 von $\mathcal{O}_{\underline{X},x}/\pi\mathcal{O}_{\underline{X},x}$ ein vollständiger Durchschnittsring. Der Ring B ist über A flach, denn B ist flach über $\mathcal{O}_{\underline{X},x}$, $\mathcal{O}_{\underline{X},x}$ ist flach über R, und $R \to A$ ist treuflach. Das Schema $\underline{X}$ ist über R lokal von endlichem Typ, und der Punkt $x \in \underline{X}$ ist lokal abgeschlossen; folglich ist der Restklassenkörper k' von A eine endliche Erweiterung des Restklassenkörpers k von A. Nach Lemma 2.3.7 existiert ein kommutatives Diagramm lokaler Homomorphismen

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd} ,$$

wo der untere Homomorphismus flach ist und es sich bei den vertikalen Homomorphismen um endliche frei vollständige Durchschnitte handelt. Mit $B \to B'$ ist auch

$B_n \to B'_n$ frei, also injektiv und folglich schematisch dominant. Somit genügt es zu zeigen, daß die Punktmenge

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}'} \operatorname{im}\,(B'(C) \to B'_n(C_n))$$

das Schema Spec B'_n schematisch dominiert, wo C in der Menge $\mathcal{C}'$ aller lokalen endlichen vollständigen Durchschnitte über A' variiert: In der Tat, nach Satz 2.2.3 (iii) sind vollständige Durchschnitte stabil unter Komposition, so daß $A \to A'$ eine Abbildung $\gamma : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ induziert, und für $C \in \mathcal{C}'$ gibt jeder C-wertige Punkt von B' Anlaß zu einem $\gamma(C)$-wertigen Punkt von B, dessen Bild in $B_n(C_n)$ über B'_n faktorisiert.

Nach Satz 2.2.3 (ii) ist mit Spec $B' \to$ Spec B auch Spec $B' \otimes_R k \to$ Spec $B \otimes_R k$ ein vollständiger Durchschnitt; da der lokale noethersche Ring $B \otimes_R k = B_0$ ein vollständiger Durchschnittsring ist, besitzt nach Satz 2.2.4 der lokale Ring $B' \otimes_R k$ dieselbe Eigenschaft. Da $\mathfrak{m} \subset R$ nach Lemma 2.3.7 das maximale Ideal von A' erzeugt, identifiziert sich $A' \otimes_R k$ kanonisch mit k', so daß $B' \otimes_R k$ kanonisch mit $B' \otimes_{A'} (A' \otimes_R k) \cong B' \otimes_{A'} k'$ übereinstimmt; somit ist $B' \otimes_{A'} k'$ ein vollständiger Durchschnittsring. Die Vollständigkeit von A und B überträgt sich unter den betrachteten endlichen Homomorphismen auf A' und B'. Sei nun $z_1, \ldots, z_b \in B'$ ein Erzeugendensystem des maximalen Ideals von B', und sei $Z_1, \ldots, Z_b$ ein System von Variablen; da die Restklassenkörper von A' und B' übereinstimmen, ist nach Lemma 1.3.24 der durch stetige Fortsetzung erklärte Homomorphismus $D' := A'[[Z_1, \ldots, Z_b]] \to B', Z_i \mapsto z_i$ $(i \leq i \leq b)$ surjektiv, und wir erhalten eine Darstellung $B' = D'/I'$ von B' als Quotient von D'. Da B' und D' über A' flach sind, der Ring $D' \otimes_{A'} k' \cong k'[[Z_1, \ldots, Z_b]]$ nach Korollar 1.2.25 regulär ist und $B' \otimes_{A'} k'$ ein vollständiger Durchschnittsring ist, besitzt das Ideal I' nach Lemma 2.1.8 eine A'-transversal reguläre Folge $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_a$ als Erzeugendensystem. Nach Satz 2.1.7 $(ii) \Rightarrow (iii)$ handelt es sich bei dem Bild $\boldsymbol{y} = y_1, \ldots, y_a$ von $\boldsymbol{x}$ in $D' \otimes_{A'} k'$ um eine reguläre Folge. Ergänzen wir diese durch Elemente $y_{a+1}, \ldots, y_r$ des maximalen Ideals zu einer maximal regulären Folge, so besitzt diese nach Satz 1.1.28 die Länge $r = b$, denn die Folge $Z_1, \ldots, Z_b$ ist in $k'[[Z_1, \ldots, Z_b]]$ maximal regulär. Wir liften die $y_{a+1}, \ldots, y_b$ zu Elementen $x_{a+1}, \ldots, x_b$ des maximalen Ideals von D', und für $s \geq 0$ setzen wir J_s gleich dem von $x_1^s, \ldots, x_b^s$ in D' erzeugten Ideal. Definieren wir für $s \geq 0$ die A'-Algebra C_s als Quotienten $C_s := D'/(I' + J_s)$, so ist die durch $s \geq 0$ indizierte Familie der Projektionen $B' = D'/I' \to D'/(I' + J_s) = C_s$ nach Anwendung des Funktors $\cdot \otimes_R R_n$ schematisch dominant, denn nach dem Krullschen Durchschnittssatz ist der Durchschnitt $\bigcap_{s \geq 0} J_s D'_n$ trivial. Es bleibt einzusehen, daß es sich bei den kanonischen Morphismen Spec $C_s \to$ Spec A' um endliche vollständige Durchschnitte handelt. Die Folge $y_1, \ldots, y_a, y_{a+1}^s, \ldots, y_b^s$ ist nach Lemma 1.1.3 $D' \otimes_{A'} k'$-regulär; nach Lemma 2.3.5 ist somit C_s über A' endlich. Da D' über A' flach ist, erkennen wir mit Satz 2.1.7 $(iii) \Rightarrow (i)$ die Folge $x_1, \ldots, x_a, x_{a+1}^s, \ldots, x_b^s$ als A'-transversal regulär und insbesondere den A'-Modul C_s als flach. Da $D' = A'[[Z_1, \ldots, Z_b]]$ nach Korollar 1.2.25 über A' reguläre Fasern besitzt, ist C_s nach Satz 2.2.2 über A' ein vollständiger Durchschnitt, wie gewünscht. □

Der schematische Abschluß $\underline{X}'$ der generischen Faser eines R-Schemas $\underline{X}$ ist stets flach. Besitzt er sogar die Eigenschaft eines vollständigen Durchschnitts, so läßt er sich mit Hilfe von Lemma 2.3.8 durch gewissen Punktmengen von $\underline{X}$ approximieren; diese Tatsache ist insbesondere dann von Interesse, wenn sich die betrachteten Punkte von $\underline{X}$ in einfacher Weise beschreiben lassen. Wir beweisen zunächst die elementare Tatsache, daß flache Punkte von $\underline{X}$ eindeutig über $\underline{X}'$ faktorisieren:

2.3.9 Lemma. *Sei R ein diskreter Bewertungsring, sei $\underline{X}$ ein R-Schema, und sei $\underline{X}'$ der schematische Abschluß der generischen Faser von $\underline{X}$. Dann ist $\underline{X}'$ über R flach, und für jede flache R-Algebra C ist die kanonische Abbildung $\underline{X}'(C) \to \underline{X}(C)$ bijektiv.*

Beweis. Sei $\pi \in R$ ein uniformisierendes Element. Das abgeschlossene Unterschema $\underline{X}' \subset \underline{X}$ ist durch die Idealgarbe der π-Torsion erklärt; insbesondere ist $\underline{X}'$ frei von π-Torsion und somit über R flach. Sei C eine flache R-Algebra, sei $c :$ Spec $C \to \underline{X}$ ein R-Morphismus, und sei $U =$ Spec A ein offenes affines Unterschema von $\underline{X}$. Auf offenen affinen Teilen des π-torsionsfreien R-Schemas $c^{-1}(U)$ verifizieren wir, daß $c|_{c^{-1}(U)}$ eindeutig über die kanonische abgeschlossene Immersion Spec $A/(\pi\text{-Torsion}) \hookrightarrow$ Spec A faktorisiert; ein Verklebungsargument zeigt, daß c eindeutig über $\underline{X}'$ faktorisiert. □

2.3.10 Korollar. *Sei R ein diskreter Bewertungsring, sei $\underline{X}$ ein R-Schema von lokal endlichem Typ, sei $\underline{X}'$ der schematische Abschluß der generischen Faser von $\underline{X}$, und sei $n \geq 0$ eine natürliche Zahl. Ungenommen, $\underline{X}'$ ist ein vollständiger Durchschnitte; dann identifiziert sich $\underline{X}'_n$ kanonisch mit dem schematischen Abschluß der Punktmenge*

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \mathrm{im}\ (\underline{X}(C) \to \underline{X}_n(C_n)) \quad ,$$

wobei C in der Menge $\mathcal{C}$ lokalen endlichen vollständigen Durchschnitte über $\hat{R}$ variiert.

Beweis. Nach Lemma 2.3.8 ist die Punktmenge

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \mathrm{im}\ (\underline{X}'(C) \to \underline{X}'_n(C_n))$$

in $\underline{X}'_n$ schematisch dominant. Ist C ein Element aus $\mathcal{C}$, so ist C über $\hat{R}$ und somit auch über R flach; nach Lemma 2.3.9 ist der kanonischen Homomorphismus $\underline{X}'(C) \to \underline{X}(C)$ folglich bijektiv. □

Wir zeigen abschließend, daß jeder lokale endliche vollständige Durchschnitt über R_n bereits durch einen lokalen endlichen vollständigen Durchschnitt über $\hat{R}$ induziert ist:

2.3.11 Lemma. ([CY] 6.4) *Sei R ein diskreter Bewertungsring, sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, und seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_n$ die Mengen aller lokalen endlichen vollständigen Durchschnitte über $\hat{R}$ beziehungsweise R_n. Dann ist die kanonische durch Basiswechsel mit R_n über R gegebene Abbildung*

$$\varphi_n : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_n$$

surjektiv.

Beweis. Sei $\pi \in R$ ein uniformisierendes, und sei $k := R/(\pi)$ der Restklassenkörper von R. Die Abbildung φ_n ist wohldefiniert, denn R_n identifiziert sich kanonisch mit $\hat{R} \otimes_R R_n$, und nach Satz 2.2.3 (*ii*) sind vollständige Durchschnitte stabil unter Basiswechsel. Sei $f :$ Spec $A \to$ Spec R_n ein lokaler endlicher vollständiger Durchschnitt. Da A insbesondere ein endliches algebraisches Erzeugendensystem über R_n besitzt, existieren eine natürliche Zahl $b \geq 0$ und ein Ideal $I \subset B := R_n[T_1, \dots, T_b]$, derart daß A zu B/I isomorph ist. Sei $\mathfrak{m} \subset B$ das eindeutig bestimmte maximale Ideal über I; dann stimmt A mit $B_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}}$ überein; ferner ist $\dim B_\mathfrak{m}$ nach Lemma 1.2.21 gleich b. Der Morphismus $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} R_n$ lokal noetherscher Schemata ist flach, und seine einzige Faser ist regulär. Folglich ist nach Satz 2.2.2 die Immersion $\operatorname{Spec} A \hookrightarrow \operatorname{Spec} B$ in allen Punkten von $\operatorname{Spec} A$ transversal regulär; insbesondere ist das Ideal $I_\mathfrak{m}$ von einer transversal regulären Folge $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_a$ erzeugt. Der endliche Homomorphismus $f^* : R_n \to A$ induziert einen endlichen Monomorphismus $R_n/(\ker f^*) \hookrightarrow A$; nach dem Going-up-Theorem gilt somit $\dim A = \dim R_n/(\ker f^*) \leq \dim R_n = 0$. Wäre a echt kleiner als b, so wäre $\dim A > 0$, und umgekehrt ist $a > b$ ausgeschlossen, da $B_\mathfrak{m}/(x_1, \ldots, x_b)$ bereits nulldimensional ist und die nilpotenten maximalen Ideale lokaler artinscher Ringe keine regulären Elemente besitzen; folglich ist a gleich b. Sei nun $B' := \hat{R}[T_1, \ldots, T_b]$, und sei $\mathfrak{m}'$ das Urbild von $\mathfrak{m}$ unter dem kanonischen surjektiven Homomorphismus $B' \to B$; ferner sei $\boldsymbol{x}' = x'_1, \ldots, x'_b$ eine Liftung von $\boldsymbol{x}$ unter dem surjektiven Homomorphismus $B'_{\mathfrak{m}'} \to B_\mathfrak{m}$. Der Ring $B'_{\mathfrak{m}'}$ ist flach über $\hat{R}$, und das Bild von $\boldsymbol{x}'$ in $B'_{\mathfrak{m}'} \otimes_{\hat{R}} k \cong B_\mathfrak{m} \otimes_{R_n} k$ stimmt mit dem Bild $\boldsymbol{y}$ von $\boldsymbol{x}$ überein, ist also eine reguläre Folge. Nach Satz 2.1.7 $(iii) \Rightarrow (i)$ ist die Folge $\boldsymbol{x}'$ somit $\hat{R}$-transversal regulär; insbesondere ist der Quotient $C := B'_{\mathfrak{m}'}/(\boldsymbol{x}')$ über $\hat{R}$ flach. Nach dem Krullschen Durchschnittssatz ist C π-adisch separiert, und $C \otimes_{\hat{R}} k \cong A \otimes_{R_n} k$ ist über k endlich; nach Korollar 1.3.5 ist somit C über $\hat{R}$ endlich, insbesondere also von endlichem Typ. Wir wählen eine Darstellung $C = \hat{R}[T_1, \ldots, T_{b'}]/J$ und machen die induzierte Darstellung $A = C_n = R_n[T_1, \ldots, T_{b'}]/JR_n[T_1, \ldots, T_{b'}]$ zum Ausgangspunkt unserer obigen Argumentation; insbesondere wählen wir $b := b', I := JB = JB'_n$. Nach dem Lemma von Nakayama, angewendet auf den lokalen noetherschen Ring $B'_{\mathfrak{m}'}$, ist $J_{\mathfrak{m}'}$ durch die $\hat{R}$-transversal reguläre Folge $\boldsymbol{x}'$ erzeugt. Sei $x' \in \operatorname{Spec} B'$ der zu $\mathfrak{m}'$ korrespondierenden Punkt; nach Lemma 2.1.15 dehnt sich $\boldsymbol{x}'$ in einer Umgebung $U' \subset \operatorname{Spec} B'$ von x' zu einer $\hat{R}$-transversal regulären Folge aus, welche J über U' erzeugt. Da C lokal ist, faktorisiert die abgeschlossene Immersion $\operatorname{Spec} C \hookrightarrow \operatorname{Spec} B'$ über U'. Das Schema U' ist über $\hat{R}$ flach von endlichem Typ, und die Fasern von $U' \to \operatorname{Spec} \hat{R}$ sind nach Korollar 1.2.24 regulär; nach Satz 2.2.2 ist folglich $\operatorname{Spec} C$ ein vollständiger Durchschnitt über $\hat{R}$. Somit ist $\operatorname{Spec} C$ ein φ_n-Urbild von $\operatorname{Spec} A$. □

Bemerkung. Sei $\underline{X}$ ein R-Schema. Nach Lemma 2.3.11 ist jeder lokale endliche vollständige Durchschnitt C_n über R_n durch einen lokalen endlichen vollständigen Durchschnitt C über $\hat{R}$ induziert. Dennoch wird sich die Menge der Punkte von $\underline{X}$ mit Werten in lokalen endlichen vollständigen Durchschnitten über R_n im allgemeinen deutlich von der n-ten Reduktion der Menge der Punkte von $\underline{X}$ mit Werten in lokalen endlichen vollständigen Durchschnitten über $\hat{R}$ unterscheiden, da sich nicht jeder Punkt in $\underline{X}(C_n)$ zu einem Punkt in $\underline{X}(C)$ ausdehnen wird.

3. Glattheit und Regularität

Es existieren mindestens drei Möglichkeiten, die Theorie glatter Schemata aufzubauen. Der direkteste und anschaulichste dieser drei Zugänge (siehe [BLR] 2.2) basiert auf dem Jacobi-Kriterium, welches unmittelbar zeigt, daß glatte Schemata als algebraische Analoga glatter Mannigfaltigkeiten anzusehen sind. Ein ebenfalls sehr geometrischer, jedoch technisch aufwendigerer Ansatz besteht darin, glatte Schemata als flach lokal endlich präsentiert vorauszusetzen und sie anhand der Eigenschaften ihrer Fasern zu charakterisieren. Der abstrakteste Zugang zu Glattheit erfolgt über Grothendiecks Theorie der formalen Glattheit, also durch die Beschreibung funktorieller Eigenschaften glatter Morphismen. Wir wollen in diesem Kapitel die ersten beiden Zugänge in Verbindung bringen; ausgehend von der durch das Jacobi-Kriterium inspirierten Definition ([BLR] 2.2/1) werden wir zeigen, daß ein lokal endlich präsentiertes Schemata genau dann glatt ist, wenn es geometrisch reguläre Fasern besitzt, wenn also seine Fasern keine 'versteckten' Singularitäten aufweisen. Wir werden dieses Kriterium an späterer Stelle vielfach verwenden; sein Beweis basiert wesentlich auf der Theorie regulärer noetherscher Ringe, mit welcher wir uns in Abschnitt 1.2 auseinandergesetzt haben. Wir werden die Glattheit eines Schemas über einem Körper unter anderem anhand seiner Dimension charakterisieren; hierfür benötigen wir zunächst einige allgemeine Aussagen aus der Dimensionstheorie integrer Schemata endlichen Typs über Körpern:

3.1 Dimension algebraischer Varietäten

3.1.1 Lemma. *Sei k ein Körper, und sei X ein integres k-Schema von endlichem Typ. Dann bestehen für jedes nichtleere offene Unterschema U von X die Gleichungen*

$$\dim U = \dim X = \mathrm{trdeg}_k K(X) \quad ,$$

wo $K(X)$ den Funktionenkörper von X bezeichnet.

Beweis. Sei η der generische Punkt von X; dann stimmen die Körper $K(U) = \mathcal{O}_{U,\eta}$ und $\mathcal{O}_{X,\eta} = K(X)$ kanonisch überein, so daß es genügt, die Gleichung $\dim X = \mathrm{trdeg}_k K(X)$ nachzuweisen. Da $\dim X$ durch das Supremum der Zahlen $\dim_x X$ gegeben ist, wo x in X variiert, dürfen wir lokal auf X arbeiten und insbesondere X als affin ansehen, $X = \mathrm{Spec}\, A$. Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz existiert ein endlicher Monomorphismus $k[T_1, \ldots, T_d] \hookrightarrow A$, und nach dem Going-Up-Theorem in Verbindung mit Korollar 1.2.22 folgt $\dim A = d$. Wir schreiben kurz T für das System $T_1, \ldots, T_d$. Der Ring $A \otimes_{K[T]} K(T)$ ist über $K(T)$ endlich und folglich ein Körper; wir erhalten die Identität $A \otimes_{K[T]} K(T) = \mathrm{Frac}\,(A)$. Somit ist $\mathrm{Frac}\,(A)$ ist über $k(T_1, \ldots, T_d)$ algebraisch, und es folgt $\mathrm{trdeg}_k \mathrm{Frac}\,(A) = d = \dim A$, wie gewünscht. □

3.1.2 Lemma. *Sei A ein Integritätsring mit Quotientenkörper K, und sei K' ein endlicher Erweiterungskörper von K. Ist ein Element $x' \in K'$ über A ganz, so gilt dies auch für seine Norm $N_{K'/K}(x') \in K$.*

Beweis. Wir interpretieren x' als Endomorphismus des K-Vektorraums K'; dann ist $N_{K'/K}(x')$ durch die Determinante $\det(x')$ von x' gegeben. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von K' über K, und sei M der von den e_i erzeugte $A[x']$-Untermodul von K'; mit $A[x']$ ist dann auch M über A endlich, und nach Definition ist M unter dem Endomorphismus x' stabil. Wir bilden das n-fache äußere Produkt von M beziehungsweise K' über A und erhalten eine Inklusion $\bigwedge_A^n M \hookrightarrow \bigwedge_A^n K'$, wobei sich $\bigwedge_A^n K'$ kanonisch mit $\bigwedge_K^n K'$ identifiziert. Da M unter x' stabil ist, gilt selbiges für $\bigwedge_A^n M$ unter $\bigwedge^n x' = \det(x')$; da $\bigwedge_A^n M$ mit $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ das Einselement von $\bigwedge_A^n K' \cong K'$ enthält und als A-Modul endlich erzeugt ist, folgt somit, daß $\det(x')$ über A ganz ist, wie behauptet. □

3.1.3 Lemma. *Sei k ein Körper, sei A eine integre endlich endlich erzeugte k-Algebra, und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal der Höhe 1. Dann gilt* $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A - 1$.

Beweis. Sei x ein von Null verschiedenes Element in $\mathfrak{p}$; dann identifiziert sich $\sqrt{xA_\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, denn $A_\mathfrak{p}/xA_\mathfrak{p}$ ist von der Dimension Null und folglich artinsch. Da die Bildung des Radikals mit Lokalisieren kommutiert und da A noethersch ist, existiert somit ein Element $z \in A - \mathfrak{p}$, für welches $\sqrt{xA_z}$ mit $\mathfrak{p}A_z$ übereinstimmt. Nach Lemma 3.1.1 sind die Dimensionen von A und $A/\mathfrak{p}$ unter Lokalisierung invariant; folglich dürfen wir A durch A_z ersetzen somit annehmen, daß $\mathfrak{p}$ durch $\sqrt{xA}$ gegeben ist. Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz existiert ein endlicher Monomorphismus $A_0 := k[T_1, \ldots, T_d] \to A$ mit $d = \dim A$. Sei $\mathfrak{q} := \mathfrak{p} \cap A_0$; dann ist $A_0/\mathfrak{q} \to A/\mathfrak{p}$ ein endlicher Monomorphismus, und nach dem Going-Up-Theorem ist folglich $\dim A/\mathfrak{p}$ gleich $\dim A_0/\mathfrak{q}$. Da $\dim A/\mathfrak{p}$ durch $d-1$ beschränkt ist, genügt es hiermit, die Ungleichung $\dim A_0/\mathfrak{q} \geq d - 1$ nachzuweisen. Wir setzen $K := \mathrm{Frac}\,(A), K_0 := \mathrm{Frac}\,(A_0)$; dann ist K/K_0 eine endliche Körpererweiterung, denn $A \otimes_{A_0} K_0$ ist über K_0 endlich und stimmt folglich mit K überein. Sei $x_0 := N_{K/K_0}(x)$ die Norm von x. Nach Lemma 3.1.2 ist x_0 über A_0 ganz; da A_0 als faktorieller Ring normal ist, liegt x_0 somit in A_0. Sei y ein Element in $\sqrt{xA} \cap A_0$, und sei $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, für welche y^m in xA liegt. Dann ist $y^m = N_{K/K_0}(y^m)$

in x_0A_0 enthalten; folglich besteht die Inklusion $\mathfrak{q} = \sqrt{xA} \cap A_0 \subset \sqrt{x_0A_0}$. Ist also p ein irreduzibler Faktor von x_0, so liegt $\mathfrak{q}$ in pA_0. Nach dem Beweis des Noetherschen Normalisierungssatzes existiert ein Automorphismus von A_0, welcher p auf ein normiertes Polynom in $(k[T_1, \ldots, T_{d-1}])[T_d]$ abgebildet. Somit ist $A_0/(p)$ über $k[T_1, \ldots, T_{d-1}]$ endlich, und es folgt $\dim A_0/\mathfrak{q} \geq \dim A_0/(p) = d-1$, wie gewünscht. □

3.1.4 Satz. *Sei k ein Körper, und sei A ein Integritätsring, welcher als k-Algebra endlich erzeugt ist. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A, so gilt*

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A \quad .$$

Beweis. Wir schließen mit Induktion nach $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. Ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ gleich Null, so ist $\mathfrak{p}$ das Nullideal, und es ist nichts zu zeigen; sei also $d := \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ strikt positiv. Wir fixieren eine maximale Kette $(0) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{p}$ von Primidealen unter $\mathfrak{p}$; dann ist $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_1$ in $A/\mathfrak{p}_1$ ein Primideal der Höhe $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) - 1$, und es gilt $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_1) = 1$. Wenden wir die Induktionsvorausetzung auf den Ring $A/\mathfrak{p}_1$ und das Primideal $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_1$ an, so erhalten wir also die Gleichung

$$(\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) - 1) + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{p}_1 \quad ,$$

und nach Lemma 3.1.3 ist $\dim A/\mathfrak{p}_1$ gleich $\dim A - 1$; damit ist die Behauptung gezeigt. □

3.2 Glatte Schemata über regulären Basen

Nach Definition 1.2.17 heißt ein lokal noethersches Schema regulär, falls die Halme seiner Strukturgarbe regulär sind; Regularität ist also, anders als Glattheit, eine absolute Eigenschaft. Wir wollen zeigen, daß diese sich unter glatten Morphismen $X \to S$ von der Basis S nach X ausdehnt; eine analoge Aussage für vollständige Durchschnitte und vollständige Durchschnittsringe haben wir in Satz 2.2.4 bewiesen. Zunächst benötigen wir die Tatsache, daß étale Morphismen in der noetherschen Situation die Krull-Dimension der Halme erhalten:

3.2.1 Lemma. *Sei S ein lokal noethersches Schema, sei X ein étales S-Schema, sei $x \in X$ ein Punkt, und sei s das Bild von x in S. Dann stimmt $\dim \mathcal{O}_{X,x}$ mit $\dim \mathcal{O}_{S,s}$ überein.*

Beweis. Da X über S unverzweigt ist, wird das maximale Ideal $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ von dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_s \subset \mathcal{O}_{S,s}$ erzeugt; folglich ist der Quotient $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{X,x}$ ein Körper. Da X über S flach ist, besteht nach Lemma 1.2.18 die Gleichung

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim \mathcal{O}_{S,s} + \dim \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{X,x};$$

somit folgt $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim \mathcal{O}_{S,s}$ wie behauptet. □

3.2.2 Satz. *Sei S ein lokal noethersches Schema, sei X ein glattes S-Schema, sei $x \in X$ ein Punkt, und sei s das Bild von x in S. Ist $\mathcal{O}_{S,s}$ regulär, so auch $\mathcal{O}_{X,x}$.*

Beweis. Sei $f : X \to S$ der Strukturmorphismus von X. Basiswechsel mit dem kanonischen Morphismus $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{S,s} \to S$ reduziert auf den Fall, daß die Basis S das Spektrum eines regulären lokalen noetherschen Rings A ist. Sei n die relative Dimension von X bei x; nach [BLR] 2.2/11 läßt sich X derart zu einer affinen offenen Umgebung von x verkleinern, daß f in der Form $f : X \xrightarrow{g} \mathbb{A}^n_S \to S$ faktorisiert, wo g étale ist und $\mathbb{A}^n_S \to S$ die kanonische Projektion bezeichnet. Als étaler Morphismus ist g unverzweigt; folglich ist das maximale Ideal $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ von dem Bild des maximalen Ideals $\mathfrak{m}_{g(x)} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S,g(x)}$ unter dem durch g induzierten lokalen Homomorphismus $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S,g(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ erzeugt. Nach Korollar 1.2.24 ist der Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S,g(x)}$ regulär, das Ideal $\mathfrak{m}_{g(y)}$ also von $\dim \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S,g(x)}$ Elementen erzeugt. Nach Lemma 3.2.1 ist $\dim \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S,g(x)}$ gleich $\dim \mathcal{O}_{X,x}$; folglich ist $\mathfrak{m}_x$ von $\dim \mathcal{O}_{X,x}$ Elementen erzeugt und somit regulär, wie behauptet. □

3.3 Glatte Schemata über Körpern

Sei X ein Schema über einem Körper k, und sei $x \in X$ ein Punkt. Wir betrachten zunächst die Garbe $\Omega^1_{X/k}$ der relativen Differentialformen von X über k und zeigen, daß sich $\Omega^1_{X/k,x} \otimes k(x)$ mit dem Kotangentialraum von X bei x identifiziert, sofern die Restklassenkörpererweiterung $k(x)/k$ trivial ist:

3.3.1 Lemma. *Sei R ein Ring, sei A eine R-Algebra, und sei $\alpha : A \to R$ ein R-Homomorphismus mit Kern I. Dann ist der kanonische R-Homomorphismus*

$$\Phi : I/I^2 \to \Omega^1_{A/R} \otimes_A R \quad , \quad x \mapsto dx \otimes 1$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei N ein R-Modul, versehen mit der durch α gegebenen A-Modulstruktur, und sei

$$\psi : \mathrm{Der}_R(A, N) \to \mathrm{Hom}_R(I/I^2, N)$$

der in N funktorielle Homomorphismus, welcher einer R-Derivation $D : A \to N$ den durch die Restriktion $D|_I$ induzierten Homomorphismus zuordnet; ψ ist wohldefiniert, da die Multiplikation mit Elementen aus I auf N trivial ist. Da die R-lineare Abbildung α einen Schnitt besitzt, induziert sie einen Isomorphismus $A \cong R \oplus I$ von R-Moduln. Sei nun

$$\varphi : \mathrm{Hom}_R(I/I^2, N) \to \mathrm{Der}_R(A, N) \quad ,$$

die Abbildung, welche einem R-Homomorphismus $\gamma : I/I^2 \to N$ die Derivation $\varphi(\gamma) : R \oplus I \to N$, $r + i \mapsto \gamma(i \bmod I^2)$ zuordnet. Offenbar ist φ zu ψ invers. Unter der universellen Derivation $A \to \Omega^1_{A/R}$ identifiziert sich der Funktor $\mathrm{Der}_R(A, \cdot)$ mit $\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/R}, \cdot) = \mathrm{Hom}_R(\Omega^1_{A/R} \otimes_A R, \cdot)$. Somit stimmt $\mathrm{Hom}_R(I/I^2, \cdot)$ unter dem zu Φ dualen R-Homomorphismus mit $\mathrm{Hom}_R(\Omega^1_{A/R} \otimes_A R, \cdot)$ überein; die Behauptung folgt nun durch Anwendung des Lemmas von Yoneda. □

3.3.2 Korollar. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, welcher einen Körper k enthält, derart daß die Projektion $A \to A/\mathfrak{m}$ einen Isomorphismus $k \cong A/\mathfrak{m}$ induziert. Dann ist der kanonische Homomorphismus $\delta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega^1_{A/k} \otimes_A k$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Dies ist die Aussage von Lemma 3.3.1, wo wir $R := k$ setzen die kanonische Projektion $\alpha : A/ \to A/\mathfrak{m}$ betrachten. □

Um zu beweisen, daß der relative Differentialmodul eines geometrisch regulären Schemas von endlichem Typ über einem Körper lokal frei ist, benötigen wir das folgende Kriterium:

3.3.3 Lemma. *Sei A ein integrer noetherscher Ring mit Quotientenkörper K, und sei M ein A-Modul. Ist $r := \dim_K(M \otimes_A K)$ endlich und ist M über A durch r Elemente erzeugt, so ist M frei vom Rang r.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein surjektiver Homomorphismus

$$\varphi : A^r \to M \quad ;$$

sei $R := \ker \varphi$. Da K über A flach ist, liefert Anwendung des Funktors $\cdot \otimes_A K$ eine exakte Sequenz

$$0 \to R \otimes_A K \to K^r \to M \otimes_A K \to 0 \quad .$$

Die Gleichung $\dim_K(M \otimes_A K) = r$ zeigt somit, daß $R \otimes_A K$ trivial ist. Da A keine Nullteiler besitzt, verschwindet die A-Torsion von $R \subset A^r$, so daß der kanonische Homomorphismus $R \to R \otimes_A K = 0$ injektiv und R folglich trivial ist. Somit ist φ ein Isomorphismus, wie gewünscht. □

Wir kommen nun zu der angekündigten Charakterisierung glatter Schemata über Körpern:

3.3.4 Satz. *Sei k ein Körper, sei X ein k-Schema von lokal endlichem Typ, und sei $x \in X$ ein Punkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(*i*) *X ist in x glatt über k.*

(*ii*) *$\Omega^1_{X/k,x}$ ist über $\mathcal{O}_{X,x}$ frei vom Rang $\dim_x X$.*

(*iii*) *Es existieren eine offene Umgebung U von x und ein algebraischer perfekter Erweiterungskörper k' von k, derart daß $U \otimes_k k'$ regulär ist.*

(*iv*) *Es existiert eine offene Umgebung U von x, derart daß $U \otimes_k k'$ für alle Erweiterungskörper k' von k regulär ist.*

Beweis. Da Glattheit unter Basiswechsel stabil ist, folgt die Implikation $(i) \Rightarrow (iv)$ unmittelbar aus Satz 3.2.2; der Schritt von (iv) nach (iii) ist trivial. Wir wollen die Implikation $(iii) \Rightarrow (ii)$ nachweisen; sei also Bedingung (iii) erfüllt. Wir dürfen das Schema U als affin voraussetzen, $U = \operatorname{Spec} A$. Nach Satz 1.2.3 sind die lokalen Ringe des regulären Schemas $U' := U \otimes_k k'$ integer; da k'/k treuflach ist, gilt selbiges für die lokalen Ringe von U. Indem wir U verkleinern, dürfen wir also U als integer annehmen; nach Lemma 3.1.1 ist dann $\dim U$ gleich $\dim_x U$. Sei η der generische Punkt von U, und sei U'' eine Zusammenhangskomponente von U', deren generischer Punkt η' über η liegt. Bezeichnen $A' := A \otimes_k k'$ den Ring globaler Funktionen auf U' und A'' den Ring globaler Funktionen auf U'', so ist der gegebene Homomorphismus $A \to A''$ injektiv, da der korrespondierende Morphismus integrer Schemata dominant ist. Da k' über k als algebraisch vorausgesetzt wurde, ist A' über A ganz; ferner identifiziert sich A'' mit der Lokalisierung von A' nach einem idempotenten Element $e \in A'$, und e^{-1} genügt aufgrund der Relation $e^{-2} - e^{-1} = 0$ der ganzen Gleichung $T^2 - T \in A'[T]$. Somit ist $A \to A''$ ein ganzer Monomorphismus. Nach dem Lying-Over-Theorem ist folglich $U'' \to U$ surjektiv und damit treuflach; insbesondere existiert ein Punkt $x' \in U''$ über $x \in U$. Nach dem Going-Up-Theorem ist $\dim U$ gleich $\dim U''$; mit Lemma 3.1.1 folgt somit $\dim_x U = \dim_{x'} U'' = \dim_{x'} U'$. Ein Modul über einem Ring ist genau dann lokal frei von endlichem Rang, wenn er flach von endlicher Präsentation ist; folglich ist $\Omega^1_{U'/k'} = \Omega^1_{U/k} \otimes_k k'$ genau dann lokal frei, wenn dies für $\Omega^1_{U/k}$ der Fall ist, denn k'/k ist treuflach. Sind die betrachteten Moduln lokal frei, so besitzen sie notwendig bei x beziehungsweise x' denselben Rang. Somit genügt es, für perfektes $k = k'$ und reguläres U zu zeigen, daß $\Omega^1_{U/k}$ lokal frei ist und bei x den Rang $d := \dim_x U$ besitzt. Sei also k perfekt, sei U regulär, sei $y \in U$ ein abgeschlossener Punkt, und sei $\mathfrak{m}_y \subset A$ das zu y korrespondierende maximale Ideal. Der Ring A ist über k als Algebra endlich erzeugt; folglich ist der

Restklassenkörper $k(y) = A/\mathfrak{m}_y$ über k endlich und somit separabel algebraisch. Insbesondere ist $\Omega^1_{k(y)/k}$ trivial, und wir erhalten eine kanonische exakte Sequenz

$$\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \Omega^1_{U/k,y} \otimes_{A_y} k(y) \to 0 \quad .$$

Da A_y regulär ist, wird das Ideal $\mathfrak{m}_y A_y$ von $d' := \dim A_y$ Elementen erzeugt. Folglich ist mit dem $k(y)$-Vektorraum $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \cong \mathfrak{m}_y A_y/(\mathfrak{m}_y A_y)^2$ nach Nakayamas Lemma auch $\Omega^1_{U/k,y}$ von d' Elementen erzeugt. Sei K der Quotientenkörper von A_y; da die Bildung des Differentialmoduls mit Lokalisierung kommutiert, identifiziert sich $\Omega^1_{U/k,y} \otimes_{A_y} K$ kanonisch mit $\Omega^1_{K/k}$. Da k perfekt ist, besitzt K/k eine separierende Transzendenzbasis; nach Lemma 3.1.1 ist $\mathrm{trdeg}_k K$ gleich d, so daß $\Omega^1_{K/k}$ über K von Dimension d ist. Aufgrund der Ungleichung $d' = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}_y) \leq \dim A = d$ ist $\Omega^1_{U/k,y}$ durch d Elemente erzeugt und somit nach Lemma 3.3.3 frei vom Rang d. Da der A-Modul $\Omega^1_{U/k}$ nun in allen abgeschlossenen Punkten von U frei vom Rang d ist, besitzt er in allen Punkten von U diese Eigenschaft, wie gewünscht.

Für die Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$ ist X als abgeschlossenes Unterschema eines offenen Unterschemas $V \subset \mathbb{A}^n_k$ annehmbar; sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_V$ die zu der Immersion $j : X \hookrightarrow V$ korrespondierende Idealgarbe, und sei $d := \dim_x X$. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)_x \to (j^*\Omega^1_{\mathbb{A}^n_k/k})_x \xrightarrow{\varphi_x} \Omega^1_{X/k,x} \to 0 \quad .$$

Da $\Omega^1_{X/k,x}$ nach Annahme frei ist, spaltet die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \ker \varphi_x \to (j^*\Omega^1_{\mathbb{A}^n_k/k})_x \xrightarrow{\varphi_x} \Omega^1_{X/k,x} \to 0 \quad ;$$

folglich existieren bei x lokale Schnitte $g_{d+1}, \ldots, g_n$ von $\mathcal{I}$, derart daß die Pullbacks der Differentiale $dg_{d+1}, \ldots, dg_n$ in $(j^*\Omega^1_{\mathbb{A}^n_k/k})_x$ linear unabhängig sind, einen freien direkten Faktor F von $(j^*\Omega^1_{\mathbb{A}^n_k/k})_x$ aufspannen und in $\Omega^1_{X/k,x}$ verschwinden. Insbesondere sind die $dg_i(x)$ in $\Omega^1_{\mathbb{A}^n_k/k,x} \otimes k(x)$ linear unabhängig. Indem wir V und X verkleinern, dürfen wir annehmen, daß die $g_{d+1}, \ldots, g_n$ auf V definiert sind. Sei $X' \subset V$ das von den g_i ausgeschnittene abgeschlossene Unterschema; nach dem Jacobi-Kriterium ([BLR] 2.2/7 (d)$\Rightarrow$(a)) ist X' über k glatt von relativer Dimension d, und nach Konstruktion ist $X \hookrightarrow X'$ eine abgeschlossene Immersion von Schemata, welche bei x gleiche Dimension besitzen; es ist zu zeigen, daß X und X' bei x übereinstimmen. Wir dürfen V und damit X und X' als affin annehmen, derart daß $\Omega^1_{X/k}$ frei vom Rang d ist und $\dim X$ gleich d ist; wir schreiben $X = \mathrm{Spec}\ A$, $X' = \mathrm{Spec}\ A'$. Sei y ein abgeschlossener Punkt von X, zu welchem x spezialisiert, und sei $\mathfrak{m}_y \subset A$ das korrespondierende maximale Ideal. Nach der bereits bewiesenen Implikation $(i) \Rightarrow (iv)$ ist $\mathcal{O}_{X',y}$ regulär und somit nach Satz 1.2.3 integer. Wir betrachten den surjektiven Homomorphismus $\varphi : \mathcal{O}_{X',y} \to \mathcal{O}_{X,y}$. Jede echt aufsteigende Kette von Primidealen in $\mathcal{O}_{X,y}$ induziert via φ eine echt aufsteigende Kette von Primidealen in $\mathcal{O}_{X',y}$. Ist φ nicht injektiv, so läßt sich jede solche Kette durch das Nullideal $(0) \subset \mathcal{O}_{X',y}$ echt verlängern, und $\dim \mathcal{O}_{X',y}$ ist echt größer als $\dim \mathcal{O}_{X,y}$. Es genügt also zu zeigen, daß $\dim \mathcal{O}_{X',y} \leq \dim \mathcal{O}_{X,y}$ gilt, denn dann ist φ ein Isomorphismus, und das endlich erzeugte Ideal, welches X nach X' einbettet, verschwindet in einer Umgebung von y, welche notwendig x enthält, so daß X lokal bei x mit X' übereinstimmt. Da X' über k glatt von relativer Dimension d ist, besteht nach dem bislang bewiesenen die Gleichung $\dim_y X' = d$, und wir erhalten $\dim \mathcal{O}_{X',y} \leq d$, so daß es genügt, $\dim \mathcal{O}_{X,y} \geq d$ zu zeigen. Indem wir ohne Einschränkung durch das Nilradikal von $\mathcal{O}_X$ dividieren, dürfen wir X als reduziert ansehen. Es genügt einzusehen, daß X in einer offenen affinen Umgebung U von y integer ist, denn da y in X abgeschlossen ist, stimmt dann nach Satz 3.1.4 $\dim \mathcal{O}_{X,y}$ mit $\dim U$ überein, und nach Lemma 3.1.1 ist $\dim U$ gleich $\dim_x U = \dim_x X = d$.

Wir fixieren eine beliebige zusammenhängende Umgebung $U = \text{Spec } B$ von y. Sei k_a ein algebraischer Abschluß von k; wir setzen $U_a := \text{Spec } B \otimes_k k_a$. Mit k_a/k ist die Projektion $U_a \to U$ treuflach. Der flache Monomorphsimus $B \to B \otimes_k k_a$ ist ganz; nach dem Going-Up-Theorem ist folglich $\dim U$ gleich $\dim U_a$. Sei $z \in U$ ein abgeschlossener Punkt, und sei $z_a \in U_a$ ein notwendig abgeschlossener Punkt über z. Da mit U über k auch U_a über k_a von endlichem Typ ist, stimmt der Restklassenkörper von U_a bei z_a mit k_a überein; der lokale Ring $\mathcal{O}_{U_a,z_a}$ enthält folglich einen Körper k_a, welcher sich kanonisch mit seinem Restklassenkörper identifiziert. Nach Korollar 3.3.2 existiert somit ein kanonischer Isomorphismus $\Omega^1_{U_a/k_a} \otimes k(z_a) \cong \mathfrak{m}_{z_a}/\mathfrak{m}^2_{z_a}$, wo $\mathfrak{m}_{z_a} \subset B \otimes_k k_a$ das zu z_a korrespondierende maximale Ideal bezeichnet. Da sich $\Omega^1_{U_a/k_a}$ kanonisch mit $\Omega^1_{U/k} \otimes_k k_a$ identifiziert, ist auch $\Omega^1_{U_a/k_a}$ frei vom Rang d; nach Nakayamas Lemma ist somit $\mathfrak{m}_{z_a}$ von d Elementen erzeugt. Ist nun $\dim \mathcal{O}_{U_a,z_a}$ gleich d, so ist $\mathcal{O}_{U_a,z_a}$ folglich regulär und somit nach Satz 1.2.3 integer; dann ist auch $\mathcal{O}_{U,z}$ integer, denn $U_a \to U$ ist treuflach. Angenommen, U ist nicht integer; als reduziertes zusammenhängendes Schema ist U dann nicht irreduzibel. Sei U' eine irreduzible Komponente von U mit $\dim U = \dim U'$; da U zusammenhängt, existiert eine weitere irreduzible Komponente U'' von U, welche mit U' nichtleeren Schnitt besitzt. Wir wählen den betrachteten abgeschlossenen Punkt z in $U' \cap U''$. Sei B' der Ring der globalen Funktionen auf U', und sei $\mathfrak{m}'_z \subset B'$ das zu z korrespondierende maximale Ideal; nach Satz 3.1.4 ist $\text{ht}(\mathfrak{m}_z)$ durch $\dim B' = \dim B = d$ gegeben, denn B' ist integer. Sei z_a ein beliebiger Punkt über z; nach dem Going-Up-Theorem ist $\text{ht}(\mathfrak{m}_{z_a})$ gleich $\text{ht}(\mathfrak{m}_z) = d$ und also $\dim \mathcal{O}_{U_a,z_a}$ gleich d. Nach obiger Diskussion ist $\mathcal{O}_{U,z}$ somit integer, im Widerspruch zur der Tatsache, daß z über zwei minimalen Primidealen von B liegt. Die Annahme, daß U nicht integer sei, ist also unter den gegebenen Voraussetzungen nicht haltbar, wie gewünscht. □

Bemerkung. Nach dem Faserkriterium für Glattheit ([BLR] 2.4/8) ist ein lokal endlich präsentiertes Schema genau dann glatt, wenn es flach ist und glatte Fasern besitzt; kombinieren wir dieses Resultat mit Satz 3.3.4, so erhalten wir eine umfassende Charakterisierung glatter Schemata und sehen insbesondere, daß die ersten der beiden zu Beginn von Kapitel 3 diskutierten Zugänge zu Glattheit äquivalent sind. Der Beweis des Faserkriteriums basiert auf dem Flachheitskriterium von Bourbaki (2.1.1) und läßt sich ohne Mühe in [BLR] nachlesen.

3.3.5 Korollar. *Sei $f : X \to S$ ein glatter Morphismus; dann ist f ein Durchschnitt.*

Beweis. Als glatter Morphismus ist f flach und von endlicher Präsentation; nach Satz 3.3.4 sind die Fasern von f geometrisch regulär, insbesondere also regulär. Da es sich bei regulären lokalen noetherschen Ringen nach Bemerkung 1.4.2 um vollständige Durchschnittsringe handelt, ist die Behauptung klar. □

Abschließend wollen wir aus Satz 3.3.4 folgern, daß der glatte Ort eines geometrisch reduzierten Schemas von lokal endlichem Typ über einem Körper dicht liegt. Diese Tatsache zeigt in Verbindung mit einem elementaren Translationsargument, daß geometrisch reduzierte Gruppenschemata über Körpern glatt sind. Wir werden uns in Abschnitt 4.2 näher mit Glattheit von Gruppenschemata über Körpern befassen.

3.3.6 Satz. *Sei k ein Körper, und sei X ein k-Schema von lokal endlichem Typ. Ist X geometrisch reduziert, so ist der glatte Ort von X offen und dicht.*

Beweis. Der glatte Ort ist stets offen; es genügt einzusehen, daß er jeden generischen Punkt von X enthält. Sei η ein generischer Punkt von X, und sei $U = \text{Spec } A$ eine offene affine Umgebung von η; dann korrespondiert η zu einem minimalen Primideal $\mathfrak{p}$ von A. Mit A ist auch der lokale artinsche Ring $A_\mathfrak{p}$ reduziert und somit ein Körper;

folglich ist $k(\eta) = \mathrm{Frac}\,(A/\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}$ eine Lokalisierung von A. Ist k' ein beliebiger Erweiterungskörper von k, so ist $k(\eta) \otimes_k k' = A_\mathfrak{p} \otimes_k k'$ also eine Lokalisierung von $A \otimes_k k'$ und folglich reduziert, da A nach Voraussetzung geometrisch reduziert ist. Die Erweiterung $k(\eta)/k$ ist somit separabel; da sie überdies endlich erzeugt ist, besitzt sie eine endliche separierende Transzendenzbasis der Länge $d := \mathrm{trdeg}_k k(\eta)$. Der Halm $\Omega^1_{X/k,\eta} = \Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k} = \Omega^1_{k(\eta)/k}$ ist folglich über $A_\mathfrak{p} = k(\eta)$ frei vom Rang d. Da der integre Ort eines noetherschen Schemas offen ist, dürfen wir U als integer annehmen, und mit Lemma 3.1.1 folgt $\dim_\eta U = \dim U = d$. Somit ist $\Omega^1_{X/k}$ bei η frei vom Rang $\dim_\eta X$; nach Satz 3.3.4 ist folglich X bei η über k glatt, wie behauptet. $\square$

4. Gruppenschemata

Wir wollen die Theorie der vollständigen Durchschnitte und insbesondere die Resultate aus Abschnitt 2.3 dazu verwenden, affine Gruppenschemata über diskreten Bewertungsringen zu approximieren. Hierzu untersuchen wir die Struktur endlicher zusammenhängender affiner Gruppenschemata über perfekten Körpern und zeigen mit Hilfe eines Descentarguments, daß jedes affine flache Gruppenschemata von lokal endlichem Typ über einer lokal noetherschen Basis ein vollständiger Durchschnitt ist. Nach [CY] 6.1 besitzt auch jedes kommutative flache Gruppenschema von lokal endlichem Typ über einer lokal noetherschen Basis die Eigenschaft eines vollständigen Durchschnitts; der Beweis dieser Tatsache basiert auf demselben Descentargument, erfordert jedoch Kenntnisse über die Struktur allgemeiner kommutativer Gruppenschemata endlichen Typs über algebraisch abgeschlossenen Körpern. Wir werden die Aussage für kommutative Gruppenschemata nicht beweisen und im folgenden auch nicht benötigen.

4.1 Allgemeines zu Gruppenschemata

In diesem Abschnitt stellen wir einige allgemeine Aussagen über Gruppenschemata bereit, welche wir in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels benötigen werden. Insbesondere diskutieren wir Translationen, Descentargumente und Eigenschaften des schematischen Bilds von Homomorphismen.

Wir werden im folgenden stets von folgender elementarer Tatsache Gebrauch machen:

4.1.1 Bemerkung. *Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper und ist G über k von lokal endlichem Typ ist, so besitzen die lokal abgeschlossenen Punkte von G über k triviale Restklassenkörper, so daß sie k-wertige Punkte von G und somit Translationsisomorphismen von G über k induzieren.*

Zunächst zeigen wir wie angekündigt, daß gemetrisch reduzierte Gruppenschemata endlichen Typs über Körpern bereits glatt sind:

4.1.2 Lemma. *Sei k ein Körper, und sei G ein geometrisch reduziertes k-Gruppenschema von endlichem Typ. Dann ist G über k glatt.*

Beweis. Sei k_a ein algebraischer Abschluß von k. Nach Voraussetzung ist $G_a := G \otimes_k k_a$ geometrisch reduziert; nach Satz 3.3.6 ist der glatte Ort U_a von G_a folglich nicht leer. Seien $x \in G_a$, $y \in U_a$ lokal abgeschlossene Punkte. Unter Linkstranslation mit yx^{-1} wird x auf y abgebildet; folglich ist G_a bei x über k_a glatt, und wir sehen, daß U mit G_a übereinstimmt. Da sich Glattheit nach treuflachem Basiswechsel k_a/k verifizieren läßt, ist somit G über k glatt, wie behauptet. $\square$

Zahlreiche Eigenschaften relativer Schemata übertragen sich von dem Strukturmorphismus eines Gruppenschemas auf seine Multiplikation:

4.1.3 Lemma. *Sei P eine Eigenschaft relativer Schemata, welche für alle Isomorphismen erfüllt ist und unter Basiswechsel wie auch Komposition stabil ist. Sei S ein Schema, und sei G ein Gruppenschema über S. Besitzt der Strukturmorphismus $G \to S$ die Eigenschaft P, so auch die Multiplikation $m : G \times_k G \to G$.*

Beweis. Sei $\sigma : G \times_S G \to G \times_S G$ der durch $(x, y) \mapsto (x, xy)$ gegebene Isomorphismus, und sei $p_2 : G \times_S G \to G$ die Projektion auf den zweiten Faktor; dann faktorisiert m in der Form $m = p_2 \circ \sigma$. Mit dem Strukturmorphismus $G \to S$ besitzt auch p_2 die Eigenschaft P; da P für Isomorphismen erfüllt und unter Komposition stabil ist, folgt somit die Behauptung. □

Insbesondere ist die Multiplikation eines Gruppenschemas über einem Körper ein flacher Morphismus. Wir können nun zeigen, daß das Produkt zweier offener Unterschemata eines integren Gruppenschemas von lokal endlichem Typ über einem Körper bereits das gesamte Gruppenschema ausschöpft:

4.1.4 Lemma. *Sei k ein Körper, und sei G ein integres k-Gruppenschema von lokal endlichem Typ. Sind U, V nichtleere offene Unterschemata von G, so induziert die Multiplikation von G einen surjektiven Morphismus $m|_{U \times_k V} : U \times_k V \to G$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $m|_{U \times_k V}$ treuflach ist; dies kann nach treuflachem Basiswechsel erfolgen, so daß wir k als algebraisch abgeschlossen ansehen dürfen. Nach Lemma 4.1.3 ist $m|_{U \times_k V}$ flach; es bleibt also die Surjektivität auf den lokal abgeschlossenen Punkten zu verifizieren. Die Schemata U, V liegen in G dicht, ebenso wie ihre Inversen und ihre Translate. Ist $x \in G$ ein beliebiger lokal abgeschlossener Punkt, so fixieren wir einen lokal abgeschlossenen Punkt $v^{-1} \in V^{-1} \cap Ux^{-1}$; dann existiert ein lokal abgeschlossener Punkt $u \in U$ mit $v^{-1} = ux^{-1}$, also mit $x = uv$. Ist $w \in U \times_k V$ ein Punkt über u und v, so gilt $x = m(w)$, wie gewünscht. □

4.1.5 Lemma. *Sei k ein Körper, und sei G ein geometrisch reduziertes k-Gruppenschema von lokal endlichem Typ. Dann ist die Zusammenhangskomponente G^0 der Eins ein integeres Untergruppenschema von G.*

Beweis. Als geometrisch reduziertes k-Gruppenschema endlichen Typs ist G nach Lemma 4.1.2 über k glatt. Nach Satz 3.3.4 ist G somit regulär, nach Satz 1.2.3 also lokal integer, so daß sich die Zusammenhangskomponenten von G mit den irreduziblen Komponenten von G identifizieren; insbesondere ist G^0 integer. Es bleibt zu zeigen, daß sich die Gruppenstruktur auf G zu einer Gruppenstruktur auf G^0 einschränkt. Dies kann nach treuflachem Basiswechsel erfolgen; sei also ohne Einschränkung k algebraisch abgeschlossen. Da stetige Abbildungen Spezialisierungen respektieren und da G^0 offen ist, genügt es zu zeigen, daß Multiplikation m und Inversion i die lokal abgeschlossenen Punkte von $G^0 \times_k G^0$ beziehungsweise G^0 nach G^0 abbilden. Ist x ein lokal abgeschlossener Punkt in $G^0 \times_k G^0$, so induziert dieser über die Projektionen $p_1, p_2 : G^0 \times_k G^0 \to G^0$ ein Paar (x_1, x_2) von k-wertigen Punkten von G^0, derart daß $m(x)$ mit $T_{x_1}(x_2)$ übereinstimmt, wo T_{x_1} die Translation um x_1 bezeichnet. Da G^0 die Eins von G enthält, liegt x_1 in $T_{x_1}(G^0)$. Als stetiges Bild einer irreduziblen Menge ist $T_{x_1}(G^0)$ in G irreduzibel; folglich ist $T_{x_1}(G^0)$ notwendig in G^0 enthalten, und insbesondere liegt hiermit $m(x)$ in G^0, wie gewünscht. Für die Inversion schließen wir analog. □

Sei P eine Eigenschaft relativer Schemata, welche fppf-lokal auf der Basis verifiziert werden kann. Ist G ein treuflaches quasikompaktes Gruppenschema und ist

$\psi : G \to H$ ein treuflacher quasikompakter Homomorphismus, so besitzt ψ genau dann die Eigenschaft P, wenn $\ker \psi$ sie über der Basis besitzt. Zum Beweis dieses Descentarguments benötigen wir ein gruppentheoretisches Resultat:

4.1.6 Lemma. *Sei S ein Schema, seien $\varphi : F \to G$, $\psi : G \to H$ Homomorphismen von S-Gruppenschemata, und sei $N := \ker \psi$ Dann ist der durch die Zuordnung $(g, f) \mapsto (g^{-1} \cdot \varphi(f), f)$ gegebene F-Morphismus*

$$\alpha : G \times_H F \to N \times_S F$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Das S-Schema N ist durch das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "\psi^* e"] \arrow[d] & G \arrow[d, "\psi"] \\ S \arrow[r, hook, "e"] & H \end{tikzcd}$$

erklärt, wo e den Einsschnitt von H bezeichnet. Sei T ein beliebiges S-Schema; die T-wertigen Punkte von $G \times_H F$ entsprechen kanonisch Paaren (g, f) T-wertiger Punkte von G beziehungsweise F, für welche $\psi \circ g$ mit $\psi \circ \varphi \circ f$ übereinstimmt. Ist also (g, f) ein T-wertiger Punkt von $G \times_H F$, so ist $\psi(g^{-1} \cdot \varphi(f)) = \psi(g)^{-1} \cdot \psi(\varphi(f))$ trivial, und folglich faktorisiert $g^{-1} \cdot \varphi(f) : T \to G$ über $\psi^* e : N \hookrightarrow G$. Somit erklärt die Zuordnung $(g, f) \mapsto (g^{-1} \cdot \varphi(f), f)$ einen Morphismus $\alpha : G \times_H F \to N \times_S F$ von S-Schemata; offenbar ist α ein F-Morphismus. Die Zuordnung $(n, f) \mapsto (\varphi(f) \cdot n^{-1}, f)$ induziert einen F-Morphismus $\beta : N \times_S F \to G \times_H F$, denn $\psi(\varphi(f) \cdot n^{-1})$ stimmt mit $\psi(\varphi(f)) \cdot e^{-1} = \psi(\varphi(f))$ überein; offenbar ist β zu α invers. □

4.1.7 Korollar. *Sei $\psi : G \to H$ ein Homomorphismus von S-Gruppenschemata, und sei $N := \ker \psi$; dann erklärt die Zuordnung $(g_1, g_2) \mapsto (g_1^{-1} \cdot g_2, g_2)$ einen G-Isomorphismus*

$$G \times_H G \xrightarrow{\sim} N \times_S G \quad .$$

Beweis. Dies ist die Aussage von Lemma 4.1.6, wo wir $F = G$ und $\varphi = \mathrm{id}$ wählen. □

4.1.8 Lemma. *Sei S ein Schema, sei G ein treuflaches quasikompaktes S-Gruppenschema, sei H ein weiteres Gruppenschema über S, und sei $\psi : G \to H$ ein treuflacher quasikompakter S-Homomorphismus; wir setzen $N := \ker \psi$. Sei P eine Eigenschaft relativer Schemata, welche fppf-lokal auf der Basis zu verifizieren ist. Genau dann besitzt ψ die Eigenschaft P, wenn dies für den Strukturmorphismus $N \to S$ von N der Fall ist.*

Beweis. Da der Morphismus ψ treuflach quasikompakt ist, besitzt er genau dann die Eigenschaft P, wenn $p_2 : G \times_H G \to G$ sie besitzt, nach Korollar 4.1.7 also genau dann, wenn sie für $p_2 : N \times_S G \to G$ gilt. Da $G \to S$ treuflach quasikompakt ist, besitzt $p_2 : N \times_S G \to G$ genau dann die Eigenschaft P, wenn dies für $N \to S$ der Fall ist. □

Im folgenden untersuchen wir die Frage, wann sich Gruppenstrukturen auf das schematische Bild von Homomorphismen einschränken. In dem folgenden allgemeinen Satz ist insbesondere die Situation $S = \operatorname{Spec} R$, $S' = \operatorname{Spec} K$ von Interesse, wo R einen diskreten Bewertungsring mit Quotientenkörper K bezeichnet.

4.1.9 Lemma. *Sei S ein Schema, sei $S' \subset S$ ein schematisch dichtes offenes Unterschema, sei G ein flaches S'-Gruppenschema, sei H ein S-Gruppenschema, und sei $\psi : G \to H$ ein S'-Homomorphismus, derart daß das schematische Bild $\overline{G}$ von ψ über S flach ist. Dann beschränkt sich die S-Gruppenstruktur von H zu einer S-Gruppenstruktur auf $\overline{G}$.*

Beweis. Es bezeichne j die kanonische abgeschlossene Immersion von $\overline{G}$ nach H. Das schematische Urbild von $\overline{G}$ unter dem Einsschnitt e_H von H enthält S' und stimmt, da S' in S schematisch dicht liegt, folglich mit S überein; somit faktorisiert e_H über $\overline{G}$. Seien m_G, m_H die Multiplikationsmorphismen von G beziehungsweise H; wir betrachten das kanonische kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& G \times_{S'} G \arrow[r, "m_G"] \arrow[dl, "\psi' \times \psi'"'] \arrow[dd, "\psi \times \psi"] & G \arrow[dr, "\psi'"] \arrow[dd, "\psi"'] & \\
\overline{G} \times_S \overline{G} \arrow[dr, "j \times j"'] & & & \overline{G} \arrow[dl, hook, "j"] \\
& H \times_S H \arrow[r, "m_H"] & H &
\end{tikzcd} ,$$

wo ψ' den eindeutig bestimmten Morphismus bezeichnet, für welchen das rechte Dreieck kommutiert. Sei V das schematische Urbild von $\overline{G}$ unter $m_H \circ (j \times j)$; dann ist V ein abgeschlossenes Unterschema von $\overline{G} \times_S \overline{G}$. Da G über S' liegt, stimmt $G \times_S S'$ kanonisch mit G überein. Wir schreiben s für den Strukturmorphismus von G. Da ψ' schematisch dominant ist, besitzt $\psi' \times \mathrm{id}_{S'} : G \times_S S' \to \overline{G} \times_S S'$ dieselbe Eigenschaft; somit ist der kanonische Morphismus $(\psi', s) : G \to \overline{G} \times_S S'$ schematisch dominant. Aufgrund der Flachheit von G über S' ist auch der induzierte Morphismus $\mathrm{id}_G \times (s, \psi') : G \times_{S'} G \to G \times_{S'} (S' \times_S \overline{G}) = G \times_S \overline{G}$ schematisch dominant. Da ψ' schematisch dominant und $\overline{G}$ über S flach ist, erkennen wir den Morphismus $\psi' \times \mathrm{id}_{\overline{G}} : G \times_S \overline{G} \to \overline{G} \times_S \overline{G}$ als schematisch dominant; somit ist auch die Komposition $\psi' \times \psi' = (\psi' \times \mathrm{id}_{\overline{G}}) \circ (\mathrm{id}_G \times (s, \psi'))$ schematisch dominant. Wäre nun V ein echtes abgeschlossenes Unterschema von $\overline{G} \times_S \overline{G}$, so wäre das schematische Urbild W von V unter $\psi' \times \psi'$ ein echtes abgeschlossenes Unterschema von $G \times_S G$. Aufgrund der Kommutativität des Diagramms identifiziert sich W jedoch mit dem schematischen Urbild von $\overline{G}$ unter $\psi \circ m_H$, also mit $G \times_S G$. Somit stimmt V mit $\overline{G} \times_S \overline{G}$ überein, und es folgt, daß $m_H \circ (j \times j)$ in der Form $j \circ m_{\overline{G}}$ faktorisiert, wobei der Morphismus $m_{\overline{G}} : \overline{G} \times_S \overline{G} \to \overline{G}$ eindeutig bestimmt ist. Analog sehen wir, daß sich die Inversion auf H zu einem S-Automorphismus $i_{\overline{G}}$ von $\overline{G}$ beschränkt. Die Morphismen $e_{\overline{G}}, m_{\overline{G}}, i_{\overline{G}}$ genügen den Gruppenaxiomen, da dies für e_H, m_H, i_H der Fall ist und da j ein Monomorphismus ist. □

Schließlich zeigen wir, daß in gewissen Situationen der schematische Abschluß einer Gruppe von Punkten ein abgeschlossenes Untergruppenschema bildet:

4.1.10 Lemma. *Sei k ein Körper, sei G ein k-Gruppenschema, sei k' ein Erweiterungskörper von k, und sei E eine Untergruppe von $G(k')$; dann ist das schematische Bild $\overline{E}$ von E in G ein abgeschlossenes k-Untergruppenschema von G.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß sich die Guppenstruktur auf G nach $\overline{E}$ beschränkt; dies ist nach treuflachem Basiswechsel zu testen. Da das schematische Bild eines Morphismus mit flachem Basiswechsel verträglich ist, dürfen wir also $k = k'$ annehmen. Der Einsschnitt von G faktorisiert dann aus trivialen Gründen über $\overline{E}$. Sei m die Multiplikation auf G, und sei $V \subset G \times_k G$ das schematische Urbild von $\overline{E}$ unter m; es ist zu zeigen, daß $\overline{E} \times_k \overline{E}$ in V enthalten ist. Da es sich bei $E \subset G(k)$ um eine

Untergruppe handelt, faktorisieren die Elemente aus $E \times E$ über V; somit genügt es zu zeigen, daß $E \times E$ in $\overline{E} \times_k \overline{E}$ schematisch dicht liegt. Wir identifizieren E mit dem konstanten Gruppenschema $\coprod_{a \in E} k$; da E und $\overline{E}$ über k flach sind, erkennen wir die kanonischen Morphismen $E \times_k \overline{E} \to \overline{E} \times_k \overline{E}$, $E \times_k E \to E \times_k \overline{E}$ und somit ihre Komposition als schematisch dominant, wie gewünscht. Analog sehen wir, daß sich die Inversion auf G nach $\overline{E}$ beschränkt. □

4.2 Infinitesimale Struktur von Gruppenschemata

Die differenziellen Eigenschaften eines Gruppenschemas $p : G \to S$ lassen sich in der Nähe des Einsschnitts e von G studieren, da sich dieser durch Translationen an jeden beliebigen Ort von G transportieren läßt. Wir zeigen zunächst unter Verwendung der universellen Rechtstranslation, daß sich die Garbe $\Omega^1_{G/S}$ der relativen Differentialformen von G über S vermöge des Pullbacks p^* aus der Einschränkung $e^*\Omega^1_{G/S}$ von $\Omega^1_{G/S}$ auf den Einsschnitt rekonstruieren läßt:

4.2.1 Satz. *Sei S ein Schema, und sei G ein S-Gruppenschema mit Strukturmorphismus p und Einsschnitt e. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $\psi_r : \Omega^1_{G/S} \xrightarrow{\sim} p^*e^*\Omega^1_{G/S}$, dessen Pullback unter e mit der Identität auf $e^*\Omega^1_{G/S}$ übereinstimmt.*

Beweis. Wir schreiben m für die Multiplikation von G. Die universelle Rechtstranslation

$$\tau_u : G \times_S G \to G \times_S G \quad , \quad (x, y) \mapsto (xy, y)$$

ist ein Isomorphismus von G-Schemata, wobei wir $G \times_S G$ über die Projektion p_2 auf den zweiten Faktor als G-Schema ansehen. Sie induziert einen Isomorphismus $\tau_u^* p_1^* \Omega^1_{G/S} \xrightarrow{\sim} p_1^* \Omega^1_{G/S}$, wo $p_1 : G \times_S G \to G$ die Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet. Aufgrund der Identität $p_1 \circ \tau_u = m$ induziert τ_u somit einen Isomorphismus

$$m^*\Omega^1_{G/S} \xrightarrow{\sim} p_1^*\Omega^1_{G/S} \quad .$$

Ziehen wir diesen unter $(e \circ p, \mathrm{id}_G) : G \to G \times_S G$ nach G zurück, so erhalten wir einen Isomorphismus

$$\psi_r : \Omega^1_{G/S} \xrightarrow{\sim} p^*e^*\Omega^1_{G/S} \quad .$$

Aufgrund der Gleichungen $p_1 \circ (m \times p_2) \circ (e \circ p, \mathrm{id}_G) \circ e = e$, $p_1 \circ (e \circ p, \mathrm{id}_G) \circ e = e$ stimmt $e^*\psi_r$ mit der Identität auf $e^*\Omega^1_{G/S}$ überein, wie gewünscht. □

Bemerkung. Der zu ψ_r adjungierte Homomorphismus $e^*\Omega^1_{G/S} \to p_*\Omega^1_{G/S}$ erklärt einen Isomorphismus auf den Untermodul der rechtsinvarianten Differentiale in $p_*\Omega^1_{G/S}$; siehe hierzu [BLR] 4.2.

Ist G ein Gruppenschema über einem Körper, so identifiziert sich $e^*\Omega^1_{G/k}$ mit dem Kotangentialraum von G bei der Eins. Wir wollen zeigen, daß sich die in einer Umgebung der Eins definierten Funktionen in gewisser Weise als Polynome in den Elementen einer Basis von $e^*\Omega^1_{G/k}$ ansehen lassen:

4.2.2 Lemma. *Sei k ein Körper der Charakteristik 0, und sei G ein k-Gruppenschema mit Strukturmorphismus p und Einsschnitt e. Ist $U = \operatorname{Spec} A$ eine offene Umgebung von e, ist $I \subset A$ das zu e korrespondierende Ideal und ist $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_r$ ein System von Elementen in I, deren Klassen modulo I^2 eine Basis von I/I^2 über k bilden, so induzieren die Monome $x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r}$ mit $\sum_{i=1}^r m_i = n$ eine Basis des k-Vektorraums I^n/I^{n+1}.*

Beweis. Nach Satz 4.2.1 existiert ein Isomorphismus $\psi_r : \Omega^1_{A/k} \xrightarrow{\sim} p^*e^*\Omega^1_{A/k}$, dessen Pullback unter e mit der Identität auf $e^*\Omega^1_{A/k}$ übereinstimmt. Nach Korollar 3.3.2 ist $e^*\Omega^1_{A/k} = \Omega^1_{A/k} \otimes k(e)$ kanonisch zu $\mathfrak{m}_e/\mathfrak{m}_e^2 \cong I/I^2$ isomorph, wo $\mathfrak{m}_e$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{G,e}$ bezeichnet; ist $x \in I$ ein Element, so identifiziert sich hierbei e^*dx mit der Klasse $\overline{x}$ von x modulo I^2. Für $i = 1, \ldots, r$ sei $\overline{x}_i$ die Klasse von x_i in I/I^2, und sei $D_i : A \to A$ die k-Derivation, welche zu dem via ψ_r durch $p^*\overline{x}_j \mapsto \delta_{ij}$ gegebenen A-Homomorphismus $\Omega^1_{A/k} \to A$ korrespondiert. Das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "d"] & \Omega^1_{A/k} \arrow[r, "\psi_r"] \arrow[d, "e^*"'] & p^*e^*\Omega^1_{A/k} \arrow[r, "p^*\overline{x}_j \mapsto \delta_{ij}"] \arrow[d, "e^*"'] & A \arrow[d, "e^*"'] \\
& e^*\Omega^1_{A/k} \arrow[r, "e^*\psi_r"] & e^*\Omega^1_{A/k} \arrow[r] & k
\end{tikzcd}$$

zeigt die Kongruenz $D_i(x_j) \equiv \delta_{ij} \bmod I$, denn $e^*\psi_r$ ist die Identität; hier bezeichnet d die universelle Derivation. Sei $X = X_1, \ldots, X_r$ ein System von r Variablen, sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, und sei $P \in k[X]$ ein homogenes Polynom vom Grad n. Nach der Produktregel besteht die Gleichung $D_i(P(\boldsymbol{x})) = \sum_{j=1}^{r} (\partial P/\partial X_j)(\boldsymbol{x}) D_i(x_j)$. Jedes von Null verschiedene Polynom $\partial P/\partial X_j \in k[X]$ ist homogen vom Grad $n-1$; folglich liegt $(\partial P/\partial X_j)(\boldsymbol{x})$ in I^{n-1}. Mit $D_i(x_j) \equiv \delta_{ij} \bmod I$ folgt die Kongruenz $D_i(P(\boldsymbol{x})) \equiv (\partial P/\partial X_i)(\boldsymbol{x}) \bmod I^n$. Sei $s \geq 1$ eine natürliche Zahl. Nach der Produktregel genügt jede k-Derivation $D : A \to A$ der Inklusion $D(I^s) \subset I^{s-1}$; gilt also $y \equiv z \bmod I^s$ für Elemente $y, z \in A$, so folgt $D(y) \equiv D(z) \bmod I^{s-1}$. Induktiv erhalten wir somit für $m \geq 1$ die Kongruenz

$$D_i^m(P(\boldsymbol{x})) \equiv \left(\frac{\partial^m P}{\partial X_i^m}\right)(\boldsymbol{x}) \bmod I^{n-m+1} \quad .$$

Sei nun $M_n \subset \mathbb{N}^r$ die Menge der r-Tupel $\mathbf{m} = m_1, \ldots, m_r$ mit $m_1 + \ldots + m_r = n$; für $\mathbf{m} \in M_n$ besteht dann die Kongruenz

$$D_r^{m_r} D_{r-1}^{m_{r-1}} \cdots D_1^{m_1}(x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r}) \equiv \mathbf{m}! := m_1! m_2! \cdots m_r! \bmod I \quad ,$$

und Anwendung von $D^{\mathbf{m}} := D_r^{m_r} D_{r-1}^{m_{r-1}} \cdots D_1^{m_1}$ auf jedes andere Monom vom Grad n ergibt offenbar modulo I das Nullelement. Aufgrund der Voraussetzung char $k = 0$ ist $\mathbf{m}!$ in A invertierbar; variiert $\mathbf{m}$ in M_n, so stimmen somit die Klassen modulo I der Elemente $D^{\mathbf{m}}(P(\boldsymbol{x}))/\mathbf{m}! \in A$ mit den Koeffizienten von P überein. Angenommen, $P(\boldsymbol{x})$ liegt in I^{n+1}; aufgrund der Inklusion $D(I^s) \subset I^{s-1}$ ist dann $D^{\mathbf{m}}(P(\boldsymbol{x}))$ für alle $\mathbf{m} \in M_n$ in I enthalten, und folglich ist P das Nullpolynom. Die Monome $x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r}$ vom Totalgrad n sind in dem von ihnen erzeugten k-Vektorraum I^n/I^{n+1} also linear unabhängig, wie behauptet. □

Die Voraussetzung char $k = 0$ wurde im Beweis von Lemma 4.2.2 lediglich dazu benötigt, die Zahlen $\mathbf{m}!$ in der Strukturgarbe von G zu invertieren. Ist k von positiver charakteristik, so sind immerhin noch alle nicht durch p teilbaren Zahlen $\mathbf{m}!$ in $\mathcal{O}_G$ invertierbar, so daß das im Beweis von Lemma 4.2.2 angewendete Verfahren auch für die infinitesimalen Eigenschaften von Gruppenschemata in positiver Charakteristik interessante Einsichten liefert:

4.2.3 Definition. *Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$, sei G ein k-Gruppenschema, und sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_G$ die zu dem Einsschnitt von G korrespondierende Idealgarbe. Gilt für jeden lokalen Schnitt x von $\mathcal{I}$ die Gleichung $x^p = 0$, so heißt G ein k-Gruppenschema der Höhe 1.*

4.2.4 Korollar. *Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei G ein k-Gruppenschema der Höhe 1. Ist $U = \operatorname{Spec} A$ eine offene affine Umgebung der Eins e von G, ist $I \subset A$ das zu e korrespondierende Ideal, und induzieren die Elemente $x_1, \ldots, x_r \in A$ eine k-Basis von I/I^2, so bilden die Monome $x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r}$ mit $0 \leq m_i < p$ eine k-Basis von A.*

Beweis. Wir übernehmen die Notationen aus dem Beweis von Lemma 4.2.2. Für $n \geq 1$ ist das Ideal I^n durch die Monome $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$ erzeugt, wo $\mathbf{m}$ in M_n variiert. Sei $M_n' \subset M_n$ die Menge aller Tupel $\mathbf{m}$ mit $0 \leq m_i < p$. Da G von der Höhe 1 ist, sind alle Monome $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$ mit $\mathbf{m} \in M_n - M_n'$ in A trivial, so daß I^n bereits durch die $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$ mit $\mathbf{m} \in M_n'$ erzeugt wird; insbesondere ist $I^{r(p-1)+1}$ das Nullideal. Da die Zahl $\mathbf{m}!$ für $\mathbf{m} \in M_n'$ in A invertierbar ist, sind die Klassen der Monome $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in M_n'$, nach dem Beweis von Lemma 4.2.2 in dem k-Vektorraum I^n/I^{n+1} linear unabhängig und bilden folglich eine Basis. Der k-Vektorraum A besitzt die Filtrierung $A \supset I \supset \cdots \supset I^{r(p-1)} \supset I^{r(p-1)+1} = 0$ mit Quotienten der Gestalt I^n/I^{n+1}, $0 \leq n \leq r(p-1)$; damit ist die Behauptung klar. □

Aus Lemma 4.2.2 und Lemma 4.1.2 folgt nun leicht, daß Gruppenschemata von lokal endlichem Typ über Körpern der Charakteristik 0 automatisch glatt sind:

4.2.5 Theorem. *Sei k ein Körper der Charakteristik 0, und sei G ein k-Gruppenschema von lokal endlichem Typ. Dann ist G reduziert.*

Beweis. Wir dürfen k als algebraisch abgeschlossen annehmen. Es genügt zu zeigen, daß die lokalen Ringe der lokal abgeschlossenen Punkte y von G reduziert sind. Ein Translationsargument reduziert das Problem auf den Fall, daß y mit dem neutralen Element e von G übereinstimmt; es genügt einzusehen, daß jedes Element a in $\mathcal{O}_{G,e}$, dessen Quadrat trivial ist, verschwindet. Sei I das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{G,e}$. Angenommen, es existiert ein Element a in $\mathcal{O}_{G,e}$ mit $a^2 = 0$, welches nicht in $\bigcap_{n \geq 0} I^n = 0$ enthalten ist; dann existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $a \in I^n - I^{n+1}$. Sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_r \in I$ ein System von Elementen, welches eine k-Basis von I/I^2 induziert; wir fixieren eine Darstellung $a = P(\boldsymbol{x}) + a'$, wo a' in I^{n+1} liegt und $P \in k[X_1, \ldots, X_r]$ ein homogenes Polynom in vom Totalgrad n ist. Mit $P(\boldsymbol{x}) \in I^n$, $a' \in I^{n+1}$ folgt die Kongruenz $a^2 \equiv P(\boldsymbol{x})^2 \bmod I^{2n+1}$; da a^2 verschwindet, ist somit $P(\boldsymbol{x})^2$ in I^{2n+1} enthalten. Dies steht im Widerspruch zur Aussage von Lemma 4.2.2, denn P^2 ist homogen vom Grad $2n$. □

4.2.6 Korollar. *Sei k ein Körper der Charakteristik Null, und sei G ein k-Gruppenschemat von lokal endlichem Typ. Dann ist G über k glatt.*

Beweis. Nach Theorem 4.2.5 ist G über k geometrisch reduziert, nach Lemma 4.1.2 also glatt. □

4.3 Schematisch dominante Homomorphismen

In Abschnitt 4.5 werden wir mit Hilfe von Lemma 4.1.8 zeigen, daß flache affine Gruppenschemata von lokal endlichem Typ die Eigenschaft vollständiger Durchschnitte besitzen. Um das genannte Descentlemma anwenden zu können, benötigen wir die Tatsache, daß ein schematisch dominanter Homomorphismus von einem k-Gruppenschema lokal endlichen Typs in ein glattes k-Gruppenschema stets treuflach ist; wir werden dieses Resultat sogleich beweisen. Ferner werden wir zeigen, daß schematisch dominante Homomorphismen affiner Gruppenschemata endlichen Typs über Körpern treuflach sind; wir werden dieses Resultat im folgenden allerdings nicht benötigen.

4.3.1 Lemma. *Sei k ein Körper, sei $f : G \to H$ ein schematisch dominanter Homomorphismus von k-Gruppenschemata endlichen Typs, und sei H geometrisch reduziert. Dann ist f treuflach.*

Beweis. Treuflachheit ist nach treuflachem Basiswechsel zu testen; sei also ohne Einschränkung k algebraisch abgeschlossen. Sei H_0 die Zusammenhangskomponente der Eins in H; dann ist die Restriktion $f|_{f^{-1}(H^0)} : f^{-1}(H^0) \to H^0$ schematisch dominant. Aufgrund der Glattheit von H über k ist H^0 integer, und nach Korollar 2.1.10 existiert folglich ein offenes Unterschema $U \subset H^0$, derart daß $f^{-1}(U)$ nichtleer und der Morphismus $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ frei ist. Insbesondere ist $f|_{f^{-1}(U)}$ flach, und jeder Punkt aus U besitzt ein f-Urbild. Seien $x \in G, y \in f^{-1}(U)$ lokal abgeschlossene Punkte. Unter Translation mit $x^{-1}y$ wird x auf y abgebildet; folglich ist f in x flach. Da $f^{-1}(U)$ offen ist, wird jeder nach x spezialisierende Punkt unter $x^{-1}y$ nach $f^{-1}(U)$ abgebildet; folglich stimmt der flache Ort von f mit ganz G überein. Nach Lemma 4.1.5 ist H_0 ein Untergruppenschema von H, und nach Lemma 4.1.4 identifiziert sich das Bild $U \cdot U$ von $U \times_k U$ unter der Multiplikation von H mit ganz H^0; somit besitzt jeder Punkt aus H^0 ein f-Urbild. Ist H nicht zusammenhängend, so sei H' eine von H^0 verschiedene Zusammenhangskomponente von H. Aufgrund der schematischen Dominanz von f ist das f-Urbild $f^{-1}(H')$ von H' nicht leer; sei y ein lokal abgeschlossener Punkt in $f^{-1}(H')$. Da H als glattes Schema lokal integer ist, stimmen die Zusammenhangskomponenten von H mit den irreduziblen Komponenten von H überein, so daß sich H' unter Translation um $f(y)^{-1}$ mit H^0 identifiziert. Ist $x \in H'$ ein Punkt und ist $y' \in F$ ein f-Urbild zu $f(y)^{-1}x$, so ist yy' ein f-Urbild zu x. Folglich ist der flache Morphismus f auf der Menge der lokal abgeschlossenen Punkte von H surjektiv, also treuflach, wie behauptet. □

Wir wenden uns nun affinen nicht notwendig glatten k-Gruppenschemata zu, wobei wir zunächst den Fall behandeln, daß der Einsschnitt von H durch ein nilpotentes Ideal gegeben ist; nach Korollar 4.2.6 ist die Charakteristik des Grundkörpers in der nicht-glatten Situation notwendig positiv. Wir werden die Aussage des folgenden Lemmas in Abschnitt 4.4 benötigen, wo wir die Struktur endlicher zusammenhängender Gruppenschemata über perfekten Körpern explizit beschreiben werden.

4.3.2 Bemerkung. *Sei k ein Körper, und sei A eine k-Algebra von endlichem Typ. Genau dann besitzt A ein nilpotentes maximales Ideal, wenn* Spec A *zusammenhängend und über k endlich ist.*

Beweis. Besitzt A ein nilpotentes maximales Ideal $\mathfrak{m}$, so ist A offenbar lokal und Spec A folglich zusammenhängend. Da A noethersch ist, zeigt die durch die Potenzen von $\mathfrak{m}$ gegebene endliche Filtration von A die Endlichkeit von A über k. Ist umgekehrt A eine endliche k-Algebra, so ist A semi-lokal; ist überdies Spec A

zusammenhängend, so ist A bereits lokal, und aufgrund der Endlichkeit von A über k besitzt die durch Potenzen des maximalen Ideals von A gegebene Filtration von A endliche Länge. □

4.3.3 Lemma. *Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei $f : G \to H$ ein schematisch dominanter Homomorphismus affiner k-Gruppenschemata endlichen Typs, wobei der Einsschnitt von H durch ein nilpotentes Ideal gegeben sei. Dann ist f frei.*

Beweis. Wir schreiben $H = \operatorname{Spec} A$, $G = \operatorname{Spec} B$; sei $I \subset A$ das zu dem Einsschnitt von H korrespondierende Ideal. Sei $N := \operatorname{Spec} B/IB$ der Kern von f; aus trivialen Gründen ist N über k frei. Sei $(x_i)_{i\in J}$ eine Familie vonElemente aus B, deren Klassen $\overline{x}_i$ in B/IB eine Basis von B/IB über k bilden; es genügt zu zeigen, daß die x_i den als A-Modul B frei erzeugen. Sei C der Kokern des durch die x_i induzierten kanonischen Homomorphismus $\varphi : A^{(J)} \to B$; wir wollen einsehen, daß φ ein Isomorphismus ist. Nach Anwendung des Funktors $\cdot \otimes_A A/I$ ist C trivial; folglich stimmt C mit IC überein. Nach Annahme existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, für welche I^n verschwindet; induktiv sehen wir, daß C trivial ist, so daß die x_i den Ring B als A-Modul erzeugen. Tensorieren wir φ von rechts über A mit B, so erhalten wir die surjektive B-lineare Abbildung $\varphi \otimes \mathrm{id}_B : B^{(J)} \to B \otimes_A B$, welche das i-te Basiselement von $B^{(J)}$ auf $x_i \otimes 1$ abgebildet; hierbei sehen wir $B \otimes_A B$ via p_2^* als B-Modul an, wobei $p_2 : G \times_H G \to G$ die Projektion auf den zweiten Faktor bezeichnet. Aufgrund der schematischen Dominanz von f ist der durch f^* induzierte A-Homomorphismus $A^{(J)} \to B^{(J)}$ injektiv; für die Injektivität von φ genügt es somit zu zeigen, daß $\varphi \otimes 1_B$ injektiv ist. Nach Korollar 4.1.7 erklärt die Zuordnung $(g_1, g_2) \mapsto (g_1^{-1} \cdot g_2, g_2)$ einen G-Isomorphismus $G \times_H G \xrightarrow{\sim} N \times_k G$, wo auch $N \times_k G$ unter der Projektion auf den zweiten Faktor als G-Schema aufgefaßt werde; folglich ist $G \times_H G$ via p_2 über G beziehungsweise $B \otimes_A B$ via p_2^* über B frei. Somit besitzt $\varphi \otimes 1_B$ einen Schnitt, so daß sich $K := \ker \varphi \otimes 1_B$ mit einem direkten Faktor von $B^{(J)}$ identifiziert. Tensorieren wir $\varphi \otimes 1_B$ von rechts mit B/IB über B und identifizieren wir kanonisch $(B \otimes_A B) \otimes_B B/IB$ mit $B \otimes_A B/BI \cong B \otimes_{A/I} A/I \otimes_A B/IB \cong (B \otimes_A A/I) \otimes_{A/I} B/IB \cong B/IB \otimes_{A/I} B/IB$, so erhalten wir also eine B/IB-lineare Abbildung $(B/IB)^{(J)} \to B/IB \otimes_k B/IB$, welche das i-te Basiselement von $(B/IB)^{(J)}$ auf $\overline{x_i} \otimes 1$ abbildet und folglich ein Isomorphismus ist. Da spaltende exakte Sequenzen unter beliebigem Basiswechsel exakt bleiben, folgt $K = IK$, also $K = 0$, denn I ist nilpotent. Somit ist $\varphi \otimes 1_B$ injektiv, wie gewünscht. □

Wir können nun zeigen, daß schematisch dominante Homomorphismen beliebiger affiner k-Gruppenschemata endlichen Typs treuflach sind. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir diese Aussage keine Verwendung finden.

4.3.4 Satz. *Sei k ein Körper, und sei $f : G \to H$ ein schematisch dominanter Homomorphismus affiner k-Gruppenschemata endlichen Typs. Dann ist f treuflach.*

Beweis. Ist k von Charakteristik Null, so ist H nach Theorem 4.2.5 geometrisch reduziert, und die Behauptung folgt mit Lemma 4.3.1. Sei also ohne Einschränkung k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$. Wir schreiben $H = \operatorname{Spec} A$, $G = \operatorname{Spec} B$; sei $I \subset A$ das zu dem Einsschnitt von H korrespondierende Ideal, und sei $\sqrt{0} \subset A$ das Nilradikal von A. Da A noethersch ist, besitzt $\sqrt{0}$ ein endliches Erzeugendensystem; folglich existiert eine natürliche Zahl n, derart daß für alle $a \in \sqrt{0}$ die Gleichung $a^{p^n} = 0$ erfüllt ist. Sei $A^{p^n} \subset A$ der Unterring aller p^n-Potenzen; dann ist A^{p^n} folglich reduziert. Da k perfekt ist, besitzt A^{p^n} kanonisch die Struktur einer k-Algebra, derart daß die Inklusion $A^{p^n} \subset A$ ein k-Homomorphismus ist. Da sich $A^{p^n} \otimes_k A^{p^n}$ kanonisch mit $(A \otimes_k A)^{p^n}$ identifiziert, beschränkt sich die k-Kogruppenstruktur auf A zu einer k-Kogruppenstruktur auf A^{p^n}. Sei $H' := \operatorname{Spec} A^{p^n}$, und sei L der Kern des zu der Inklusion $A^{p^n} \subset A$ assoziierten schematisch dominanten Homomorphismus $g : H \to H'$. Dann identifiziert sich L mit $\operatorname{Spec} A/(I \cap A^{p^n})A$; das zu dem Einsschnitt von L korrespondierende Ideal $I \cdot A/(I \cap A^{p^n})A$ ist offenbar nilpotent. Sei $N \subset G$ der Kern von $g \circ f$. Nach Lemma 4.1.6 sind die durch $(x, y) \mapsto (x^{-1} \cdot y, y)$ beziehungsweise $(x, y) \mapsto (x^{-1} \cdot f(y), y)$ erklärten G-Morphismen $\alpha : G \times_{H'} G \to N \times_k G$, $\beta : H \times_{H'} G \to L \times_k G$ Isomorphismen. Sei $\overline{f}$ der durch f induzierte schematisch dominante Morphismus $N \to L$, und sei $p : G \to \operatorname{Spec} k$ der Strukturmorphismus von G. Das kanonische Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \times_{H'} G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(g\circ f)^* f"'] & N \times_k G \arrow[d, "p^*\overline{f}"] \\ H \times_{H'} G \arrow[r, "\beta"] & L \times_k G \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, denn sind x, y Punkte von G, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{array}{rclcll} (p^*\overline{f} \circ \alpha)(x, y) & = & p^*\overline{f}(x^{-1} \cdot y, y) & = & (f(x)^{-1} \cdot f(y), y) & \text{und} \\ (\beta \circ ((g \circ f)^* f))(x, y) & = & \beta(f(x), y) & = & (f(x)^{-1} \cdot f(y), y) & . \end{array}$$

Der Einsschnitt von L ist durch ein nilpotentes Ideal gegeben; nach Lemma 4.3.3 ist folglich der schematisch dominante Morphismus $\overline{f} : N \to L$ treuflach; also ist auch $p^*\overline{f}$ treuflach. Da α und β Isomorphismen sind und das betrachtete Diagramm kommutiert, ist somit $(g \circ f)^* f$ treuflach. Da H' reduziert und $g \circ f$ schematisch dominant ist, sehen wir mit Lemma 4.3.1, daß $g \circ f$ treuflach ist. Folglich ist auch f treuflach, wie behauptet. □

4.4 Endliche Gruppenschemata

In diesem Abschnitt geben wir eine explizite Beschreibung der Struktur endlicher zusammenhängender Gruppenschemata über perfekten Körpern in positiver Charakteristik; insbesondere werden wir sehen, daß es sich bei Gruppenschemata dieses Typs um vollständige Durchschnitte handelt.

Bemerkung. Nach Bemerkung 4.3.2 ist ein affines Gruppenschema über einem Körper genau dann zusammenhängend und endlich, wenn sein Einsschnitt durch ein nilpotentes Ideal gegeben ist.

4.4.1 Theorem. *Sei k ein perfekter Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei G ein affines k-Gruppenschema von endlichem Typ, dessen Einsschnitt durch ein nilpotentes Ideal gegeben ist. Dann existieren natürliche Zahlen $n, e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{N}$, derart daß G als k-Schema zu* $\operatorname{Spec} k[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^{p^{e_1}}, \ldots, X_n^{p^{e_n}})$ *isomorph ist.*

Beweis. Ist G von der Höhe 1, so ist dies die Aussage von Korollar 4.2.4; in diesem Fall sind die e_i gleich 1. Wir schreiben $G = \operatorname{Spec} B$; sei $I_B \subset B$ das zu dem Einsschnitt von G korrespondierende Ideal. Da B noethersch und folglich I_B endlich erzeugt ist, existiert eine kleinste natürliche Zahl n, derart daß für alle x in I_B die Gleichung $x^{p^n} = 0$ erfüllt ist; wir schließen mit Induktion nach n. Sei $A := B^p$; da k perfekt ist, handelt es sich bei A um eine k-Unteralgebra von B, und die k-Kogruppenstruktur auf B beschränkt sich nach A. Das zu dem Einsschnitt von $H := \operatorname{Spec} A$ korrespondierende Ideal $I_A \subset A$ ist gleich $I_B \cap B^p$; da I_B maximal ist, bestetht I_A somit aus allen Elementen $a^p \in A$ mit $a \in I_B$, und nach Induktionsvoraussetzung existiert folglich ein Isomorphismus $A \cong k[T]/(T^{\boldsymbol{d}})$ von k-Algebren für ein hinreichend großes System $T = T_1, \ldots, T_l$ von Variablen und ein geeignetes

Tupel von p-Potenzen $\boldsymbol{d} = d_1, \dots, d_l$. Wir bezeichnen die Klasse von T in A wieder mit T; die geometrische Reihe zeigt, daß A lokal ist mit maximalem Ideal (T). Sei $\boldsymbol{y} = y_1, \dots, y_l$ ein System Elementen in B, derart daß $\boldsymbol{y}$ unter p-Potenzierung auf $T \in A$ abgebildet wird. Aufgrund der Maximalität des Ideals $I_B \subset B$ ist $\boldsymbol{y}$ in I_B enthalten. Wir fixieren ein notwendig endliches System $\boldsymbol{z} = z_1, \dots, z_m$ von Elementen aus B, welches maximal ist unter den Bedingungen, daß es ein k-linear unabhängiges System in I_B/I_B^2 induziert und daß die p-Potenzen $\boldsymbol{z}^p$ trivial sind. Sei $Z = Z_1, \dots, Z_m$ ein System von Variablen; wir setzen $C := k[Y,Z]/(Y^{p \cdot \boldsymbol{d}}, Z^p)$, und erklären den Homomorphismus $\varphi : C \to B$ durch die Zuordnungen $Y \mapsto \boldsymbol{y}, Z \mapsto \boldsymbol{z}$. Es genügt zu zeigen, daß φ ein Isomorphismus ist. Unter der Zuordnung $T \mapsto Y^p$ ist $k[Y,Z]/(Z^p)$ ein freier $k[T]$-Modul; folglich erklärt der durch $T \mapsto Y^p$ induzierte Monomorphismus $A \hookrightarrow C$ die k-Algebra C als freien A-Modul. Nach Lemma 4.3.3 ist auch B über A frei; interpretieren wir $\varphi : C \to B$ als Homomorphismus von A-Moduln, so sind Kern und Kokern von φ folglich direkte Summanden von C beziehungsweise B. Da mit I_B auch I_A nilpotent ist, genügt es somit zu zeigen, daß $\varphi' := \varphi \otimes_A A/I_A A$ ein Isomorphismus ist. Wir schreiben $A' := A/I_A$, $B' := B/I_A B$, $C' := C/I_A C$. Nach Induktionsvoraussetzung ist A lokal, so daß sich I_A mit dem maximalen Ideal von $k[T]/(T^{\boldsymbol{d}})$ identifiziert, welches durch die Klassen der Variablen erzeugt ist; folglich berechnet sich C' zu $C/(Y^p) \cong k[Y,Z]/(Y^p, Z^p)$. Das Schema $N := \operatorname{Spec} B'$ identifiziert sich mit dem Kern des Homomorphismus $G \to H$, und der Einsschnitt von N korrespondiert zu dem Ideal $I_B \cdot B/(I_B \cap B^p)B$; folglich ist N ein k-Gruppenschema der Höhe 1. Nach Korollar 4.2.4 besitzt die k-Algebra B' somit eine Darstellung $B' \cong k[X]/(X^p)$, wo X ein System $X_1, \dots, X_s$ von Variablen bezeichnet. Seien $\mathfrak{m}_{B'}$, $\mathfrak{m}_{C'}$ die durch die Klassen der jeweiligen Variablen erzeugten maximalen Ideale von B' und C'. Ist φ' nach Division durch $\mathfrak{m}_{B'}^2$ beziehungsweise $\mathfrak{m}_{C'}^2$ surjektiv, so existiert ein System $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_s$ von Elementen in C', derart daß die Klasse von X modulo $\mathfrak{m}_{B'}$, welche wir wieder mit X bezeichnen, ein Darstellung der Form $X = \varphi'(\mathbf{x}) + g(X)$ besitzt, wo sich g aus Monomen vom Grad ≥ 2 zusammensetzt; Iteration zeigt also, daß φ' dann surjektiv ist. Als k-Vektorräume sind B', C' zu $k \oplus \mathfrak{m}_{B'}$ beziehungsweise $k \otimes \mathfrak{m}_{C'}$ isomorph, wobei φ' diese Zerlegung respektiert und auf k mit der Identität übereinstimmt. Für die Surjektivität von φ' ist somit zu zeigen, daß der induzierte Homomorphismus

$$T^*_{\varphi'} : \mathfrak{m}_{C'}/\mathfrak{m}_{C'}^2 \to \mathfrak{m}_{B'}/\mathfrak{m}_{B'}^2$$

der Kotangentialräume surjektiv ist. Die k-Dimension von $\mathfrak{m}_{B'}/\mathfrak{m}_{B'}^2$ stimmt mit der Anzahl der Koordinatenfunktionen von B' überein, entsprechend für C'; ist also $T^*_{\varphi'}$ sogar ein Isomorphismus, so ist s gleich $l + m$ und somit $\dim_k B'$ gleich $\dim_k C'$. Als surjektiver Homomorphismus von k-Vektorräumen gleicher endlicher Dimension ist φ' dann ein Isomorphismus, wie gewünscht. Es bleibt somit nachzuweisen, daß $T^*_{\varphi'}$ ein Isomorphismus ist. Das System Y, Z bildet eine k-Basis von $\mathfrak{m}_{C'}/\mathfrak{m}_{C'}^2$; folglich ist zu zeigen, daß sein Bild unter φ' eine k-Basis von $\mathfrak{m}_{B'}/\mathfrak{m}_{B'}^2$ ist. Da $I_B \subset B$ als maximales Ideal prim ist, stimmt I_B mit $\sqrt{I_B}$ überein; folglich ist $I_A B$ in $I_B^p \subset I_B^2$ enthalten, so daß der kanonische surjektive Homomorphismus $I_B/I_B^2 \to (I_B/I_A B)/(I_B/I_A B)^2$ sogar bijektiv ist. Es ist also zu zeigen, daß das System Y, Z eine k-Basis von I_B/I_B^2 induziert. Sei a ein Element in I_B; dann besitzt $a^p \in I_A$ eine Darstellung $a^p = P(T)$ durch ein Polynom $P \in k[T]$. Da k perfekt ist, existieren die p-ten Wurzeln der Koeffizienten von P; folglich existiert ein Polynom $Q \in k[T]$, für welches $(Q(\boldsymbol{y}) - a)^p$ trivial ist. Ist nicht bereits $Q(\boldsymbol{y})$ gleich a, so existiert modulo I_B^2 eine k-lineare Darstellung von $Q(\boldsymbol{y}) - a$ durch die Komponenten z_j von $\boldsymbol{z}$, denn $\boldsymbol{z}$ ist als modulo I_B^2 k-linear unabhängiges System mit $\boldsymbol{z}^p = 0$ maximal. Somit ist $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ ein Erzeugendensystem von I_B/I_B^2 über k. Besteht schließlich für gewisse Koeffizienten $\alpha_i, \beta_j \in k$ eine Relation

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i y_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j z_j \in I_B^2 \quad ,$$

so erhalten wir durch p-Potenzierung die Relation

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i^p y_i^p + \sum_{j=1}^{m} \beta_j^p z_j^p \in I_A^2 \quad .$$

Da $\boldsymbol{z}^p$ verschwindet, liegt also $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i^p y_i^p$ in I_A^2. Die Elemente $y_i^p = T_i$ sind über k linear unabhängig; somit sind die α_i trivial. Folglich liegt die Summe $\sum_{j=1}^{m} \beta_j z_j$ in I_B^2; da die z_j nach Voraussetzung modulo I_B^2 linear unabhängig sind, verschwinden auch alle β_j, wie gewünscht. □

Wir sehen nun unmittelbar, daß endliche zusammenhängende Gruppenschemata über perfekten Körpern die Eigenschaft vollständiger Durchschnitte besitzen:

4.4.2 Korollar. *Sei k ein perfekter Körper, und sei G ein k-Gruppenschema von endlichem Typ, dessen Einsschnitt durch ein nilpotentes Ideal gegeben ist; dann ist G über k ein vollständiger Durchschnitt.*

Beweis. Ist k von Charakteristik Null, so ist G nach Korollar 4.2.6 über k glatt und somit nach Korollar 3.3.5 insbesondere ein vollständiger Durchschnitt; sei also ohne Einschränkung char $k = p$ strikt positiv. Nach Theorem 4.4.1 existieren natürliche Zahlen $n, e_1, \ldots, e_n$, derart daß G als k-Schema zu dem Spektrum des abgeschnittenen Polynomrings

$$k[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^{p^{e_1}}, \ldots, X_n^{p^{e_n}})$$

isomorph ist; wir fixieren einen solchen Isomorphismus. Die kanonische abgeschlossene k-Immersion $G \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$ ist transversal regulär, denn k-Algebren sind aus trivialen Gründen flach, und ist R ein beliebiger Ring, so ist in dem Polynomring $R[T]$ jede Potenz der Variablen T regulär. Nach Korollar 1.2.24 sind die lokalen Ringe von $\mathbb{A}_k^n$ regulär; nach Satz 2.2.2 ist G somit ein vollständiger Durchschnitt über k. □

4.5 Approximation affiner Gruppenschemata

Wir können nun wie angekündigt beweisen, daß flache affine Gruppenschemata über lokal noetherschen Basen die Eigenschaft vollständiger Durchschnitte besitzen:

4.5.1 Satz. *Sei S ein lokal noethersches Schema, und sei G ein affines flaches S-Gruppenschema von lokal endlichem Typ. Dann ist G ein vollständiger Durchschnitt.*

Beweis. Sei $s \in S$ ein Punkt, und sei G_s die Faser von G über s; dann ist G_s ein affines flaches $k(s)$-Gruppenschema von endlichem Typ, wo $k(s)$ den Restklassenkörper von S bei s bezeichnet. Es ist zu zeigen, daß es sich bei den lokalen Ringen von G_s um vollständige Durchschnittsringe handelt. Nach Lemma 1.4.11 dürfen wir $k(s)$ als algebraisch abgeschlossen voraussetzen, und nach Satz 2.2.4 genügt es zu zeigen, daß G_s ein vollständiger Durchschnitt über $k(s)$ ist. Sei also ohne Einschränkung S das Spektrum eines algebraisch abgeschlossenen Körpers k. Wir schreiben $G_s = \operatorname{Spec} B$; sei $I_B \subset B$ das zu dem Einsschnitt von G_s korrespondierende Ideal. Da B noethersch ist, besitzt das Nilradikal $\sqrt{0} \subset B$ von B ein endliches Erzeugendensystem; folglich existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, derart daß $A := B^{p^n}$ reduziert ist. Da k perfekt ist, besitzt A kanonisch die Struktur einer k-Unteralgebra von B; die k-Kogruppenstruktur auf B beschränkt sich zu einer k-Kogruppenstruktur auf A, und der Einsschnitt von A ist durch das Ideal $I_A := I_B \cap A$ gegeben. Wir setzen $H := \operatorname{Spec} A$; dann induziert die Inklusion $A \subset B$ einen k-Homomorphismus $f : G \to H$. Als geometrisch reduziertes k-Gruppenschema ist H nach Lemma 4.1.2 über k glatt; nach Lemma 4.3.1 ist f somit treuflach. Sei $N := \ker f$; dann ist der Einsschnitt von $N = \operatorname{Spec} B/I_A B$ durch das nilpotente Ideal $I_B \cdot B/I_A B$ gegeben. Da k perfekt ist, handelt es sich nach Korollar 4.4.2 bei dem kanonischen Morphismus $N \to \operatorname{Spec} k$ somit um einen vollständigen Durchschnitt. Nach Satz 2.2.3 (ii) ist die Eigenschaft vollständiger Durchschnitte fppf-lokal auf der Basis zu verifizieren. Die Morphismen $f : G \to H$ und $G \to k$ sind treuflach und quasikompakt; nach Lemma 4.1.8 ist somit $f : G \to H$ ein vollständiger Durchschnitt. Nach Satz 2.2.3 (iii) sind vollständige Durchschnitte stabil unter Komposition, und als glattes k-Schema ist H nach Korollar 3.3.5 ein vollständiger Durchschnitt; folglich ist auch G über k ein vollständiger Durchschnitt, wie behauptet. □

Sei R ein diskreter Bewertungsring, und sei $\underline{G}$ ein affines R-Gruppenschema von endlichem Typ. Wir sind nun in der Lage, mit Hilfe der Theorie aus Abschnitt 2.3 den schematischen Abschluß $\underline{G}'$ der generischen Faser von $\underline{G}$ zu approximieren, selbst dann, wenn $\underline{G}$ nicht flach und somit insbesondere kein vollständiger Durchschnitt ist. Grundlegend hierfür ist die in Lemma 4.1.9 bewiesene Tatsache, daß der schematische Abschluß $\underline{G}'$ der generischen Faser von $\underline{G}$ eine natürliche Gruppenstruktur trägt: Als flaches affines Gruppenschema von lokal endlichem Typ ist $\underline{G}'$ nach Satz 4.5.1 ein vollständiger Durchschnitt.

4.5.2 Korollar. ([CY] 6.3) *Sei R ein diskreter Bewertungsring, sei $\underline{G}$ ein affines R-Gruppenschema von endlichem Typ, sei $\underline{G}'$ der schematische Abschluß der generischen Faser von $\underline{G}$, und sei $n \geq 0$ eine natürliche Zahl. Dann identifiziert sich $\underline{G}'_n$ kanonisch mit dem schematischen Abschluß der Punktmenge*

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \operatorname{im}\left(\underline{G}(C) \to \underline{G}_n(C_n)\right) \quad ,$$

wobei C in der Menge $\mathcal{C}$ lokalen endlichen vollständigen Durchschnitte über $\hat{R}$ variiert.

Beweis. Als schematischer Abschluß eines K-Schemas ist $\underline{G}'$ über R flach, und nach Lemma 4.1.9 ist $\underline{G}'$ somit ein R-Gruppenschema; da $\underline{G}'$ außerdem affin ist, besitzt $\underline{G}'$ nach Satz 4.5.1 über R die Eigenschaft eines vollständigen Durchschnitts. Die Behauptung folgt nun unmittelbar mit Korollar 2.3.10. $\square$

5. Approximation partiell glatter Schemata

Sei $\underline{X}$ ein Schema von lokal endlichem Typ über einem diskreten Bewertungsring R, sei $\underline{X}'$ der schematische Abschluß der generischen Faser von $\underline{X}$, und sei $n \geq 0$ eine natürliche Zahl. Angenommen, das Schema $\underline{X}'$ ist ein vollständiger Durchschnitt. Nach Korollar 2.3.10 können wir $\underline{X}'_n$ als schematischen Abschluß derjenigen Punkte von $\underline{X}$ rekonstruieren, welche sich als n-te Reduktion von Punkten mit Werten in lokalen endlichen vollständigen Durchschnitten über $\hat{R}$ realisieren lassen. Nach Lemma 2.3.11 ist jeder endliche vollständige Durchschnitt C_n über R_n durch einen endlichen vollständigen Durchschnitt C über $\hat{R}$ induziert; es stellt sich also die Frage, welche Punkte in $\underline{X}(C_n)$ sich zu Punkten in $\underline{X}(C)$ ausdehnen.

Ist $\underline{X}$ affin mit glatter generischer Faser, so existiert eine natürliche Zahl $h \geq 0$, derart daß jeder Punkt in $\underline{X}(C_{n-h})$, welcher sich nach $\underline{X}(C_n)$ ausdehnt, bereits eine Fortsetzung nach $\underline{X}(C)$ besitzt. Diese Aussage folgt direkt aus dem Lemma [Elk] I.1, welches wir im folgenden beweisen werden; in Verbindung mit Korollar 2.3.10 und Lemma 2.3.11 liefert sie die Einsicht, daß das Schema $\underline{X}'_n$ als Abschluß der n-ten Reduktion der Punkte von $\underline{X}$ mit Werten in lokalen endlichen vollständigen Durchschnitten über R_{n-h} rekonstruiert werden kann.

Sei d die Dimension der generischen Faser von $\underline{X}$. Ist $\underline{X}$ durch $N - d$ Gleichungen als Unterschema eines affinen Raums $\mathbb{A}_R^N$ darstellbar oder ist $\underline{X}$ ein vollständiger Durchschnitt, so können wir h gleich einer Invarianten von $\underline{X}$ wählen; diese ist bereits durch eine hinreichend genaue Approximation von $\underline{X}$ determiniert.

5.1 Beweis des Lemmas [Elk] I.1

Wir verwenden in diesem Abschnitt die folgenden Notationen:

Notationen. Sei A ein noetherscher Ring, und sei $\underline{X} = \operatorname{Spec} B$ ein affines A-Schema von endlichem Typ. Wir fixieren für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ eine Darstellung

$$B = A[T_1, \ldots, T_N]/I$$

von B über A, wobei $T = T_1, \ldots, T_N$ ein System von Variablen bezeichnet. Sei $\boldsymbol{f} := f_1, \ldots, f_q \in A[T]$ ein Erzeugendensystem von I. Zu jeder natürlichen Zahl $p \leq q$ und jedem Multiindex

$$\boldsymbol{s} \in \mathcal{A}_p := \{(s_1, \ldots, s_q) \in \mathbb{N}^n \,;\, 1 \leq s_1 < \ldots < s_p \leq q\}$$

bezeichne $I_{\boldsymbol{s}} \subset I$ das von der Folge $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{s}} := f_{s_1}, \ldots, f_{s_p}$ erzeugte Ideal; ferner sei $J_{\boldsymbol{s}} \subset A[T]$ das Ideal, welches von den p-Minoren der Jacobi-Matrix

$$M_{\boldsymbol{s}} := \left(\frac{\partial f_{s_i}}{\partial T_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq N}}$$

erzeugt ist. Schließlich bezeichne $K_{\boldsymbol{s}}$ das Ideal

$$K_{\boldsymbol{s}} := (I_s : I) = \{a \in A[T] \,;\, aI \subset I_{\boldsymbol{s}}\}$$

der Elemente aus $A[T]$, welche durch Multiplikation mit Elementen aus I nach $I_{\boldsymbol{s}}$ abgebildet werden. Summieren wir über Paare $(p, \boldsymbol{s})$, so variieren stets p in $\{0, \ldots, q\}$ und $\boldsymbol{s}$ in $\mathcal{A}_p$.

Die Aussage des Jacobi-Kriteriums für Glattheit ([BLR] 2.2/7) läßt sich leicht zu einer Aussage über den Support der Jacobi-Ideale umformulieren:

5.1.1 Lemma. *Das von $\sum_{p,\boldsymbol{s}} K_{\boldsymbol{s}} J_{\boldsymbol{s}} \subset A[T]$ in B erzeugte Ideal besitzt den nicht-glatten Ort von $\underline{X}$ als Support.*

Beweis. Wir setzen $H := \sum_{p,\boldsymbol{s}} K_{\boldsymbol{s}} J_{\boldsymbol{s}}$. Die Zariski-abgeschlossene Menge $V(H \cdot B) \subset \underline{X}$ identifiziert sich mit dem Durchschnitt $\underline{X} \cap V(H)$. Nun ist

$$V(H) = \bigcap_{0 \leq p \leq q, \boldsymbol{s} \in \mathcal{A}_p} V(K_{\boldsymbol{s}} J_{\boldsymbol{s}})$$

der Ort in $\mathbb{A}^N_A$, wo zu keinem Punkt x ein Paar $(p \in \{0, \ldots, q\}, \boldsymbol{s} \in \mathcal{A}_p)$ existiert, derart daß lokal bei x das Ideal $I_{\boldsymbol{s}}$ mit I übereinstimmt und $J_{\boldsymbol{s}}$ ein invertierbares Element enthält. Genau dann existiert ein Element $\Delta \in J_{\boldsymbol{s}}$ mit $\Delta(x) \neq 0$, wenn zumindest einer der Erzeuger von $J_{\boldsymbol{s}}$ in in dem Restklassenkörper $k(x)$ von x nicht verschwindet; somit identifiziert sich $\underline{X} \cap V(H)$ mit der Menge aller Punkte $x \in \underline{X}$, wo sich für jedes $p \in \{0, \ldots, n\}$ aus dem Relationensystem $\boldsymbol{f}$ kein p-elementiges Teilsystem auswählen läßt, derart daß dieses bei x das Einbettungsideal I erzeugt und seine Jacobi-Matrix einen bei x invertierbaren p-Minor besitzt. Liegt als x in $\underline{X} - V(H)$, so ist $\underline{X}$ nach [BLR] 2.2/7 (d)$\Rightarrow$(a) bei x glatt. Ist umgekehrt $\underline{X}$ bei x glatt, so ist nach [BLR] 2.2/7 (a)$\Rightarrow$(b) die kanonische Sequenz

$$0 \to I/I^2 \to j^*\Omega^1_{\mathbb{A}^N_A/A} \to \Omega^1_{B/A} \to 0$$

bei x exakt gespalten, wo j die abgeschlossene Immersion von $\underline{X}$ nach $\mathbb{A}^N_A$ bezeichnet. Sei d die Dimension von $\Omega^1_{B/A} \otimes k(x)$ über $k(x)$; nach [BLR] 2.2/7 (a)$\Rightarrow$(c) läßt sich aus dem System $\boldsymbol{f}$ ein Teilsystem $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{s}}$ von $p := N - d$ Elementen auswählen, welche I bei x erzeugen und deren Differentiale $d\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{s}}$ bei x den direkten Faktor $(I/I^2)_x$ von $(j^*\Omega^1_{\mathbb{A}^N_A/A})_x$ erzeugen. Da spaltende exakte Sequenzen unter Basiswechsel stabil sind, ist $\dim_{k(x)} I/I^2 \otimes k(x)$ gleich $N - d$; folglich bilden die Differentiale $d\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{s}}(x)$ eine Basis von $I/I^2 \otimes k(x)$. Insbesondere sind sie über $k(x)$ linear unabhängig, so daß die Matrix $M_{\boldsymbol{s}}$ einen bei x invertierbaren $(N-d)$-Minor besitzt und x folglich in dem Komplement von $\underline{X} \cap V(H)$ enthalten ist. $\square$

Die Ideale $J_{\boldsymbol{s}}$ sind mit Basiswechsel verträglich, nicht hingegen die Ideale $K_{\boldsymbol{s}}$. Wir können jedoch folgende triviale Tatsache bemerken:

Bemerkung. Sei A' eine Algebra über A, und sei I' das von dem Bild $\boldsymbol{f}\,'$ von $\boldsymbol{f}$ in $A'[T]$ erzeugte Ideal. Setzen wir $B' := A'[T]/I'$ und bilden wir die Ideale $J'_{\boldsymbol{s}}$, $K'_{\boldsymbol{s}}$ für $\boldsymbol{f}\,'$ analog wie für $\boldsymbol{f}$, so ist $J_{\boldsymbol{s}} \cdot A[T]$ gleich $J'_{\boldsymbol{s}}$, und $K_{\boldsymbol{s}} \cdot A[T]$ ist in $K'_{\boldsymbol{s}}$ enthalten. Ist also H ein Ideal von $A[X]$, welches in $\sum_{p,s} K_{\boldsymbol{s}} J_{\boldsymbol{s}}$ enthalten ist, so liegt $H \cdot A'[T]$ in $\sum_{p,s} K'_{\boldsymbol{s}} J'_{\boldsymbol{s}}$.

Notation. Wir fixieren ein Element π aus A.

Bemerkung. Ist R ein diskreter Bewertungsring und ist A eine R-Algebra, so werden wir $\pi \in A$ als das Bild eines uniformisierenden Elements von R wählen. Ist R vollständig und ist A über R endlich, so ist auch A bezüglich der π-adischen Topologie vollständig; wir insteressieren uns später insbesondere für den Fall, daß es sich bei A um den der Ring globaler Funktionen eines lokalen endlichen vollständigen Durchschnitts über R handelt.

5.1.2 Bemerkung und Definition. *Sei $\Lambda \subset A$ das Ideal der π-Torsion. Da A als noethersch vorausgesetzt ist, existiert nach dem Lemma von Artin und Rees ([L], Cor. 1.3.12) zu dem endlich erzeugten A-Modul $M := A$, dem A-Untermodul $N := \Lambda \subset M$ und dem Ideal $I := \pi A \subset A$ eine natürliche Zahl k_0, derart daß für alle $k \geq k_0$ die Gleichung*

$$(I^{k+1}M) \cap N = I(I^k M \cap N)$$

besteht; dann ist also $\pi^{k+1}A \cap \Lambda = \pi(\pi^k A \cap \Lambda)$ für $k \geq k_0$ trivial. Sei $k := k(A, \pi)$ die kleinste natürliche Zahl, für welche $\pi^{k+1}A \cap \Lambda$ verschwindet.

Notation. Ist $L \subset C[X]$ ein Ideal in einem Polynomring in q Variablen $X = X_1, \ldots, X_q$ über einem Ring C und ist $\boldsymbol{c} \in C^q$ ein Tupel von q Elementen, so bezeichne $L(\boldsymbol{c})$ das Ideal der Elemente von C, welche durch Einsetzen von $\boldsymbol{c}$ aus Polynomen in L hervorgehen.

Ist der Ort von $\underline{X}$, wo π invertierbar ist, über A glatt, und ist H ein Ideal in $\sum_{p,s} K_{\boldsymbol{s}} J_{\boldsymbol{s}}$, so enthält nach Lemma 5.1.1 das von H in B erzeugte Ideal $H \cdot B$ eine Potenz π^h von π. Ist A vollständig bezüglich der π-adischen Topologie, so zeigt das folgende Lemma, daß in dieser Situation für hinreichend großes n zu jedem A-wertigen Punkt $\boldsymbol{a}$ von $\mathbb{A}^N_A$, dessen n-te Reduktion über $\underline{X}_n$ faktorisiert, ein A-wertiger Punkt $\boldsymbol{a}^0$ von $\underline{X}$ existiert, welcher modulo π^{n-h} mit $\boldsymbol{a}$ übereinstimmt:

5.1.3 Lemma. ([Elk], I.1) *Sei A π-adisch vollständig, sei H ein in $\sum_{p,s} K_{\boldsymbol{s}} J_{\boldsymbol{s}}$ enthaltenes Ideal von $A[T]$, sei $L \subset A$ ein beliebiges Ideal, und seien h, n natürliche Zahlen, mit $n > \max(2h, h+k)$. Ist $\boldsymbol{a}$ ein Element in A^N, welches den Inklusionen*

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{a}) &\supset \pi^h A, \\ I(\boldsymbol{a}) &\subset \pi^n L \end{aligned}$$

genügt, so existiert ein N-Tupel $\boldsymbol{a}^0$ in A^N, derart daß $I(\boldsymbol{a}^0)$ verschwindet und $\boldsymbol{a}$ modulo $\pi^{n-h}L$ mit $\boldsymbol{a}^0$ überstimmt.

Beweis. Angenommen, zu jeder Zahl $m > \max(2h, h+k)$ und jedem N-Tupel $\boldsymbol{b} \in A^N$, für welches $\pi^h A[T]$ in $H(\boldsymbol{b})$ und $I(\boldsymbol{b})$ in $\pi^m L$ liegt, existiert ein N-Tupel $\boldsymbol{y} \in A^N$, welches die Relationen

$$\begin{cases} y_i \equiv 0 \bmod \pi^{m-h} L \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ \\ \qquad I(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y}) \subset \pi^{2m-2h} L \end{cases} \qquad (\dagger)$$

erfüllt. Wir setzen $\boldsymbol{a}_0 := \boldsymbol{a}$. Ist $\boldsymbol{a}_i$ für $i \geq 0$ bereits definiert und bestehen die Inklusionen $H(\boldsymbol{a}_i) \supset \pi^h A$, $I(\boldsymbol{a}_i) \subset \pi^{n+i} L$, so setzen wir $m := n + i$; dann ist m echt größer als $\max(2h, h+k)$, und wir finden nach Annahme ein N-Tupel $\boldsymbol{y}_i \in A^N$, für welches die Relationen $\boldsymbol{y}_i \equiv 0 \bmod \pi^{n+i-h}$ und $I(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{y}_i) \subset \pi^{2(n+i)-2h} L$ erfüllt sind. Nun definieren wir

$$\boldsymbol{a}_{i+1} := \boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{y}_i \quad .$$

Die Zahl n ist streng größer als $2h$; somit folgt, daß $\pi^{n+i+1} L$ in $I(\boldsymbol{a}_{i+1})$ liegt und daß $\boldsymbol{y}_i$ modulo $\pi^{h+1} L$ verschwindet. Da $\pi^h A$ in $H(\boldsymbol{a}_i)$ enthalten ist, existiert ein Element f in $H \subset A[T]$, welches der Gleichung $f(\boldsymbol{a}_i) = \pi^h$ genügt. Anhand der Taylorentwicklung von $f(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{y}_i)$ sehen wir, daß die Differenz $f(\boldsymbol{a}_i) - f(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{y}_i) \in A$ in dem durch die Komponenten von $\boldsymbol{y}_i$ erzeugten Ideal enthalten ist; die Kongruenz $\boldsymbol{y}_i \equiv 0 \bmod \pi^{h+1}$ zeigt somit, daß ein Element $a \in A$ existiert, derart daß $f(\boldsymbol{a}_i) - f(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{y}_i)$ mit $a\pi^{h+1}$ übereinstimmt. Nach Wahl von f ist $f(\boldsymbol{a}_i)$ gleich π^h; folglich ist $f(\boldsymbol{a}_{i+1})$ gleich $\pi^h(1 - a\pi)$. Da $1 - a\pi$ aufgrund der Vollständigkeit von A vermöge der geometrischen Reihe invertierbar ist, liegt $\pi^h A$ somit in $H(\boldsymbol{a}_{i+1})$. Folglich ist die Folge $(\boldsymbol{a}_i)_{i \geq 0}$ rekursiv wohldefiniert; da $\boldsymbol{y}_i$ modulo $\pi^{n+i-h} L$ verschwindet, konvergiert sie gegen ein Element $\boldsymbol{a}^0 \in A^N$ welches modulo $\pi^{n-h} L$ mit $\boldsymbol{a}$ übereinstimmt. Da die Elemente aus I als Polynomfunktionen $A^N \to A$ bezüglich π-adischer Topologien stetig, zeigt die Inklusion $I(\boldsymbol{a}_{i+1}) \subset \pi^{n+i+1} A$, daß $I(\boldsymbol{a}^0)$ verschwindet; somit leistet $\boldsymbol{a}^0$ das Verlangte.

Es bleibt zu zeigen, daß tatsächlich zu jeder Zahl $m \geq n$ und jedem N-Tupel $\boldsymbol{b} \in A^N$ mit $H(\boldsymbol{b}) \supset \pi^h A$ und $I(\boldsymbol{b}) \subset \pi^m L$ ein N-Tupel $\boldsymbol{y}$ existiert, welches den Bedingungen ($\dagger$) genügt. Sei M die Jacobimatrix

$$M := \left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq i \leq N}} \quad ,$$

und sei $M(\boldsymbol{b}) \in M(A, q, N)$ die Matrix, welche durch Einsetzen von $\boldsymbol{b}$ in die Komponenten von M entsteht. Für jedes N-Tupel $\boldsymbol{y} = y_1, \dots, y_N$ in A^N betrachten wir die Taylorentwicklung

$$\begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y}) \\ \vdots \\ f_q(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{b}) \\ \vdots \\ f_q(\boldsymbol{b}) \end{bmatrix} - M(\boldsymbol{b}) \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} + \sum_{i,j=1}^{N} y_i y_j Q_{ij}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \quad ,$$

wobei es sich bei den Komponenten der q-Tupel $Q_{ij}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \in A^q$ um Polynome in den Komponenten von $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{y}$ handelt. Angenommen, wir können das N-Tupel $\boldsymbol{y}$ so wählen, daß es modulo $\pi^{m-h} L$ verschwindet und die Kongruenz

$$\begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{b}) \\ \vdots \\ f_q(\boldsymbol{b}) \end{bmatrix} \equiv M(\boldsymbol{b}) \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad \bmod \quad \pi^{2m-2h} L \qquad (\dagger\dagger)$$

erfüllt. Aufgrund der Kongruenz $\boldsymbol{y} \equiv 0 \bmod \pi^{m-h} L$ verschwinden die Terme $y_i y_j Q_{ij}$ modulo $\pi^{2m-2h} L$, und die betrachtete Taylorentwicklung zeigt, daß $f_i(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y})$ für alle

$i \in \{1, \dots, q\}$ modulo π^{2m-2h} trivial ist; somit sehen wir, daß $\boldsymbol{y}$ den Bedingungen $(\dagger)$ genügt.

Es bleibt zu zeigen, daß unter den betrachteten Voraussetzungen tatsächlich ein n-Tupel $\boldsymbol{y} \in A^N$ existiert, welches modulo $\pi^{m-h}L$ verschwindet und die Kongruenz $(\dagger\dagger)$ erfüllt. Angenommen, zu jedem 4-Tupel $(p, \boldsymbol{s}, \Delta_s, k_s)$ mit $p \in \{1, \dots, q\}$, $\boldsymbol{s} \in \mathcal{A}_p$, einem p-Minor Δ_s von $M_{\boldsymbol{s}}$ und einem Element $k_s \in K_{\boldsymbol{s}}$ existiert ein N-Tupel $\boldsymbol{z} = z_1, \dots, z_N$ in A^N, welches modulo $\pi^m L$ trivial ist und der Kongruenz

$$k_s(\boldsymbol{b})\Delta_s(\boldsymbol{b}) \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{b}) \\ \vdots \\ f_q(\boldsymbol{b}) \end{bmatrix} \equiv M(\boldsymbol{b}) \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} \mod \pi^{2m}L \qquad (\dagger\,\dagger\,\dagger)$$

genügt. Da H in $\sum_{p,\boldsymbol{s}} K_{\boldsymbol{s}} J_{\boldsymbol{s}}$ enthalten ist, wird H von Elementen des Typs $k_s\Delta_s$ erzeugt, und nach Voraussetzung liegt π^h in $H(\boldsymbol{b})$; aufgrund unserer Annahme existiert somit ein N-Tupel $\boldsymbol{z}$ in A^N, welches modulo $\pi^m L$ trivial ist und die Kongruenz

$$\pi^h \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{b}) \\ \vdots \\ f_q(\boldsymbol{b}) \end{bmatrix} \equiv M(\boldsymbol{b}) \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} \mod \pi^{2m}L$$

erfüllt. Wir wählen ein N-Tupel $\boldsymbol{x}$ in L^N, derart daß $\boldsymbol{z}$ durch $\pi^m\boldsymbol{x}$ gegeben ist, und setzen $\boldsymbol{y} := \pi^{m-h}\boldsymbol{x}$. Dann verschwindet $\boldsymbol{y}$ modulo $\pi^{m-h}L$, und $\boldsymbol{z}$ ist gleich $\pi^h\boldsymbol{y}$; insbesondere genügt $\boldsymbol{y}$ der Kongruenz

$$\pi^h \left(\begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{b}) \\ \vdots \\ f_q(\boldsymbol{b}) \end{bmatrix} - M(\boldsymbol{b}) \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \right) \equiv 0 \mod \pi^{2m}L \quad .$$

Wir bezeichnen den geklammerten Term in vorstehender Gleichung vorübergehend mit b. Es existiert also ein Element c in L, welches die Gleichung

$$\pi^h(b - \pi^{2m-h}c) = 0$$

erfüllt. Da $I(\boldsymbol{b})$ in $\pi^m L$ enthalten ist, liegen insbesondere die Elemente $f_j(\boldsymbol{b})$ in $\pi^m L$, und mit $\boldsymbol{y}$ ist somit auch b modulo $\pi^{m-h}L$ trivial; folglich besteht die Relation

$$b - \pi^{2m-h}c \in \pi^{m-h}L \quad .$$

Nach Voraussetzung ist mit $n - h$ auch $m - h$ echt größer als k, und es folgt

$$\pi^{m-h}A \cap \Lambda = 0 \quad ;$$

somit ist der A-Modul $\pi^{m-h}L$ frei von π-Torsion. Die Gleichung $\pi^h(b-\pi^{2m-h}c) = 0$ impliziert also $b-\pi^{2m-h}c = 0$, und somit ist b in $\pi^{2m-h}L$ enthalten; folglich genügt das modulo $\pi^{m-h}L$ triviale N-Tupel $\boldsymbol{y}$ der Kongruenz $(\dagger\dagger)$, wie gewünscht.

Es bleibt nachzuweisen, daß tatsächlich zu jedem Minor Δ_s und jedem Element $k_s \in K_{\boldsymbol{s}}$ ein N-Tupel $\boldsymbol{z}$ in A^N existiert, welches modulo $\pi^m L$ verschwindet und die Kongruenz $(\dagger\,\dagger\,\dagger)$ erfüllt. Um die Schreibweise zu vereinfachen, betrachten wir ohne Einschränkung den Multiindex $\boldsymbol{s} := (1, \dots, p) \in \mathcal{A}_p$ sowie den p-Minor Δ von $M_{\boldsymbol{s}}$, welcher bezüglich der ersten p Variablen gebildet ist. Für das betrachtete Element $k_s \in K_{\boldsymbol{s}}$ schreiben wir kurz k. Nach Definition von $K_{\boldsymbol{s}}$ existieren zu Indexpaaren $(i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{p + 1, \dots, q\}$ Polynome λ_{ij} in $A[T]$, welche den Gleichungen

$$kf_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} f_i$$

genügen. Sei l eine Zahl zwischen 1 und N; da die f_i, f_j in I enthalten sind, liefert partielles Ableiten nach T_l die Kongruenzen

$$k\frac{\partial f_j}{\partial T_l} \equiv \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial T_l} \quad \mod I \quad .$$

Werten wir beide Relationen in $\boldsymbol{b}$ aus, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Inklusionen $I(\boldsymbol{b}) \subset \pi^m L \subset \pi^m A$ die Beziehungen

$$\begin{cases} k(\boldsymbol{b}) f_j(\boldsymbol{b}) & = \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(\boldsymbol{b}) f_i(\boldsymbol{b}) \\ k(\boldsymbol{b}) \frac{\partial f_j}{\partial T_l}(\boldsymbol{b}) & \equiv \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(\boldsymbol{b}) \frac{\partial f_i}{\partial T_l}(\boldsymbol{b}) \quad \mod \quad \pi^m \quad , \end{cases} \qquad (*)$$

wo wiederum j in $\{p+1, \ldots, q\}$ und l in $\{1, \ldots, N\}$ variiert. Sei $J \subset A$ ein beliebiges Ideal, und sei $\boldsymbol{h} = h_1, \ldots, h_N$ ein N-Tupel mit Komponenten in J; wir definieren das q-Tupel $\boldsymbol{g} = g_1, \ldots, g_q \in A^q$ durch die Zuordnung

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix} := M(\boldsymbol{b}) \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} \quad .$$

Da die Elemente $\frac{\partial f_i}{\partial T_l}(\boldsymbol{b})$ mit den Koeffizienten von $M(\boldsymbol{b})$ übereinstimmen, impliziert die zweite Relation in $(*)$ für alle $j \in \{p+1, \ldots, N\}$ die Kongruenz

$$k(\boldsymbol{b}) g_j \equiv \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(\boldsymbol{b}) g_j \quad \mod \quad \pi^m J \quad . \qquad (**)$$

Sei nun

$$M_0 := \left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \quad ,$$

die betrachtete Untermatrix von M, und sei N_0 die zu M_0 adjungierte Matrix; nach der Cramerschen Regel besteht die Gleichung

$$M_0 N_0 = N_0 M_0 = \Delta \ 1_p \quad .$$

Sei N_0' die $(N \times p)$-Matrix, deren oberes Quadrat mit N_0 übereinstimmt und deren übrigen Einträge trivial sind. Wir erklären Elemente $u_{p+1}, \ldots, u_q \in A$ durch die Gleichung

$$M(\boldsymbol{b}) N_0'(\boldsymbol{b}) \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{b}) \\ \vdots \\ f_p(\boldsymbol{b}) \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \Delta(\boldsymbol{b})\, f_1(\boldsymbol{b}) \\ \vdots \\ \Delta(\boldsymbol{b})\, f_p(\boldsymbol{b}) \\ u_{p+1} \\ \vdots \\ u_q \end{bmatrix} \quad . \qquad (***)$$

Wir setzen nun $J := \pi^m L$; da $I(\boldsymbol{b})$ in $\pi^m L$ liegt, sind dann die Komponenten des N-Tupels $\boldsymbol{h} := N_0'(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ in J enthalten. Nach $(**)$ besteht somit für alle $j \in \{p+1, \ldots, q\}$ die Kongruenz

$$k(\boldsymbol{b}) u_j \equiv \Delta(\boldsymbol{b}) \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(\boldsymbol{b}) f_i(\boldsymbol{b}) \quad \mod \quad \pi^{2m} L \quad .$$

Nach $(*)$ gilt jedoch für alle $j \in \{p+1, \ldots, q\}$ die Gleichung

$$k(\boldsymbol{b})f_j(\boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(\boldsymbol{b})f_i(\boldsymbol{b}) \quad ;$$

somit folgt die Kongruenz

$$k(\boldsymbol{b})u_j \equiv k(\boldsymbol{b})\Delta(\boldsymbol{b})f_j(\boldsymbol{b}) \bmod \pi^{2m}L \quad .$$

Multiplizieren wir $(***)$ mit $k(\boldsymbol{b})$, so erhalten wir also die Kongruenz

$$k(\boldsymbol{b})M(\boldsymbol{b})N_0'(\boldsymbol{b}) \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{b}) \\ \vdots \\ f_p(\boldsymbol{b}) \end{bmatrix} \equiv k(\boldsymbol{b})\Delta(\boldsymbol{b}) \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{b}) \\ \vdots \\ f_q(\boldsymbol{b}) \end{bmatrix} \quad \bmod \quad \pi^{2m}L \quad ,$$

so daß

$$\boldsymbol{z} := k(\boldsymbol{b})N_0'(\boldsymbol{b}) \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{b}) \\ \vdots \\ f_p(\boldsymbol{b}) \end{bmatrix}$$

der Kongruenz $(\dagger\dagger\dagger)$ genügt. Da $I(\boldsymbol{b})$ nach Wahl von $\boldsymbol{b}$ in $\pi^m L$ liegt, ist $\boldsymbol{z}$ modulo $\pi^m L$ trivial, so daß $\boldsymbol{z}$ die gewünschten Eigenschaften besitzt. Damit ist das Lemma bewiesen. □

5.2 Fitting-Ideale und die Invariante h

Sei R ein diskreter Bewertungsring, sei A eine noethersche R-Algebra, und sei $\underline{X}$ ein affines A-Schema von endlichem Typ, dessen generische Faser über A glatt ist; ferner sei letztere über A von konstanter relativer Dimension d. Wir fixieren für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ eine Darstellung von $\underline{X}$ als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{A}_A^N$ und betrachten das von den $(N-d)$-Minoren einer zugehörigen Jacobi-Matrix erzeugte Ideal $J \subset A[T]$, wobei $T = T_1, \ldots, T_N$ ein System von Variablen bezeichnet. Wie im Beweis von Lemma 5.1.1 zeigt das Jacobi-Kriterium ([BLR] 2.2/7), daß der Support von J mit der generischen Faser von $\underline{X}$ leeren Schnitt besitzt. Somit existiert eine kleinste natürliche Zahl h, derart daß π^h in dem von J in dem Ring B der globalen Funktionen von Y erzeugten Ideal enthalten ist. A priori ist nicht klar, inwieweit das Ideal $J \cdot B$ und somit die Zahl h von der Wahl der Darstellung von Y abhängt. Wir werden zeigen, daß sich $J \cdot B$ mit dem d-ten Fitting-Ideal des Differentialmoduls $\Omega^1_{Y/A}$ identifiziert und somit von der Wahl einer Darstellung unabhängig ist. Wir beginnen mit allgemeinen Aussagen über freie Auflösungen von Moduln:

5.2.1 Definition. *Sei B ein Ring. Ein Komplex von B-Moduln heißt trivial, wenn er zu einer direkten Summe von Komplexen der Gestalt*

$$\cdots \to 0 \to B \overset{\mathrm{id}}{\to} B \to 0 \to \cdots$$

isomorph ist.

5.2.2 Lemma. *Sei B ein lokaler Ring, und sei $H_* : \cdots \to H_1 \to H_0 \to 0$ ein exakter Komplex freier B-Moduln. Dann ist H zu einem trivialen Komplex isomorph.*

Beweis. Da H_0 frei ist, besitzt der Epimorphismus $H_1 \to H_0$ einen Schnitt; folglich existiert ein kanonsicher Isomorphismus $H_1 \cong H_0 \oplus H_1'$ derart daß sich H_1' mit ker $(H_1 \to H_0) = $ im $(H_2 \to H_1)$ und $H_1 \to H_0$ mit der Projektion auf den ersten Faktor identifizieren. Somit ist H_* zu der direkten Summe der Komplexe

$$\begin{array}{lcr} H'_* & : & 0 \to H_0 \xrightarrow{\mathrm{id}} H_0 \to 0 \\ H''_* & : & \cdots \to H_n \to \cdots \to H_2 \to H'_1 \to 0 \end{array}$$

isomorph. Der Modul H'_1 ist projektiv, also bereits frei, denn B ist lokal. Ein offensichtliches Induktionsargument zeigt, daß sich H_* als nicht notwendig endliche direkte Summe trivialer Komplexe schreiben läßt, also zu einem trivialen Komplex isomorph ist. □

Wir sind nun in der Lage, freie Auflösungen endlicher Moduln über lokalen Ringen explizit zu charakterisieren:

5.2.3 Satz. *Sei B ein lokaler Ring, und sei M ein endlicher B-Modul. Dann ist jede freie Auflösung von M zu der direkten Summe einer minimalen freien Auflösung von M und eines trivialen Komplexes isomorph. Insbesondere ist die minimale Auflösung von M bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei F_* eine minimale freie Auflösung von M, und sei G_* eine beliebige freie Auflösung von M. Da die Komponenten von F_* projektiv sind und G_* azyklisch ist, setzt sich die Identität auf M zu einem Homomorphismus $\alpha : F_* \to G_*$ fort; entsprechend erhalten wir einen Homomorphismus $\beta : G_* \to F_*$. Da die Fortsetzung $\beta\alpha : F_* \to F_*$ der Identität id_M bis auf Homotopie eindeutig ist, erkennen wir $\mathrm{id}_{F_*} - \beta\alpha$ als nullhomotop. Folglich existieren Homomorphismen $s_i : F_i \to F_{i+1}$, welche der Gleichung $\mathrm{id}_{F_i} - \beta_i\alpha_i = \delta_{i+1}s_i + s_{i-1}\delta_i$ genügen, wo δ_* das Differential von F_* bezeichnet. Wir schreiben $\mathfrak{m}$ für das maximale Ideal von B. Da F_* minimal ist, liegt das Bild von δ_* in $\mathfrak{m}F_{*-1}$; folglich ist $(\mathrm{id}_{F_i} - \beta_i\alpha_i)(F_i)$ in $\mathfrak{m}F_i$ enthalten, so daß $\beta\alpha$ modulo $\mathfrak{m}F_*$ mit id_{F_*} übereinstimmt. Die Determinante der zu $\beta_i\alpha_i$ korrespondierenden Matrix ist somit in $B/\mathfrak{m}$ von Null verschieden und folglich in B eine Einheit; somit ist $\beta\alpha$ ein Automorphismus von F_*, welcher sich auf M zur Identität beschränkt. Indem wir ohne Einschränkung β durch $(\beta\alpha)^{-1}\beta$ ersetzen, dürfen wir annehmen, daß $\beta\alpha$ mit id_{F_*} übereinstimmt; dann ist α eine Inklusion, und β ist ein Schnitt zu α. Wir setzen $H_* :=$ coker α; dann sind die Komponenten H_i von H_* direkte Summanden endlicher freier Moduln, also projektiv und, da A lokal ist, folglich frei. Die Spaltung β ist ein Morphismus von Komplexen und induziert somit einen Isomorphismus $H_*(G_*) \cong H_*(F_*) \oplus H_*(H_*)$ der Homologiekomplexe. Da α als Fortsetung von id_M einen Isomorphismus $H_*(F_*) \cong H_*(G_*)$ induziert, besitzt H_* triviale Homologie, ist also nach Lemma 5.2.2 trivial, wie gewünscht. □

Wir definieren nun die Fitting-Ideale eines endlichen B-Moduls:

5.2.4 Definition. *Sei B ein Ring, und sei M ein endlicher B-Modul. Wir fixieren eine endliche Präsentation $B^m \xrightarrow{\varphi} B^n \to M \to 0$ von M. Sei $i \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl; Für $n - i \geq 0$ sei $J_{n-i,\varphi} \subset B$ das von den $(n-i)$-Minoren der zu φ korrespondierenden Matrix erzeugte Ideal, und für $n - i < 0$ sei $J_{n-i,\varphi} \subset B$ das Einheitsideal. Dann heißt* $\mathrm{Fitt}_i(M) := J_{n-i,\varphi}$ *das i-te Fitting-Ideal von M.*

Bemerkung. Sei $F \xrightarrow{\varphi} G \to M \to 0$ eine endliche Präsentation von M, und sei G^* der zu G duale B-Modul. Da sich das Ideal $J_{r-i,\varphi}$ für $r - i \geq 0$ mit dem Bild des durch φ induzierten Homomorphismus $\bigwedge^i F \otimes \bigwedge^i G^* \to B$ identifiziert, ist $J_{r-i,\varphi}$ unter B-Isomorphismen von φ invariant und insbesondere von der Wahl bestimmter Basen unabhängig.

Wir zeigen, daß die Fitting-Ideale eines endlichen B-Moduls nicht von der Wahl einer endlichen Präsentation abhängen; diese Tatsache rechtfertigt in Definition 5.2.4 eingeführte Bezeichung:

5.2.5 Satz. *Sei B ein Ring, sei M ein endlich erzeugter A-Modul, und seien $F \xrightarrow{\varphi} G \to M \to 0$, $F' \xrightarrow{\varphi'} G' \to M \to 0$ endliche Präsentationen von M. Setzen wir $n := \operatorname{rg} G$, $n' := \operatorname{rg} G'$, so stimmt $J_{n-i,\varphi}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ mit $J_{n'-i,\varphi'}$ überein.*

Beweis. Sei i eine ganze Zahl. Die Gleichung $J_{n-i,\varphi} = J_{n'-i,\varphi'}$ ist in den Punkten von $\operatorname{Spec} B$ zu verifizieren; sei also ohne Einschränkung B lokal. Wir dürfen annehmen, daß die durch φ' gegebene Präsentation minimal ist. Da $J_{n-i,\varphi}$ unter B-Isomorphismen von φ invariant ist, dürfen wir nach Satz 5.2.3 annehmen, daß φ als direkte Summe von φ' und trivialen Komplexen gegeben ist. Schreiben wir φ, φ' für die Matrizen von φ, φ' nach Wahl von Basen, so dürfen wir also annehmen, daß φ in der Gestalt

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi' & 0 & 0 \\ 0 & 1_p & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, wo p die notwendig nicht-negative Differenz $n - n'$ bezeichne. Es ist zu zeigen, daß $J_{j,\varphi'}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ mit $J_{j+p,\varphi}$ übereinstimmt; offenbar ist $I_{j,\varphi'}$ in $I_{j+p,\varphi}$ enthalten. Sei Δ ein $(j+p)$-Minor von φ; dann existieren ganze Zahlen j', $p' \le p$, derart daß $j' + p'$ mit $j + p$ übereinstimmt und sich Δ mit dem Produkt eines j'-Minors von φ' und eines p'-Minors von 1_p, also mit einem j'-Minor von φ' identifiziert; folglich ist $J_{j+p,\varphi}$ in dem Ideal $\sum_{j \le j' \le j+p} J_{j',\varphi'}$ enthalten. Nach der Cramerschen Regel liegt $J_{j',\varphi'}$ für $j' \ge j$ in $J_{j,\varphi'}$; folglich stimmt $J_{j+p,\varphi}$ mit $J_{j,\varphi'}$ überein, wie gewünscht. □

5.2.6 Bemerkung und Definition. *Aufgrund der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts sind Fitting-Ideale mit Basiswechsel verträglich. Insbesondere kommutieren sie mit Lokalisierung, so daß wir für $i \in \mathbb{Z}$ in der gewohnten Weise einem quasi-kohärenten Modul $\mathcal{F}$ auf einem Schema Y eine quasi-kohärente Idealgarbe* $\operatorname{Fitt}_i(\mathcal{F})$ *zuordnen können, welche auf offenen affinen Unterschemata* $\operatorname{Spec} B$ *von X zu dem Fittingideal des zu $\mathcal{F}$ korrespondierenden B-Moduls assoziiert ist.*

Wir zeigen nun wie angekündigt, daß die Pullbacks von Jacobi-Idealen mti den Fitting-Idealen des Differentialmoduls übereinstimmen:

5.2.7 Lemma. *Sei S ein Schema, sei X ein S-Schema von lokal endlichem Typ, und sei $x \in X$ ein Punkt. Wir fixieren eine hinreichend kleine Umgebung U von x zusammen mit einer abgeschlossenen Immersion $j : U \hookrightarrow Z$ in ein glattes S-Schema Z; sei*

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to j^*\Omega^1_{Z/S} \to \Omega^1_{X/S} \to 0$$

die zugehörige exakte Sequenz von $\mathcal{O}_U$-Moduln. Sei $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{O}_Z$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{I}$ bei x, und seien $z_1, \dots, z_m \in \mathcal{O}_Z$ lokale Schnitte bei x, deren Differentiale lokal bei x eine Basis von $\Omega^1_{Z/S}$ bilden. Sei $i \le n$ eine ganze Zahl; dann ist $Fitt_i(\Omega^1_{X/S})$ bei x von dem j^*-Pullback der $(n-i)$-Minoren der Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial z_j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

erzeugt, wobei die lokalen Schnitte $\frac{\partial g_i}{\partial z_j} \in \mathcal{O}_Z$ die Elemente $dg_i \in \Omega^1_{Z/S}$ bezüglich der Basis $dz_1, \dots, dz_m$ darstellen.

Beweis. Die Aussage ist lokal auf X zu verifizieren; sei also ohne Einschränkung $X = U = \mathrm{Spec}\, B$ affin, derart daß alle auftretenden Schnitte auf ganz X erklärt sind. Sei F der von Symbolen $dg'_1, \ldots, dg'_n$ erzeugte freie B-Modul; dann erklärt die Zuordnung

$$\varphi : F \to j^*\Omega^1_{Z/S} \quad , \quad dg'_i \mapsto j^* \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial z_j} dz_j$$

eine endliche Präsentation von $\Omega^1_{X/S}$, welche nach Satz 5.2.5 zur Berechnung der Fitting-Ideale von $\Omega^1_{X/S}$ verwendet werden kann. □

Wir kehren zurück zu der zu Beginn dieses Abschnitts beschriebenen Situation: Sei R ein diskreter Bewertungsring, sei A eine noethersche R-Algebra, sei $\underline{X} = \mathrm{Spec}\, B$ ein affines A-Schema mit über A glatter generischer Faser von A-relativer Dimension d, und sei $J \subset A[T]$ das Ideal aller $(N-d)$-Minoren einer zu einer Einbettung $\underline{X} \subset \mathbb{A}^N_A$ assoziierten Jacobimatrix.

5.2.8 Bemerkung und Definition. *Nach Lemma 5.2.7 identifiziert sich das von J in B erzeugte Ideal $J \cdot B$ mit $\mathrm{Fitt}_d(\Omega^1_{\underline{X}/A})$; insbesondere ist $J \cdot B$ von der Wahl einer Darstellung von $\underline{X}$ unabhängig. Bei der kleinsten natürlichen Zahl $h \in \mathbb{N}$, für welche π^h in $J \cdot B$ enthalten ist, handelt es sich folglich um eine für das A-Schema $\underline{X}$ charakteristische Größe, welche wir mit $h(\underline{X}/A)$ bezeichnen.*

Bemerkung. Der Support von $\mathrm{Fitt}_d(\Omega^1_{\underline{X}/A})$ identifiziert sich mit dem Ort, wo $\Omega^1_{\underline{X}/A}$ nicht durch d Elemente erzeugt werden kann. Die Invariante h ist nach Definition die kleinste natürliche Zahl, für welche dieser Ort in der h-ten infinitesimalen Umgebung $\underline{X}_h$ der speziellen Faser enthalten ist. Je größer die Zahl h ist, desto näher liegt der betrachtete Ort also bei der generischen Faser.

Die Inveriante h ist unter treuflachem Basiswechsel stabil:

5.2.9 Lemma. *Sei A' eine A-Algebra; dann ist $h(\underline{X} \otimes_A A'/A')$ durch $h(\underline{X}/A)$ beschränkt. Ist A' über A treuflach, so stimmt $h(\underline{X} \otimes_A A'/A')$ mit $h(\underline{X}/A)$ überein.*

Beweis. Glattheit ist mit beliebigem Basiswechsel verträglich; folglich ist die generische Faser von $\underline{X} \otimes_A A'$ über A' glatt von konstanter relativer Dimension d. Da die Bildung der Jacobi-Ideale mit Basiswechsel kommutiert, stimmt das Ideal $J' := \mathrm{Fitt}_d(\Omega^1_{\underline{X} \otimes_A A'/A'})$ mit dem durch $J := \mathrm{Fitt}_d(\Omega^1_{\underline{X}/A})$ in $B' := B \otimes_A A'$ erzeugten Ideal überein; folglich ist $h' := h(\underline{X} \otimes_A A'/A')$ durch $h := h(\underline{X}/A)$ beschränkt. Der durch Multiplikation mit π^{h-1} gegebene Homomorphismus $\pi^{h-1} : B/J \to B/J$ ist aufgrund der Minimalität von h nicht trivial; ist A' also über A treuflach, so handelt es sich folglich auch bei dem induzierten Homomorphismus $\pi^{h-1} : B'/J' \to B'/J'$ nicht um den Nullhomomorphismus, und es folgt $h' \geq h$, also $h' = h$, wie gewünscht. □

Wir wollen abschließend zeigen, daß die Invariante $h(\underline{X}/A)$ für hinreichend großes n bereits durch die n-te Reduktion $\underline{X}_n$ von $\underline{X}$ determiniert ist:

5.2.10 Lemma. *Seien R^1, R^2 diskrete Bewertungsringe, sei $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, und für $i = 1, 2$ sei $\underline{X}^i$ ein affines R-Schemata endlichen Typs mit glatter generischer Faser von konstanter Dimension $d_1 = d_2$; wir setzen $h_i := h(\underline{X}^i/R^i)$. Existiert ein Isomorphismus $\underline{X}^1_{m-1} \cong \underline{X}^2_{m-1}$ über einem Isomorphismus $R^1_{m-1} \cong R^2_{m-1}$ und ist eine der Zahlen h_i nicht größer als m, so stimmen h_1 und h_2 überein.*

Beweis. Wir schreiben $\underline{X}^i = \operatorname{Spec} B^i$, $d := d_1 = d_2$, $J^{(i)} := \operatorname{Fitt}_d(\Omega^1_{\underline{X}^i,R^i})$ und fixieren uniformisierende Elemente $\pi_i \in R^i$. Die Bildung von Jacobi-Matrizen kommutiert mit Basiswechsel; folglich stimmen die von den Fitting-Idealen in den reduzierten Ringen erzeugten Ideale $J^{(i)}B^i_{m-1}$ unter dem gegebenen Isomorphismus überein. Da $\pi_1^{h_1}$ in $J^{(1)}$ enthalten ist, existieren somit Elemente $b \in B^2$, $j \in J^{(2)}$, welche die Gleichung ${\pi_2}^{h_1} = j + b{\pi_2}^m$ erfüllen. Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen, daß in dem Fall $h_1 \leq m$ die Ungleichung $h_2 \leq h_1$ erfüllt ist. Sei also h_1 kleiner oder gleich m; dann besteht in B^2 die Gleichung

$$\begin{aligned} {\pi_2}^{h_1} &= j + (a{\pi_2}^{m-h_1}){\pi_2}^{h_1} \\ &= j + (a{\pi_2}^{m-h_1})(j + (a{\pi_2}^{m-h_1}){\pi_2}^{h_1}) \\ &= j(1 + a{\pi_2}^{m-h_1}) + (a{\pi_2}^{m-h_1})^2{\pi_2}^{h_1} \quad . \end{aligned}$$

Induktiv sehen wir, daß für alle $l \in \mathbb{N}$ die Kongruenz

$${\pi_2}^{h_1} \equiv (a{\pi_2}^{m-h_1})^l{\pi_2}^{h_1} \bmod J^{(2)}$$

erfüllt ist. Da ${\pi_2}^{(m-h_1)l}$ für $l \gg 0$ in $J^{(2)}$ enthalten ist, liegt somit bereits ${\pi_2}^{h_1}$ in $J^{(2)}$, und es folgt $h_2 \leq h_1$, wie gewünscht. □

5.3 Folgerungen aus Lemma [Elk] I.1

Sei R ein diskreter Bewertungsring, sei $\pi \in R$ ein uniformisierendes Element, und sei A eine noethersche π-adisch vollständige R-Algebra. Ferner sei $\underline{X}$ ein affines A-Schema von endlichem Typ, dessen generische Faser über A glatt ist von relativer Dimension d, und sei $h := h(\underline{X}/A)$ die in Definition 5.2.8 erkläre Invariante von $\underline{X}$. Ist n eine hinreichend große natürliche Zahl, so besitzt unter gewissen Bedingungen an $\underline{X}$ jeder A_{n-h}-wertige Punkt von $\underline{X}$, welche sich zu einem A_n-wertigen Punkt ausdehnt, bereits eine Fortsetzung zu einem A-wertigen Punkt; dies folgt ohne Mühe aus Lemma 5.1.3:

Notation. Sei $\Lambda \subset A$ das Ideal der π-Torsion; nach Bemerkung 5.1.2 existiert eine natürliche Zahl k, für welche $\pi^{k+1}A \cap \Lambda$ verschwindet; wir wählen k minimal mit dieser Eigenschaft.

5.3.1 Lemma. *Angenommen, es existiert für genügend großes $N \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene Immersion $\underline{X} \hookrightarrow \mathbb{A}^N_A$, deren Relationenideal durch $N - d$ globale Funktionen auf $\mathbb{A}^N_A$ erzeugt ist. Dann stimmt für $n \geq \max(2h, h+k)$ das Bild der kanonischen Abbildung $\underline{X}(A) \to \underline{X}(A_{n-h})$ mit dem Bild der kanonischen Abbildung $\underline{X}(A_n) \to \underline{X}(A_{n-h})$ überein.*

Beweis. Sei $T = T_1, \ldots, T_N$ ein System von Variablen, und sei $I \subset A[T]$ das zu der gegebenen abgeschlossenen Immersion $\underline{X} \subset \mathbb{A}^N_A$ korrrespondierende Ideal. Das kanonische kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A[T]/I \arrow[r, dashed] \arrow[dr, dashed] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/\pi^{n-h+1}A \\ & A/\pi^{n+1}A \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

zeigt unmittelbar, daß das Bild von $\underline{X}(A) \to \underline{X}(A_{n-h})$ in dem Bild von $\underline{X}(A_n) \to \underline{X}(A_{n-h})$ enthalten ist. Es bleibt zu zeigen, daß zu jedem N-Tupel $\boldsymbol{a} \in A^N$, für welches $I(\boldsymbol{a})$ in $\pi^{n+1}A$ enthalten ist, ein N-Tupel $\boldsymbol{a}^0 \in A^N$ existiert, derart daß

$I(\boldsymbol{a}^0)$ verschwindet und die Komponenten von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a}^0$ modulo π^{n-h+1} übereinstimmen. Sei also $\boldsymbol{a} \in A^N$ ein N-Tupel, für welches $I(\boldsymbol{a})$ modulo $\pi^{n+1}A$ trivial ist. Wir fixieren ein $(N-d)$-elementiges Erzeugendensystem von I; sei $J \subset A[T]$ das von den $(N-d)$-Minoren der zugehörigen Jacobimatrix erzeugte Ideal. Da π^h in $J \cdot A[T]/I$ enthalten ist, existieren Elemente $j \in J$, $i \in I$, welche der Gleichung $\pi^h = j + i$ genügen. Wir fixieren ein Element $g \in A$, für welches $i(\boldsymbol{a})$ durch $\pi^{n+1}g$ gegeben ist. Setzen wir $\boldsymbol{a}$ in die betrachtete Darstellung von π^h ein, so erhalten wir die Gleichung $\pi^h = j(\boldsymbol{a}) + \pi^{n+1}g$; folglich ist $j(\boldsymbol{a})$ gleich $\pi^h(1-\pi^{n-h+1}g)$. Aufgrund der π-adischen Vollständigkeit von A ist das Element $(1-\pi^{n-h+1}g)$ in A eine Einheit; folglich ist π^h in $J(\boldsymbol{a})$ enthalten. Sei $\boldsymbol{s}$ der Multiindex $(1, \ldots, N-d)$; da wir ein $(N-d)$-elementiges Erzeugendensystem von I fixiert haben, handelt es sich bei dem in Abschnitt 5.1 definierten Ideal $K_{\boldsymbol{s}} = (I_{\boldsymbol{s}} : I)$ um das Einheitsideal. Nach Lemma 5.1.3, angewendet auf die Ideale $H := J$, $L := A$ und das N-Tupel $\boldsymbol{a}$, existiert somit ein N-Tupel $\boldsymbol{a}_0 \in A^N$, welches den gestellten Bedingungen genügt. □

Ist die generische Faser von $\underline{X}$ über A nicht leer, so ist sie stets für $N \gg 0$ durch $N-d$ Gleichungen als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{A}_A^N$ gegeben; um den Voraussetzungen von Lemma 5.3.1 zu genügen, muß bereits ganz $\underline{X}$ diese Eigenschaft besitzen. Ist $\underline{X}$ über A ein vollständiger Durchschnitt, so ist die genannte Bedingung zumindest lokal auf $\underline{X}$ erfüllt; ist also A lokal, so lassen sich nach Lemma 5.3.1 auch in dieser Situation A_n-wertige Punkte von $\underline{X}$ modulo π^{n-h} nach A ausdehnen:

5.3.2 Lemma. *Sei A lokal, sei die generische Faser von $\underline{Y}$ nicht leer, und sei $\underline{X}$ über A ein vollständiger Durchschnitt. Dann stimmt für $n \geq \max(2h, h+k)$ das Bild von $\underline{X}(A) \to \underline{X}(A_{n-h})$ mit dem Bild von $\underline{X}(A_n) \to \underline{X}(A_{n-h})$ überein.*

Beweis. Sei x ein Spec A_n-wertiger Punkt von $\underline{X}$. Wir unterscheiden in der Notation nicht zwischen x und dem Bild des abgeschlossenen Punkts von Spec A_n unter x; da stetige Abbildungen Spezialisierungen erhalten, faktorisiert der Morphismus x über jede offene Umgebung des Punktes x. Sei N eine genügend große natürliche Zahl, und sei $T = T_1, \ldots, T_N$ ein System von Variablen; wir fixieren eine abgeschlossene Immersion $j : \underline{X} \hookrightarrow \mathbb{A}_A^N = \operatorname{Spec} A[T]$. Da $\underline{X}$ bei x die Eigenschaft eines vollständigen Durchschnitts besitzt und da die Fasern des kanonische Morphismus $\mathbb{A}_A^N \to \operatorname{Spec} A$ nach Korollar 1.2.24 regulär sind, ist j nach Satz 2.2.2 bei x transversal regulär. Indem wir $\underline{X}$ verkleinern, wobei die Invariante h nach Lemma 5.2.9 höchstens abnimmt, dürfen wir $\underline{X}$ als transversal reguläres abgeschlossenes Unterschema von Spec $A[T]_f$ ansehen, wo f ein geeignetes Element aus $A[T]$ bezeichnet. Sei l die Länge einer transversal regulären Folge in $A[T]_f$, welche das zu $\underline{X}$ korrespondierende Ideal erzeugt. Nach Voraussetzung ist die generische Faser von $\underline{X}$ nicht leer und über A glatt von konstanter relativer Dimension d; insbesondere existiert eine nicht leere Faser von $\underline{X}$ über der generischen Faser von Spec A, welche glatt ist und konstante Dimension d besitzt. Nach Lemma 2.1.4 sind transversal reguläre Immersionen unter beliebigem Basiswechsel stabil; da der Polynomring in N Variablen über einem Körper nach Korollar 1.2.22 die Dimension N besitzt und da die Dimension eines noetherschen Rings bei Division durch ein reguläres Element um 1 abnimmt, folgt $l = N-d$. Sei Z eine Variable; schreiben wir $\operatorname{Spec} A[T]_f = \operatorname{Spec} A[T,Z]/(Zf-1)$, so sehen wir, daß $\underline{X}$ durch eine reguläre Folge der Länge $N-d+1$ als abgeschlossenes Unterschema von Spec $A[T,Z]$ realisiert ist. Somit haben wir das Problem auf den Fall reduziert, daß $\underline{X}$ den Voraussetzungen von Lemma 5.3.1 genügt; dieses liefert nun die Behauptung. □

Wir können die Resultate dieses Abschnitts dazu verwenden, mit Hilfe eines elementaren Basiswechselarguments Punkte bestimmter R-Schemata mit Werten in lokalen endlichen flachen Schemata über $\hat{R}$ zu approximieren:

5.3.3 Korollar. *Sei R ein diskreter Bewertungsring, und sei $\underline{X}$ ein R-Schema mit glatter generischer Faser von konstanter Dimension d; wir setzen $h := h(\underline{X}/R)$. Ferner sei C ein flaches affines π-adisch vollständiges Schema über der Komplettierung $\hat{R}$ von R. Wir betrachten den Fall, daß $\underline{X}$ einer der folgenden Bedingungen genügt:*

(*i*) *$\underline{X}$ besitzt für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ eine Darstellung als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{A}_A^N$, welche durch $N - d$ Gleichungen gegeben ist.*

(*ii*) *C ist lokal, die generische Faser von $\underline{X}$ ist nicht leer, und $\underline{X}$ ist über R ein vollständiger Durchschnitt.*

Dann dehnt sich für $n \geq 2h$ jeder C_{n-h}-wertige Punkt von $\underline{X}$, welcher durch einen C_n-wertigen Punkt induziert ist, zu einem C-wertigen Punkt aus. Mit anderen Worten, das Bild der kanonischen Abbildung $\underline{X}(C) \to \underline{X}(C_{n-h})$ stimmt mit dem Bild der kanonischen Abbildung $\underline{X}(C_n) \to \underline{X}(C_{n-h})$ überein.

Beweis. Wir schreiben $C = \operatorname{Spec} A$; sämtliche Eigenschaften von $\underline{X}$ über R übertragen sich auf $\underline{X} \otimes_R A$ über A. Sei π ein uniformisierendes Element von R. Als flache $\hat{R}$-Algebra ist A frei von π-Torsion; ferner ist A nach Voraussetzung π-adisch vollständig. Genügt $\underline{X}$ der Bedingung (i), so folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 5.3.1; im Fall von Bedingung (ii) schließen wir mit Lemma 5.3.2. □

Bemerkung. Ist C über $\hat{R}$ endlich, so ist C automatisch π-adisch vollständig; somit läßt sich Korollar 5.3.3 insbesondere auf Punkte mit Werten in lokalen endlichen vollständigen Durchschnitten anwenden.

6. Néron-Modelle von Gruppenschemata

Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K; ferner sei X ein glattes separiertes K-Schema. Die durch X gegebene Garbe auf dem kleinen glatten Situs über K induziert eine Garbe $\underline{X}^{\mathrm{NR}}$ auf dem kleinen glatten Situs über R; ist $\underline{X}^{\mathrm{NR}}$ durch ein glattes separiertes R-Modell von X repräsentierbar, so heißt $\underline{X}^{\mathrm{NR}}$ das Néron-Modell von X. Man kann zeigen, daß X genau dann ein Néron-Modell über R besitzt, wenn die Menge $X(K^{\mathrm{sh}})$ der K^{sh}-wertigen Punkte von X auf X beschränkt ist. Der Beweis dieser allgemeinen Tatsache findet sich in den Kapiteln 3-6 des Buches [BLR]; für eine Skizze des Beweises siehe [BLR] 1.3/1. Trägt X eine K-Gruppenstruktur, so ist die Situation übersichtlicher; wir werden für diesen Fall in Abschnitt 6.2 konkrete Verfahren zur direkten Konstruktion von Néron-Modellen behandeln.

Grundlegend für die Konstruktion glatter R-Modelle ist der Néronsche Glättungsprozeß. Er überführt ein R-Modell endlichen Typs von X in endlich vielen Schritten in ein glattes R-Modell, wobei sich in jedem Schritt das Néronsche Maß für den Glattheitsdefekt verringert. Wir geben zunächst einen Überblick über den Glättungsprozeß, wobei darauf verzichten, die Beweise im Detail auszuführen. Im Hinblick auf Abschnitt 7.3.3 diskutieren wir in diesem Zusammenhang die lokale Struktur von Dilatationen glatter Schemata.

Ist G ein glattes separiertes K-Gruppenschema, so besitzt die Garbe $\underline{G}^{\mathrm{NR}}$ ein kanonisches Unterobjekt, die sogenannte maximale beschränkte Untergruppe $\underline{G}^{\mathrm{NR},b}$. Wir werden in Abschnitt 6.2 durch Anwendung des Glättungsprozesses die Existenz von Gruppenglättungen beweisen; ferner werden wir zeigen, daß die Modelle $\underline{H}^{\mathrm{NR}}$, $\underline{H}^{\mathrm{NR},b}$ einer Untergruppe $H \subset G$ als Gruppenglättung des schematischen Abschlusses von H in $\underline{G}^{\mathrm{NR}}$ beziehungsweise $\underline{G}^{\mathrm{NR},b}$ rekonstruiert werden können, sofern das betrachtete Modell von G existiert. Unter Verwendung von Weil-Descenttechniken folgt hieraus insbesondere, daß $\underline{H}^{\mathrm{NR}}$ und $\underline{H}^{\mathrm{NR},b}$ existieren, falls dies nach endlichem freiem Basiswechsel R'/R der Fall ist. Wir werden diese Resultate in Abschnitt 6.4 dazu verwenden, Néron-Modelle von Tori über vollständig bewerteten Körpern in expliziter Weise zu konstruieren. Hierfür benötigen wir noch die Tatsache, daß endliche Erweiterungen vollständig bewerteter Körper endliche freie Erweiterungen ihrer Bewertungsringe induzieren; wir werden dies in Abschnitt 6.3 beweisen.

6.1 Dilatationen und der Glättungsprozeß

Wir geben in diesem Abschnitt einen Überblick über Dilatationen und den Néronschen Glättungsprozess; siehe hierzu auch Kapitel 3 in [BLR] oder die Arbeit [W]. Wir werden hierbei lediglich Aussagen zur lokalen Struktur von Dilatationen glatter Schemata beweisen. Sei stets R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K, sei $\pi \in R$ ein uniformisierendes Element, und sei $k := R/(\pi)$ der Restklassenkörper von R.

6.1.1 Dilatationen

6.1.1 Definition. *Sei $\underline{X}$ ein R-Schema von endlichem Typ, und sei Y ein abgeschlossenes Unterschema der speziellen Faser $\underline{X}_0$ von $\underline{X}$. Die Dilatation von Y auf $\underline{X}$ ist ein Paar $(\underline{X}', \underline{u})$, bestehend aus einem flachen R-Schema $\underline{X}'$ und einem R-Morphismus $\underline{u} : \underline{X}' \to \underline{X}$, dessen spezielle Faser über Y faktorisiert, derart daß folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Ist $\underline{Z}$ ein flaches R-Schema und ist $\underline{v} : \underline{Z} \to \underline{X}$ ein Morphismus, dessen spezielle Faser über Y faktorisiert, so faktorisiert $\underline{v}$ eindeutig über $\underline{u}$.*

Wir erläutern kurz die lokale Struktur von Dilatationen: Sei $\underline{X}$ ein R-Schema von lokal endlichem Typ, sei Y ein abgeschlossenes Unterschema der speziellen Faser $\underline{X}_0$ von $\underline{X}$, und sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\underline{X}}$ die zu der gegebenen abgeschlossenen Immersion $Y \hookrightarrow \underline{X}$ korrespondierende quasi-kohärente Idealgarbe. Sei $\underline{X}'' := \operatorname{Proj} \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{I}^n \to X$ die Aufblasung von $\mathcal{I}$ auf X, sei $\underline{U} = \operatorname{Spec} A$ ein offenes affines Unterschema von $\underline{X}$, und sei $I \subset A$ das zu $\mathcal{I}|_{\underline{U}}$ korrespondierende Ideal. Da A noethersch ist, besitzt I ein endliches Erzeugendensystem $g_0, g_1, \ldots, g_n$. Somit identifiziert sich X'' über U mit dem abgeschlossenen Unterschema von $\mathbb{P}^n_A = \operatorname{Proj} A[T_0, \ldots, T_n]$, welches durch das homogene Ideal $I' := \ker\,(A[T_0, \ldots, T_n] \to \bigoplus_{n\geq 0} I^n)$ gegeben ist, wobei wir den graduierten Homomorphisimus betrachten, welcher T_i auf g_i abbildet. Sei $\underline{U}_i$ der offene affine Teil von $\mathbb{P}^n_A$, wo T_i nicht verschwindet; dann ist $\underline{X}'' \cap \underline{U}_i$ affin, und die Algebra seiner globalen Schnitte berechnet sich zu

$$A[T_0, \ldots, \hat{T}_i, \ldots, T_n]/(g_j - g_i T_j)_{j\neq i}/(g_i\text{-Torsion}) \quad .$$

Sei $\underline{X}''_\pi$ der offene Ort in $\underline{X}''$, wo $\mathcal{I}' := \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\underline{X}'}$ durch π erzeugt ist, und sei $\underline{u} : \underline{X}''_\pi \to \underline{X}$ der kanonische Morphismus. Offenbar ist $\mathcal{I}'$ über $\underline{U}$ durch $\mathcal{I}$ erzeugt. Unter Ausnutzung der universellen Eigenschaft der Aufblasung sowie der π-Torsionsfreiheit der in Definition 6.1.1 betrachteten Testschemata verifizieren wir unmittelbar, daß $(\underline{X}''_\pi, \underline{u})$ die universelle Eigenschaft der Dilatation von Y auf $\underline{X}$ besitzt. Da wir annehmen dürfen, daß g_0 mit π übereinstimmt, ist diese über dem betrachteten offenen affinen Teil $\underline{U}$ von $\underline{X}$ folglich durch das Spektrum der A-Algebra

$$A[T_1, \ldots, T_n](g_j - \pi T_j)_{1\leq j\leq n}/(\pi\text{-Torsion})$$

repräsentiert.

Wir untersuchen im folgenden Dilatationen über k glatter Zentren auf glatten R-Schemata. Zunächst beweisen wir in dem Spezialfall eines R-Schemas $\underline{X}$ mit glatter generischer Faser die Tatsache, daß die Faserdimension unter Spezialisierung stets zunimmt. Dies folgt auch unmittelbar aus dem Theorem von Chevalley ([EGA IV] 13.1.3), welches besagt, daß die Funktion der relativen Dimension auf einem Schema von lokal endlichem Typ nach oben halbstetig ist.

Notation. Ist $\underline{X}$ ein R-Schema, so schreiben wir gelegentlich $\underline{X}_K$, $\underline{X}_k$ für die generische beziehungsweise die spezielle Faser von $\underline{X}$. Ist ferner $a \in \underline{X}(R^{\mathrm{sh}})$ ein R^{sh}-wertiger Punkt von $\underline{X}$, so bezeichnen wir die generische und die spezielle Faser von a gelegentlich mit a_K beziehungsweise a_k.

6.1.2 Lemma. *Sei $\underline{X}$ ein R-Schema von lokal endlichem Typ, und sei $a \in \underline{X}(R^{\mathrm{sh}})$ ein R^{sh}-wertiger Punkt von $\underline{X}$, derart daß $\underline{X}_K$ bei a_K glatt ist. Dann ist* $\dim_{a_K} \underline{X}_K$ *durch* $\dim_{a_k} \underline{X}_k$ *beschränkt.*

Beweis. Wir setzen $d := \dim_{a_K} \underline{X}_K$ und fixieren eine offene affine Umgebung $\underline{U}_k \subset \underline{X}_k$von a_k; dann ist $\underline{U}_k$ die spezielle Faser einer offenen Umgebung $\underline{U}$ von a, welche wir als affin ansehen dürfen. Es genügt zu zeigen, daß d durch $\dim \underline{U}_k$ beschränkt ist. Die spezielle Faser von $\underline{U} \otimes_R R^{\mathrm{sh}}$ identifiziert sich mit $\underline{U}_k \otimes_k k_s$; da $\underline{U}_k \otimes_k k_s$ über $\underline{U}_k$ ganz und treuflach ist, stimmt nach dem Going-Up-Theorem $\dim \underline{U}_k \otimes_k k_s$ mit $\dim \underline{U}_k$ überein. Die generische Faser von $\underline{U} \otimes_R R^{\mathrm{sh}}$ identifiziert sich mit $\underline{U}_K \otimes_K K^{\mathrm{sh}}$. Aufgrund der Glattheit von $\underline{U}_K$ oder da die Erweiterung K^{sh}/K algebraisch ist, bleibt die Dimension von $\underline{U}_K$ unter Anwendung des Funktors $\cdot \otimes_K K^{\mathrm{sh}}$ erhalten; dürfen wir somit annehmen, daß R mit R^{sh} übereinstimmt. Dann ist a_K ein rationaler und folglich abgeschlossener Punkt des affinen Schemas $\underline{U}_K$; da $\underline{U}_K$ über K glatt und nach Satz 3.3.4 somit regulär ist, stimmt $\dim \mathcal{O}_{\underline{U},a_K}$ folglich mit d überein. Da a_K echt nach a_k spezialisiert, ist $\dim \mathcal{O}_{\underline{U},a_K}$ echt kleiner als $\dim \mathcal{O}_{\underline{U},a_k}$, und nach Lemma 1.2.18 besteht die Ungleichung $\dim \mathcal{O}_{\underline{U},a_k} \leq \dim \mathcal{O}_{\underline{U}_k,a_k} + 1$. Somit folgt, daß $d = \dim \mathcal{O}_{\underline{U},a_K}$ durch $\dim \mathcal{O}_{\underline{U}_k,a_k} \leq \dim \underline{U}_k$ beschränkt ist, wie gewünscht. □

Das folgende Lemma charakterisiert die lokale Struktur des Modul der relativen Differentialformen einer beliebigen Dilatation:

6.1.3 Lemma. *Sei A eine R-Algebra von endlichem Typ, und seien $\boldsymbol{f} = f_1, \ldots, f_r$, $\boldsymbol{g} = g_{r+1}, \ldots, g_n$ Systeme von Elementen in A, deren Differentiale den A-Modul $\Omega^1_{A/R}$ erzeugen. Sei $T = T_{r+1}, \ldots, T_n$ ein System von Variablen, sei*

$$B' := A[T]/(\pi T - \boldsymbol{g})/(\pi\text{-Torsion}) \quad ,$$

und sei $\boldsymbol{g}'$ die Klasse von T in B'. Dann ist $\Omega^1_{B'/R}$ durch das System $d\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{g}'$ erzeugt.

Beweis. Der kanonische Isomorphismus $A[T] \cong A \otimes_R R[T]$ induziert einen natürlichen Isomorphismus

$$\Omega^1_{A[T]/R} \cong (\Omega^1_{A/R} \otimes_R R[T]) \oplus (A \otimes_R \Omega^1_{R[T]/R}) \quad ;$$

folglich ist $\Omega^1_{A[T]/R}$ von $d\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{g}, dT$ erzeugt. Sei $\mathfrak{b}$ das von $\pi T - \boldsymbol{g}$ in $A[T]$ erzeugte Ideal, und sei $B'' := A[T]/\mathfrak{b}$. Wir betrachten die kanonische exakte Sequenz

$$\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \to \Omega^1_{A[T]/R} \otimes_{A[T]} B'' \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{B''/R} \to 0 \quad .$$

Da $d(\pi T - \boldsymbol{g}) \otimes 1$ im Kern von α liegt, ist $\Omega^1_{B''/R}$ von $d\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{g}''$ erzeugt, wo $\boldsymbol{g}''$ die Klasse von $\boldsymbol{g}$ in B'' bezeichnet. Da es sich bei B' um einen Quotienten von B'' handelt, ist $\Omega^1_{B'/B''}$ trivial, und die kanonische exakte Sequenz

$$\Omega^1_{B''/R} \otimes_{B''} B' \to \Omega^1_{B'/R} \to \Omega^1_{B'/B''}$$

zeigt somit, daß $\Omega^1_{B'/R}$ von $d\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{g}'$ erzeugt ist, wie behauptet. □

Wir können nun zeigen, daß Dilatationen glatter R-Schemata in k-glatten Zentren ihrerseits glatt sind:

6.1.4 Satz. *Sei $\underline{X}$ ein glattes R-Schema, und sei Y ein über k glattes abgeschlossenes Unterschema von $\underline{X}_k$. Dann ist die Dilatation $\underline{X}'$ von Y auf $\underline{X}$ über R glatt.*

Beweis. Sei x' ein Punkt der speziellen Faser von $\underline{X}'$, sei x die Projektion von x' nach $\underline{X}$, sei n die Dimension von $\underline{X}_k$ bei x, und sei r die Dimension von Y bei x. Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\underline{X}}$ die zu Y korrespondierende quasi-kohärente Idealgarbe, und sei $\overline{\mathcal{I}} := \mathcal{I}/\pi$ die Restriktion von $\mathcal{I}$ nach $\underline{X}_k$. Dann ist Y durch $\overline{I}$ als abgeschlossenes Unterschema von $\underline{X}_k$ definiert, und nach dem Jacobi-Kriterium ([BLR] 2.2/7 (a)$\Rightarrow$(c)) existieren bei x Systeme lokale Schnitte $\overline{\boldsymbol{f}} = \overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_r$, $\overline{\boldsymbol{g}} = \overline{g}_{r+1}, \ldots, \overline{g}_n$, welche bei x ein lokales Koordinatensystem von $\underline{X}_k$ bilden, derart daß $\overline{\mathcal{I}}$ bei x durch $\overline{\boldsymbol{g}}$ erzeugt ist. Seien $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ Liftungen von $\overline{\boldsymbol{f}}$, $\overline{\boldsymbol{g}}$; dann ist $\mathcal{I}$ bei x durch das System $\pi, \boldsymbol{g}$ erzeugt, und nach Nakayamas Lemma bilden Systeme $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ bei x ein lokales Koordinatensystem von X. Nach Lemma 6.1.3 ist $\Omega^1_{\underline{X}'/R}$ bei x' folglich durch n Elemente erzeugt. Nach Lemma 6.1.2 ist die relative Dimension von $\underline{X}'$ bei x' mindestens gleich n; nach Satz 3.3.4 ist die spezielle Faser von $\underline{X}'$ somit bei x' über k glatt. Da die generischen Fasern von $\underline{X}'$ und $\underline{X}$ übereinstimmen und $\underline{X}'$ als Dilatation über R flach ist, zeigt das Faserkriterium für Glattheit ([BLR] 2.4/8) somit die Glattheit von $\underline{X}'$ über R. □

Wir wollen abschließend zeigen, daß sich Dilatationen k-glatter Zentren auf glatten R-Schemata lokal besonders explizit beschreiben lassen:

6.1.5 Lemma. *Sei $\underline{X}$ ein glattes R-Schema, und sei Y ein über k glattes abgeschlossenes Unterschema von $\underline{X}_k$, sei $\underline{X}'$ die Dilatation von Y auf $\underline{X}$, sei x' ein Punkt in $\underline{X}'$, und sei x seine Projektion nach $\underline{X}$. Dann existiert eine affine offene Umgebung $\underline{U} = \mathrm{Spec}\, A$ von x, derart daß $\underline{X}'$ über $\underline{U}$ durch das Spektrum des Rings*

$$B := A[T]/(\pi T - \boldsymbol{g})$$

gegeben ist, wo T ein endliches System von Variablen und $\boldsymbol{g}$ ein gleichmächtiges System von Elementen aus A bezeichnet, derart daß das System $\pi, \boldsymbol{g}$ das abgschlossene Unterschema $Y \cap \underline{U}$ von $\underline{U}$ induziert.

Beweis. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, daß x' in der speziellen Faser von $\underline{X}'$ enthalten ist. Das Schema $\underline{X}'$ identifiziert sich über $\underline{U}$ mit dem Spektrum von $B/(\pi\text{-Torsion})$. Es genügt zu zeigen, daß der lokale Ring von $\mathrm{Spec}\, B$ bei x' regulär ist: Dann ist er insbesondere frei von π-Torsion, so daß bereits eine geeignete offene Umgebung von x' in $\mathrm{Spec}\, B$ frei von π-Torsion ist. Als flache Morphismen endlichen Typs sind Dilatationen offen; somit können wir $\underline{U}$ dann geeignet verkleinern, derart daß bereits B keine π-Torsion besitzt und folglich $\underline{X}'$ über $\underline{U}$ mit $\mathrm{Spec}\, B$ übereinstimmt, wie gewünscht. Nach Satz 3.2.2 sind Lokalisierungen glatter R-Schemata regulär; nach Satz 6.1.4 können wir zum Nachweis der Regularität von $\mathrm{Spec}\, B$ bei x' also induktiv schließen und somit annehmen, daß das System $\boldsymbol{g}$ durch ein Element gegeben ist, welches wir mit g bezeichnen. Sei $\mathfrak{p}' \subset A[T]$ das zu x' korrespondierende Primideal; wir setzen $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}' \cap A$. Da x' in der speziellen Faser von $\underline{X}'$ liegt, ist π in $\mathfrak{p}$ enthalten. Nach Korollar 1.2.22 ist die Lokalisierung $A[T]_{\mathfrak{m}'}$ regulär, so daß es genügt zu zeigen, daß $\pi T - g$ nicht in $\mathfrak{m}'^2$ enthalten ist. Angenommen, $\pi T - g$ ist ein Element von $(\mathfrak{m}')^2$; dann ist die Klasse $\overline{g}$ von $\pi T - g$ in $A/\pi A[T]$ in $(\mathfrak{m}'/\pi A[T])^2$ und also in $(\mathfrak{m}/\pi A)^2$ enthalten, im Widerspruch zur Regularität von $Y = \mathrm{Spec}\, A/(\pi, g)$ bei x. □

6.1.2 Der Glättungsprozeß

Wir geben im folgenden einen Überblick über den Néronschen Glätttungsprozess. Wir beginnen mit der Definition von Nérons Maß für den Glattheitsdefekt:

Notation. Ist A ein Ring und ist M ein A-Modul, so schreiben wir $\mathrm{Tor}_A(M)$ für den Untermodul der A-Torsion. Gelegentlich lassen wir den Index A fort, sofern keine Mißverständnisse möglich sind.

6.1.6 Definition. *Sei $\underline{X}$ ein R-Schema von lokal endlichem Typ, und sei $a \in \underline{X}(R^{sh})$ ein R^{sh}-wertiger Punkt, derart daß $\underline{X}_K$ bei a_K glatt ist. Die natürliche Zahl*

$$\delta(\underline{X}, a) := \mathrm{length}_{R^{\mathrm{sh}}} \mathrm{Tor}_{R^{\mathrm{sh}}}(a^*\Omega^1_{X/R})$$

heißt Nérons Maß für den Glattheitsdefekt von $\underline{X}$ in a; hierbei unterscheiden wir in der Notation nicht zwischen $a^*\Omega_{X/R}$ und dem R^{sh}-Modul seiner globalen Schnitte. Die nicht notwendig endliche Zahl

$$\delta(\underline{X}) := \sup_{a \in \underline{X}(R^{\mathrm{sh}})} \delta(\underline{X}, a)$$

heißt der (globale) Glattheitsdefekt von $\underline{X}$.

Nach [BLR] 3.3/1 faktorisiert ein R^{sh}-wertiger Punkt von $\underline{X}$ genau dann über den glatten Ort von $\underline{X}$, wenn er trivialen Glattheitsdefekt besitzt, und nach [BLR] 3.3/3 ist der Glattheitsdefekt eines quasi-kompakten R-Schemas endlich. Das Jacobi-Kriterium ([BLR] 2.2/7) zeigt, daß sich der Glattheitsdefekt von $\underline{X}$ bei a anhand einer Jacobi-Matrix zu einer lokalen Einbettung von $\underline{X}$ in ein glattes R-Schema berechnen läßt:

6.1.7 Lemma. *Sei $\underline{X}$ ein R-Schema von lokal endlichem Typ, und sei $a \in \underline{X}(R^{\mathrm{sh}})$ ein R^{sh}-wertiger Punkt von $\underline{X}$, derart daß $\underline{X}_K$ bei a_K glatt von relativer Dimension d ist. Sei $\underline{U} \subset \underline{X}$ eine offene Umgebung von a_k, und sei $j : \underline{U} \subset \underline{Z}$ eine abgeschlossene Immersion in ein glattes R-Schema $\underline{Z}$ von konstanter relativer Dimension n, derart daß n globale Schnitte $z_1, \ldots, z_n$ auf $\underline{Z}$ existieren, deren Differentiale eine globale Basis von $\Omega^1_{\underline{Z}/R}$ bilden, und derart daß das zu j korrespondierende $\mathcal{O}_Z$-Ideal $\mathcal{I}$ durch globale Schnitte $g_1, \ldots, g_m$ definiert ist. Ist Λ die Menge der $(n-d)$-Minoren der Jacobimatrix*

$$J := \left(\frac{\partial g_\mu}{\partial z_\nu}\right)_{\substack{\mu = 1, \ldots, m \\ \nu = 1, \ldots, n}} \quad ,$$

so gilt

$$\delta(a) = \min\{\nu(a^*\Delta);\ \Delta \in \Lambda\} \quad ,$$

wo $\nu(r)$ die gegebene Bewertung auf K^{sh} bezeichnet.

Beweis. Siehe [BLR] 3.3/2. Die Idee ist die folgende: Die Einbettung $\underline{X} \subset \underline{Z}$ induziert eine Darstellung von $a^*\Omega^1_{\underline{X}/R}$ als Quotienten eines freien R-Moduls F und eines Untermoduls $M \subset F$, wobei F durch die Pullbacks a^*dz_ν und M durch die a^*dg_μ frei erzeugt sind. Die Länge des Torsionsanteils von F/M berechnet sich zu der Summe der ν-Ordnungen der Elementarteiler von M in F, und das von dem Produkt dieser Elementarteiler erzeugte Ideal wird durch die $(n-d)$-Minoren des Pullbacks der Jacobimatrix erzeugt. $\square$

Der Glattheitsdefekt eines Punkts läßt sich durch Dilatation eines geeigneten Zentrums der speziellen Faser reduzieren. Wir betrachten abgeschlossene Unterschemata $Y \subset \underline{X}_k$, welche der folgenden Bedingung genügen:

(N) *Die k_s-wertigen Punkte von Y, welche sich zu R^{sh}-wertigen Punkten von $\underline{X}$ ausdehnen, liegen in Y schematisch dicht.*

Bemerkung. Genügt Y der Bedingung (N), so liegen insbesondere die k_s-wertigen Punkte von Y schematisch dicht. Hiermit ist Y geometrisch reduziert; nach Satz 3.3.6 liegt der glatte Ort von Y somit dicht. Es ist natürlich, Zentren zu betrachten, in welche möglichst viele R^{sh}-wertigen Punkte von $\underline{X}$ spezialisieren: Die Menge der R^{sh}-wertigen Punkte von $\underline{X}'$ identifiziert sich aufgrund der universellen Eigenschaft von $\underline{X}'$ mit der Menge R^{sh}-wertigen Punkten von $\underline{X}$, deren Spezialisierungen über Y faktorisieren, und glatte Schemata besitzen nach [BLR] 2.3/5 viele R^{sh}-wertige Punkte.

Sei $Y \subset \underline{X}_k$ ein Zentrum, welches der Bedingung (N) genügt. Ist a ein R^{sh}-wertiger Punkt von $\underline{X}$, dessen Spezialisierung über ein gutartiges offenes Unterschema von Y faktorisiert, so ist der Glattheitsdefekt von a in der Dilatation von Y auf $\underline{X}$ tatsächlich geringer als der Glattheitsdefekt von a in $\underline{X}$:

6.1.8 Satz. *Sei $\underline{X}$ ein R-Schema von lokal endlichem Typ mit glatter generischer Faser $\underline{X}_K$, sei $Y \subset \underline{X}_k$ ein abgeschlossenes Unterschema, welches der Bedingung (N) genügt, und sei $\underline{X}'$ die Dilatation von Y auf $\underline{X}$. Sei $a \in \underline{X}(R^{\mathrm{sh}})$ ein R^{sh}-wertiger Punkt von $\underline{X}$, welcher nach Y_k spezialisiert, sei a' die eindeutige Ausdehnung von a nach $\underline{X}'$, und sei $U \subset Y$ ein offenes Unterschema, derart daß U über k glatt ist und der Pullback $\Omega^1_{\underline{X}/R}|_U$ von $\Omega^1_{\underline{X}/R}$ nach U lokal frei ist. Spezialisiert a nach U, so besteht die Ungleichung*

$$\delta(\underline{X}', a') \leq \max\{0, \delta(\underline{X}, a) - 1\} \quad .$$

Beweis. Siehe [BLR] 3.3/5. Die Beweisidee ist die Folgende: Wir dürfen Y als glatt annehmen. Wir fixieren eine Darstellung von $\underline{X}$ als abgeschlossenes Unterschema eines glatten R-Schemas $\underline{Z}$, derart daß sich ein Erzeugendensystem von $\Omega^1_{\underline{X}/R}$, welches als Liftung einer Basis von $\Omega^1_{\underline{X}/R}|_U$ gewählt wurde, zu einer Basis von $\Omega^1_{\underline{Z}/R}$ ausdehnt. Sei $I \subset \mathcal{O}_{\underline{Z}}$ das Ideal zu $\underline{X}$ und $J \subset \mathcal{O}_{\underline{Z}}$ das Ideal zu Y; aufgrund der Bedingungen an Y ist I in J^2 enthalten. Wir realisieren $\underline{X}'$ als abgeschlossenes Unterschema der Dilataion $\underline{Z}'$ von Y auf $\underline{Z}$ und berechnen $\delta(\underline{X}', a')$ mit Hilfe von Lemma 6.1.7. □

Es ist nun plausibel, daß sich der globale Glattheitsdefekt eines R-Schemas von endlichem Typ mit glatter generischer Faser durch eine endliche Folge von Dilatationen eliminieren läßt. Wir werden diesen Glättungsprozess im folgenden Abschnitt für Gruppenschemata durchführen; hierbei lassen sich die Zentren in natürlicher Weise wählen. Wir bemerken zunächst noch die folgende Tatsache ([BLR] 3.2/2 (d)):

6.1.9 Bemerkung. *Die Dilatation $\underline{G}'$ eines R-Gruppenschemas $\underline{G}$ entlang eines abgeschlossenen Untergruppenschemas trägt eine natürliche Gruppenstruktur, und der Morphismus $\underline{G}' \to \underline{G}$ ist ein Homomorphismus.*

6.2 Gruppenglättung

Sei weiterhin R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K, uniformisierendem Element π und Restklassenkörper k. Wir werden den Glättungsprozess anwenden, um die Gruppenglättung eines gegebenen R-Schemas von lokal endlichem Typ zu konstruieren.

6.2.1 Definition. *Sei $\underline{G}$ ein R-Gruppenschema von lokal endlichem Typ mit glatter generischer Faser; wir beschränken den Punktfunktor $\underline{G}(\cdot)$ von $\underline{G}$ zu einem Funktor $\underline{G}'$ auf der Kategorie der glatten R-Schemata. Ist $\underline{G}'$ durch ein glattes R-Schema repräsentierbar, so heißt $\underline{G}'$ die Gruppenglättung von G über R.*

Bemerkung. Die Identität $\mathrm{id}_{\underline{G}} \in \underline{G}(\underline{G})$ induziert einen Morphismus $\underline{G}' \to \underline{G}$. Angenommen, die Gruppenglättung $\underline{G}'$ existiert; dann besitzt sie folgende universelle Eigenschaft: Ist $\underline{Z}$ ein glattes R-Schema, so faktorisiert jeder R-Morphismus $\underline{Z} \to \underline{G}$ eindeutig über $\underline{G}' \to \underline{G}$.

Bemerkung. Sei $\underline{G}$ ein R-Schema mit glatter generischer Faser $\underline{G}_K$ und repräsentierbarer Gruppenglättung $\underline{G}'$. Da $\underline{G}_K$ über K und somit über R glatt ist, identifiziert der Morphismus $\underline{G}' \to \underline{G}$ die generische Faser $\underline{G}'_K$ von $\underline{G}'$ mit $\underline{G}_K$.

Wir werden beweisen, daß Gruppenglättungen stets existieren. Zunächst wollen wir zeigen, daß der globale Glattheitsdefekt eines Gruppenschemas mit dem Glattheitsdefekt im Einsschnitt übereinstimmt:

6.2.2 Lemma. *Sei $\underline{G}$ ein R-Gruppenschema von lokal endlichem Typ mit glatter generischer Faser, sei $e \in \underline{G}(R^{sh})$ die Identität, und sei $a \in \underline{G}(R^{sh})$ ein beliebiger R^{sh}-wertiger Punkt von $\underline{G}$; dann besteht die Gleichung*

$$\delta(\underline{G}, x) = \delta(\underline{G}, e) \quad .$$

Insbesondere ist $\delta(\underline{G})$ endlich und stimmt mit $\delta(\underline{G}, e)$ überein.

Beweis. Sei r_a die Rechtstranslation um a; dann gilt $a = r_a \circ e$, wobei wir e mit dem induzierten R^{sh}-wertigen Punkt von $\underline{G} \otimes_R R^{\mathrm{sh}}$ identifizieren. Somit existiert ein kanonischer durch r_a^* gegebener Isomorphismius

$$a^*\Omega^1_{\underline{G}/R} = e'^* r_a^* \Omega^1_{\underline{G}\otimes_R R^{\mathrm{sh}}/R^{\mathrm{sh}}} \cong e'^* \Omega^1_{\underline{G}\otimes_R R^{\mathrm{sh}}/R^{\mathrm{sh}}} = e^*\Omega^1_{\underline{G}/R} \quad ,$$

und hiermit ist die Behauptung klar. □

Wir wollen nun den Néronschen Glättungsprozess verwenden, um den Glattheitsdefekt im Einsschnitt von $\underline{G}$ zu reduzieren. Die Zentren lassen sich hierbei als abgeschlossene Untergruppen wählen, derart daß die Menge der R^{sh}-wertigen Punkte von $\underline{G}$ unter Anwendung des Glättungsprozesses invariant bleibt:

6.2.3 Lemma. *Sei $\underline{G}$ ein R-Gruppenschema von lokal endlichem Typ mit glatter generischer Faser, und sei Z der schematische Abschluß der Menge der Spezialisierungen der R^{sh}-wertigen Punkte von G. Dann ist Z ein über k glattes abgeschlossenes Untergruppenschema von $\underline{G}_k$. Sei $\underline{G}' \to \underline{G}$ die Dilatation von Z auf $\underline{G}$; dann besteht die Ungleichung*

$$\delta(\underline{G}') \leq \max\{0, \delta(\underline{G}) - 1\} \quad .$$

Beweis. Nach Lemma 4.1.10 ist Z ein abgeschlossenes k-Untergruppenschema von $\underline{G}_k$. Da die k_s-wertigen Punkte in Z schematisch dicht liegen, ist Z geometrisch reduziert; nach Lemma 4.1.2 ist Z somit über k glatt. Lemma 4.2.1 zeigt, daß $\Omega^1_{\underline{G}_k/k}$ global frei ist; insbesondere ist $\Omega^1_{\underline{G}/R}|_Z = \Omega^1_{\underline{G}_k/k}|_Z$ global frei. Das neutrale Element von $\underline{G}(R^{\mathrm{sh}})$ spezialisiert nach Y; nach Satz 6.1.8 besteht folglich die Ungleichung

$$\delta(\underline{G}', e') \leq \max(\delta(\underline{G}, e) - 1, 0) \quad ,$$

wobei e' die eindeutige Fortsetzung von e nach $\underline{G}'$ bezeichnet. Nach Bemerkung 6.1.9 ist $\underline{G}'$ ein Gruppenschema, derart daß der kanonische Pfeil $\underline{G}' \to \underline{G}$ ein Homomorphismus ist; nach Lemma 6.2.2 ist folglich $\delta(\underline{G}')$ durch $\max(\delta(\underline{G}) - 1, 0)$ beschränkt, wie behauptet. □

6.2.4 Satz. *Sei $\underline{G}$ ein R-Gruppenschema von lokal endlichem Typ mit glatter generischer Faser $\underline{G}_K$. Dann existiert die Gruppenglättung $\underline{G}'$ von $\underline{G}$, und sie läßt sich durch eine Folge der Länge $\delta := \delta(\underline{G})$*

$$\underline{G}^\delta \to \ldots \to \underline{G}^1 \to \underline{G}^0 = \underline{G}$$

von Dilatationen konstruieren, wobei für $i \geq 0$ das Zentrum W^i von $\underline{G}^{i+1} \to \underline{G}^i$ durch den schematischen Abschluß der Menge der Spezialisierungen der R^{sh}-wertigen Punkte von $\underline{G}^i$ gegeben sei.

Beweis. Nach Lemma 6.2.3 ist $\underline{G}^\delta$ in allen R^{sh}-wertigen Punkten glatt. Insbesondere ist $\underline{G}^\delta$ in einer Umgebung des Einsschnitts glatt, so daß die glatten Orte der Fasern von $\underline{G}^\delta$ nicht-leer sind; wie im Beweis von Lemma 4.1.2 zeigt das übliche Translationsargument, daß die Fasern von $\underline{G}^\delta$ somit glatt sind. Als Dilatation ist $\underline{G}^\delta$ über R flach; nach dem Faserkriterium für Glattheit ([BLR] 2.4/8) ist $\underline{G}^\delta$ somit über R glatt. Sei $\underline{Z}$ ein glattes R-Schema, und sei $\underline{Z} \to \underline{G}$ ein R-Morphismus. Nach [BLR] 2.3/5 liegt die Menge der k_s-wertigen Punkte von $\underline{Z}_k$, welche sich zu R^{sh}-wertigen Punkten von $\underline{Z}$ ausdehnen, in $\underline{Z}_k$ schematisch dicht; folglich faktorisiert der induzierte Morphismus $\underline{Z}_k \to \underline{G}_k$ über W^0. Da $\underline{Z}$ über R flach ist, faktorisiert der Morphismus $\underline{Z} \to \underline{G}$ aufgrund der universellen Eigenschaft der Dilatation somit eindeutig über $\underline{G}^1 \to G$, und induktiv sehen wir, daß er eindeutig über $\underline{G}^\delta \to G$ faktorisiert, so daß $\underline{G}^\delta \to \underline{G}$ die universelle Eigenschaft der Gruppenglättung besitzt. □

Bemerkung. Nach Wahl der Zentren W^i identifiziert sich $\underline{G}'(R^{\mathrm{sh}})$ mit $\underline{G}(R^{\mathrm{sh}})$. Da Dilatationen affin sind, ist die Gruppenglättung eines separierten R-Schemas automatisch separiert.

Wir wollen den Prozeß der Gruppenglättung dazu verwenden, Néron-Modelle von R-Gruppenschemata zu konstruieren. Zunächst definieren wir ein kanonisches Unterobjekt des Néron-Modells eines R-Gruppenschemas: seine maximale beschränkte Untergruppe. Hierfür benötigen wir folgendes Lemma:

6.2.5 Lemma. *Sei $\underline{Z}$ ein glattes R-Schema, und sei η ein generischer Punkt der speziellen Faser $\underline{Z}_k$ von $\underline{Z}$. Dann ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}$ ein diskreter Bewertungsring, dessen Bewertungsideal von dem Bewertungsideal in R erzeugt wird.*

Beweis. Sei π ein uniformisierendes Element in R, und sei $k = R/(\pi)$ der Restklassenkörper von R. Da $\underline{Z}_k$ über k glatt und somit lokal integer ist, handelt es sich bei $\mathcal{O}_{\underline{Z}_k,\eta} = \mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}/\pi\mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}$ um einen Körper; insbesondere ist $\dim \mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}$ durch 1 beschränkt. Wäre $\dim \mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}$ gleich 0, so wäre η ein generischer Punkt des lokal integren Schemas $\underline{Z}$, und die generische Faser von $\underline{Z}$ bei η wäre leer, im Widerspruch zur Flachheit von $\underline{Z}$ über R; folglich ist $\dim \mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}$ gleich 1. Der lokale noethersche Ring $\mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}$ ist nach Satz 3.2.2 regulär und somit insbesondere normal; folglich ist $\mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}$ ein diskreter Bewertungsring. Da $\mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}/\pi\mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}$ ein Körper ist, handelt es sich bei π um ein uniformisierendes Element von $\mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}$, wie behauptet. □

6.2.6 Definition. *Sei G ein glattes K-Gruppenschema von endlichem Typ. Wir erklären den Funktor $\underline{G}^{\mathrm{NR},b}$ auf glatten R-Schemata $\underline{Z}$ durch die Zuordnung*

$$\underline{G}^{\mathrm{NR},b}(\underline{Z}) := G(\underline{Z}_K)^b \quad ,$$

wobei $G(\underline{Z}_K)^b$ die größte Untergruppe von $G(\underline{Z}_K)$ bezeichnet, deren Bild in den Punktmengen $G(\mathrm{Frac}\,(\mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}))$ beschränkt ist, wo η die generischen Punkte von $\underline{Z}_k$ durchläuft und wo $\mathrm{Frac}\,(\mathcal{O}_{\underline{Z},\eta})$ mit der nach Lemma 6.2.5 durch $\mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}$ gegebenen diskreten Bewertung versehen sei. Ist $\underline{G}^{\mathrm{NR},b}$ durch ein glattes separiertes R-Modell von G repräsentierbar, so heißt $\underline{G}^{\mathrm{NR},b}$ die maximale beschränkte Untergruppe von $\underline{G}^{\mathrm{NR}}$.

Bemerkung. Eine Menge M von Punkten von G mit Werten in einem diskret bewerteten Erweiterungskörper von K heißt beschränkt, falls bezüglich einer endlichen affinen Überdeckung alle Koordinatenfunktionen auf M beschränkt sind. Die Beschränktheit einer Punktmenge kann bezüglich einer beliebigen endlichen affinen Überdeckung und beliebiger Koordinatenfunktionen getestet werden; siehe auch [BLR] 1.1. Ein Punkt der multiplikativen Gruppe erzeugt insbesondere genau dann eine beschränkte Untergruppe, wenn er vom Betrag 1 ist.

Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Immersion glatter K-Gruppenschemata endlichen Typs. Wir wollen zeigen, daß sich das Néron-Modell $\underline{H}^{\mathrm{NR}}$ und seine maximale beschränkte Untergruppe als Gruppenglättung des schematischen Abschlusses von H in $\underline{G}^{\mathrm{NR}}$ beziehungsweise $\underline{G}^{\mathrm{NR},b}$ konstruieren lassen, unter der Voraussetzung, daß das jeweilige Modell von G existiert.

6.2.7 Theorem. *Sei $\underline{G}^{\mathrm{NR}}$ ein R-Gruppenschema von lokal endlichem Typ, welches ein Néron-Modell seiner generischen Faser G ist, und sei $H \subset G$ ein über K glattes K-Untergruppenschema von G. Dann existiert das Néron-Modell $\underline{H}^{\mathrm{NR}}$ von H über R; es identifiziert sich mit der Gruppenglättung $\underline{H}^{\delta}$ des schematischen Abschlusses $\underline{H}^0$ von H in $\underline{G}^{\mathrm{NR}}$.*

Beweis. Nach Lemma 4.1.9 ist $\underline{H}^0$ ein abgeschlossenes Untergruppenschema von $\underline{G}^{\mathrm{NR}}$, und die generische Faser von $\underline{H}^0$ stimmt kanonisch mit H überein. Mit $\underline{G}^{\mathrm{NR}}$ ist auch $\underline{H}^0$ separiert; da Dilatationen affin sind, ist somit auch $\underline{H}^{\delta}$ separiert. Sei $\underline{Z}$ ein glattes R-Schema, und sei $a : \underline{Z}_K \to H$ ein K-Morphismus. Da es sich bei $\underline{G}^{\mathrm{NR}}$ um ein Néron-Modell von G handelt, dehnt sich der induzierte Morphismus $a' : \underline{Z}_K \to G$ eindeutig zu einem Morphismus $\underline{a}' : \underline{Z} \to \underline{G}^{\mathrm{NR}}$ aus. Das schematische Urbild von $\underline{H}^0$ unter $\underline{a}'$ enthält Z; da $\underline{Z}$ über R flach ist, liegt Z in $\underline{Z}$ schematisch dicht, so daß $\underline{a}'$ eindeutig über einen Morphismus $\underline{a} : \underline{Z} \to \underline{H}^0$ faktorisiert. Aufgrund der universellen Eigenschaft der Gruppenglättung faktorisiert $\underline{a}$ eindeutig über einen Morphismus $\underline{Z} \to \underline{H}^{\delta}$, wie gewünscht. □

Bemerkung. Aussage und Beweis von Theorem 6.2.7 bleiben korrekt, wenn wir NR durch NR, b ersetzen und nur solche Punkte $a : \underline{Z}_K \to H$ betrachten, welche in $H(\underline{Z}_K)^b$ enthalten sind; es ist lediglich zu beachten, daß sich die Inklusion $H(\underline{Z}_K) \subset G(\underline{Z}_K)$ zu einer Inklusion $H(\underline{Z}_K)^b \subset G(\underline{Z}_K)^b$ beschränkt.

Wir können die Aussage von Theorem 6.2.7 auf den Fall ausdehnen, daß das Néron-Modell von G erst nach Basiswechsel eines bestimmten Typs zur Verfügung steht. Hierfür benötigen wir die Technik der Weil-Restriktion:

6.2.8 Definition. *Sei $w : S' \to S$ ein Morphismus von Schemata, und sei X' ein Funktor in S'-Schemata mit Werten in der Kategorie der Mengen oder der abelschen Gruppen. Wir erklären den Funktor w_*X' in S-Schemata Z durch die Zuordnung*

$$w_*X'(Z) := X'(Z \times_S S') \quad .$$

Ist w_*X' durch ein S-Schema repräsentierbar, so heißt w_*X' die Weil-Restriktion von X' unter w.

Für eine allgemeine Diskussion von Weil-Restriktionen siehe [BLR] 7.6. Wir werden zur Untersuchung der maximalen beschränkten Untergrppen von Néron-Modellen von Tori lediglich Weil-Restriktionen affiner Schemata endlichen Typs unter endlichen freien Ringhomomorphismen $R \to R'$ benötigen. Wir stellen zunächst formlos wichtige Eigenschaften von Weil-Restriktionen zusammen, wobei wir aus Platzgründen auf die Angabe der Beweise verzichten. In der affinen Situation sind diese elementar; sie lassen sich unmittelbar aus den Beweisen in [BLR] 7.6 extrahieren.

6.2.9 Bemerkung. *Weil-Restriktionen kommutieren mit Basiswechsel; sie respektieren Produkte und Gruppenstrukturen. Sei $R \to R'$ ein endlicher freier Homomorphismus von Ringen, sei $\underline{w} : \operatorname{Spec} R' \to \operatorname{Spec} R$ der zugehörige Morphismus affiner Schemata, sei r der Rang von R' über R, und sei $\underline{X}'$ ein quasi-projektives R'-Schema. Dann existiert die Weil-Restriktion $\underline{w}_*\underline{X}'$ von $\underline{X}'$ unter $\underline{w}$. Ist $\underline{X}'$ über R' von lokal endlichem Typ oder glatt oder separiert, so auch $\underline{w}_*\underline{X}'$ über R. Sind R und R' diskrete Bewertungsringe, so sei w die generische Faser von $\underline{w}$. Ist $\underline{X}'$ ein Néron-Modell seiner generischen Faser X', so ist $\underline{w}_*\underline{X}'$ ein Néronmodell seiner generischen Faser w_*X'. Ist $\underline{X}$ ein R-Schema und ist $\underline{Y} \subset \underline{X}$ ein abgeschlossenes Unterschema, so ist der kanonische Morphismus $\underline{Y} \to \underline{w}_*\underline{w}^*\underline{X}$ eine abgeschlossene Immersion, welche eventuell vorhandene Gruppenstrukturen respektiert. Ist schließlich $\underline{X}'$ affin und ist $\underline{X}' \subset \mathbb{A}^N_{R'}$ eine durch s Gleichungen beschriebene Darstellung von $\underline{X}'$, so induziert diese eine Darstellung von $\underline{w}_*\underline{X}'$ in $\mathbb{A}^{Nr}_R$, welche durch sr Gleichungen gegeben ist.*

Bemerkung. Nach [BLR] 6.4 sind Gruppenschemata über diskreten Bewertungsringen quasi-projektiv. Affine Schemata sind aus trivialen Gründen quasi-projektiv.

Das folgende Theorem verallgemeinert die Aussage von Theorem 6.2.7; es zeigt insbesondere, daß sich das Néron-Modell eines glatten K-Gruppenschemas G in expliziter Weise konstruieren läßt, falls das Néron-Modell eines geeigneten Pullbacks w^*G bekannt ist:

6.2.10 Theorem. *Sei G ein glattes K-Gruppenschema, und sei H ein über K glattes abgeschlossenes K-Untergruppenschema von G. Sei K' ein Erweiterungskörper von K, sei ν' eine Bewertung von K', welche die durch R auf K gegebene Bewertung fortsetzt, sei $\underline{w} : \operatorname{Spec} R' \to \operatorname{Spec} R$ der zugehörige Morphismus von Bewertungsspektren, und sei w die generische Faser von $\underline{w}$. Besitzt w^*G über R' ein Néron-Modell $(\underline{w^*G})^{\mathrm{NR}}$ und ist $\underline{w}$ endlich frei, so existiert das Néron-Modell $\underline{H}^{\mathrm{NR}}$ von H über R, und es kann als Gruppenglättung des schematischen Abschlusses $\underline{H}^0$ von H in $\underline{w}_*(\underline{w^*G})^{\mathrm{NR}}$ konstruiert werden.*

Beweis. Dies ist nunmehr klar: Nach Bemerkung 6.2.9 ist $\underline{w}_*(\underline{w^*G})^{\mathrm{NR}}$ das Néron-Modell von w_*w^*G, und es existiert eine kanonische abgeschlossene Immersion

$$H \hookrightarrow w_*w^*G \quad ;$$

nach Theorem 6.2.7 läßt sich somit $\underline{H}^{\mathrm{NR}}$ als die Gruppenglättung des schematischen Abschlusses von H in $\underline{w}_*(\underline{w^*G})^{\mathrm{NR}}$ konstruieren, wie behauptet. $\square$

Bemerkung. Wiederum bleiben Aussage und Beweis von Theorem 6.2.10 korrekt, wenn wir NR durch NR, b ersetzen.

Wir werden Theorem 6.2.10 in Abschnitt 6.4 dazu verwenden, Néron-Modelle von Tori über vollständig bewerteten Körpern zu konstruieren. Ein Torus entfaltet sich nach endlicher separabler Erweiterung L/K des Grundkörpers, und Néron-Modelle entfalteter Tori lassen sich unmittelbar angeben. Wir werden in dem folgenden Abschnitt zeigen, daß sich eine vollständige Bewertung auf K eindeutig zu einer Bewertung auf L fortsetzt und daß die induzierte treuflache Erweiterung R_L/R vollständiger diskreter Bewertungsringe endlich und frei ist. Dann existiert unter R_L/R die Weil-Restriktion quasi-projektiver R_L-Schemata, so daß wir Theorem 6.2.10 in der betrachteten Situation anwenden können.

6.3 Vollständige Bewertungen

Sei A ein noetherscher integrer Ring, welcher in seinem Quotientenkörper K ganz abgeschlossen ist. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung, und sei B der ganze Abschluß von A in L.

6.3.1 Bemerkung. *Mit B ist auch die Lokalisierung $B \otimes_A K$ ganz abgeschlossen, und da B über A ganz ist, gilt dasselbe für $B \otimes_A K$ über K; folglich identifiziert sich $B \otimes_A K$ mit dem ganzen Abschluß von K in L, also mit L.*

6.3.2 Lemma. *Ist L/K separabel, so ist B als A-Modul von endlichem Typ.*

Beweis. Aufgrund der Separabilität von L/K erklärt die Spur $\mathrm{Sp} : L \to K$ durch $(x, y) \mapsto \mathrm{Sp}(xy)$ auf L eine nichtausgeartete symmetrische K-Bilinearform. Ist x ein Element von B, so sind auch die Konjugierten von x ganz über A, so daß sich Sp sich zu einer Abbildung $B \to A$ beschränkt. Nach Bemerkung 6.3.1 ist L über K durch Elemente aus B erzeugt, so daß wir eine K-Basis $\boldsymbol{e}$ von L wählen können, deren Komponenten in B liegen. Sei V der von $\boldsymbol{e}$ erzeugte freie A-Modul. Für jeden A-Untermodul M von L bezeichne M^* die Menge der Elemente $x \in L$, für welche sich die Linearform $\mathrm{Sp}(x\cdot) : L \to K$ zu einem Homomorphismus von M nach A beschränkt. Offenbar bestehen die Inklusionen $V \subset B \subset B^* \subset V^*$. Da V^* von der bezüglich Sp dualen Basis zu $(e_i)_{1\le i\le n}$ frei erzeugt ist, erkennen wir den A-Modul V^* als noethersch und somit B als A-Modul von endlichem Typ. □

6.3.3 Lemma. *Sei K ein Körper, versehen mit einer vollständigen Bewertung der Höhe 1, und sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension. Dann sind alle K-Vektorraumnormen auf V äquivalent; insbesondere ist V unter jeder solchen Norm vollständig.*

Beweis. Sei $d := \dim_K V$. Wir fixieren eine Basis $v_1, \dots, v_d$ von V; sei $|\cdot|_{\max}$ die zugehörige Maximumnorm, und sei $|\cdot|$ eine beliebige K-Vektorraumnorm von V. Wir setzen $c := \max_{1\le i\le d} |v_i|$. Ist $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ ein beliebiges Element in K^d, so gilt für $x = \sum_{i=1}^d \alpha_i v_i$ die Abschätzung

$$|x| \le \max_{1\le i\le d} |\alpha_i||v_i| \le \max_{1\le i\le d} |\alpha_i| \max_{1\le i\le d} |v_i| = c|x|_{\max} \quad .$$

Es bleibt zu zeigen, daß eine reelle Zahl $c' > 0$ existiert, welche für alle x in V der Ungleichung $|x|_{\max} \le c'|x|$ genügt. Wir schließen mit Induktion nach d; für $d = 0$ gilt $|\cdot| = |\cdot|_{\max}$, und es ist nichts zu zeigen. Sei also $d > 0$, und sei $V' \subset V$ der durch $v_1, \dots, v_{d-1}$ erzeugte K-Untervektorraum. Angenommen, die gesuchte Konstante c' existiert nicht. Sei $(c'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit Limes unendlich; nach Annahme existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V, derart daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|y_n|_{\max} > c'_n|y_n|$ erfüllt ist. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\beta_n \in K$ ein Element mit $|\beta_n| = |x'_n|_{\max}$; dann erklärt $x_n := y_n/\beta_n$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V mit der Eigenschaft, daß $|x_n|_{\max}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gleich 1 ist und $\lim |x_n| = 0$ gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $x_n = \sum_{i=1}^d \alpha_{in}v_i$. Angenommen, die Folge $(\alpha_{nd})_{n\in\mathbb{N}}$ ist in K eine Nullfolge; dann genügt die durch $x'_n := x_n - \alpha_{nd}v_d \in V'$ erklärte Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach der strikten Dreiecksungleichung für fast alle $n \in \mathbb{N}$ der Gleichung $|x'_n|_{\max} = 1$; zugleich gilt jedoch $\lim |x'_n| = 0$, im Widerspruch zur Induktionsannahme. Folglich ist $(\alpha_{nd})_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge; indem wir zu einer geeigneten Teilfolge übergehen, dürfen wir annehmen, daß ein $\varepsilon > 0$ existiert, derart daß für alle $n \in \mathbb{N}$ der Betrag $|\alpha_{nd}|$ nach unten durch ε beschränkt ist. Dann ist auch die durch $z_n := x_n/\alpha_{nd}$ erklärte Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich $|\cdot|$ eine Nullfolge, und folglich ist $v_d = z_n - \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_{ni}/\alpha_{nd}v_i$ der $|\cdot|$-Limes einer Folge in V' ist; nach Induktionsannahme ist V' jedoch bezüglich $|\cdot|$ vollständig und somit abgeschlossen, so daß v_d in V' enthalten ist, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit des Systems $v_1, \ldots, v_d$. □

6.3.4 Satz. *Sei K ein vollständig diskret bewerteter Körper mit Bewertungsring A, sei L/K eine endliche Körpererweiterung vom Grad n, und sei B der ganze Abschluß von A in L. Dann ist B ein freier A-Modul vom Rang n. Ferner ist B ein diskreter Bewertungsring, und sein Quotientenkörper L ist bezüglich der durch B gegebenen Bewertung vollständig.*

Beweis. Nach Bemerkung 6.3.1 stimmt $B \otimes_A K$ mit dem Quotientenkörper L von B kanonisch überein. Wir betrachten zunächst den Fall, daß L über K separabel ist; nach Lemma 6.3.2 ist dann B als A-Modul endlich erzeugt. Als Unterring von L ist B frei von A-Torsion; nach dem Hauptsatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen ist B somit ein freier A-Modul, dessen Rang notwendig mit $\dim_K B \otimes_A K = \dim_K L = n$ übereinstimmt. Das Going-Up-Theorem zeigt $\dim B = 1$, und als noetherscher A-Modul ist B insbesondere ein noetherscher Ring. Ist $\mathfrak{P}$ ein maximales Ideal von B, so ist $\mathrm{ht}\mathfrak{P}$ gleich 1, denn B ist integer; somit ist $B_{\mathfrak{P}}$ als normaler lokaler noetherscher Ring der Dimension 1 ein diskreter Bewertungsring. Sei $\mathfrak{P}'$ ein weiteres maximales Ideal von B, und seien ν, ν' die durch $\mathfrak{P}$ beziehungsweise $\mathfrak{P}'$ gegebenen diskreten Bewertungen von L; nach Lemma 6.3.3 stimmen die jeweils induzierten Topologien von L überein. Folglich sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ identisch, denn beide Ideale bestehen genau aus den Elementen in $x \in L$, für welche die Folge $(x^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der jeweiligen Topologie gegen 0 konvergiert. Somit ist B lokal und folglich ein diskreter Bewertungsring, wie behauptet.

Sei nun L/K nicht notwendig separabel; sei L' die separable Hülle von K in L, und sei B' der ganze Abschluß von A in L'. Aufgrund der Transitivität der Ganzheit stimmt B mit dem ganzen Abschluß von B' in L überein, so daß wir nach dem bislang bewiesenen ohne Einschränkung L/K als rein inseparabel ansehen können. Dann ist n eine Potenz der Charakteristik $p > 0$ von K, und für alle $x \in L$ liegt x^n in K. Sei μ die gegebene Bewertung von K; für $x \in L^*$ setzen wir $w(x) := \mu(x^n)$. Dann ist $w : L^* \to \mathbb{Z}$ ein Homomorphismus. Bezeichnet m den positiven Erzeuger der Gruppe $w(L^*) \subset \mathbb{Z}$, so erklärt $\nu := \frac{1}{m}w$ eine diskrete Bewertung von L. Sei x in L; ist $\nu(x)$ nicht-negativ, so liegt x^n in A, und x liegt als über A ganzes Element in B. Ist umgekehrt x über A ganz, so gilt dies auch auch $x^n \in K$, und da A in K ganz abgeschlossen ist, folgt $x^n \in A$ und somit $\nu(x) \geq 0$; folglich stimmt B mit dem Bewertungsring von ν überein. Nach Lemma 6.3.3 ist L bezüglich ν vollständig. Es bleibt einzusehen, daß B über A frei vom Rang n ist. Sei $\pi \in A$ ein uniformisierendes Element von A, sei $k := A/\pi A$ der Restklassenkörper von A, und seien $b_1, \ldots, b_r$ Elemente aus B, welche eine k-Basis von $B/\pi B$ induzieren. Angenommen, in B existiert eine nichttriviale Relation $\sum_{i=1}^r a_ib_i = 0$ mit Koeffizienten $a_i \in A$; da B

integer ist, dürfen wir annehmen, daß zumindest ein Element a_i nicht durch π teilbar ist. Reduktion modulo π liefert einen Widerspruch zur k-linearen Unabhängigkeit der Klassen der b_i in $B/\pi B$, und wir sehen, daß die b_i über A linear unabhängig sind. Sei $E \subset B$ der von den b_i erzeugte freie A-Untermodul. Nach Konstruktion existieren für jedes Element $b \in B$ Elemente $b_0 \in E$, $b_1' \in B$ mit $b = b_0 + \pi b_1'$; iterativ erhalten wir eine Darstellung $b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \pi^i$ mit $b_i \in E$. Der Grenzwert existiert in dem endlichen und somit vollständigen A-Modul E. Somit folgt $B = E$, wie gewünscht. □

Bemerkung. Die Rechnung, welche zeigt, daß E mit B übereinstimmt, haben wir im Beweis von Lemma 1.3.4 bereits in allgemeinerem Rahmen durchgeführt; wir hätten also auch Korollar 1.3.5 zitieren können.

Bemerkung. Zur Konstruktion von Néron-Modellen von Tori benötigen wir die Aussage von Satz 6.3.4 nur in dem Fall, daß L/K separabel ist.

6.3.5 Definition. *Sei $A \to B$ ein treuflacher Homomorphismus diskreter Bewertungsringe, und seien $\pi_A \in A$, $\pi_B \in B$ uniformisierende Elemente. Die eindeutig bestimmte natürliche Zahl e, für welche π_A in B bis auf eine Einheit mit π_B^e übereinstimmt, heißt der Verzweigungsindex von B über A. Der Grad f des Restklassenkörpers von B über dem Restklassenkörper von A heißt der Restklassengrad von B über A. Wir bezeichnen e und f auch als den Verzweigungsindex beziehungsweise den Restklassengrad von* $\mathrm{Frac}\,(B)$ *über* $\mathrm{Frac}\,(A)$*, sofern die jeweiligen Bewertungen spezifiziert sind.*

Wir zeigen nun für vollständige Bewertungen die Gleichung $n = ef$; wir haben sie bereits im Beweis von Lemma 1.3.22 zur Existenz vollständiger p-Ringe verwendet:

6.3.6 Satz. *Sei L/K eine endliche Erweiterung diskret bewerteter Körper, und sei $A \to B$ der induzierte treuflache Homomorphismus der zugehörigen Bewertungsringe. Ist B über A endlich und identifiziert sich B mit dem ganzen Abschluß von A in L, so besteht die Gleichung*

$$ef = n \quad ,$$

wo n den Grad von L/K, f den Restklassengrad und e den Verzweigungsindex von L über K bezeichnen.

Beweis. Sei k_A der Restklasenkörper von A, und seien $\pi_A \in A$, $\pi_B \in B$ uniformisierende Elemente. Nach dem Hauptsatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen ist B über A frei von endlichem Rang. Nach der Bemerkung 6.3.1 stimmt L mit $B \otimes_A K$ überein; folglich ist $\mathrm{rg}_A B$ gleich n, und somit ist $B \otimes_A k_A = B/\pi_B^e B$ über k_A von der Dimension n. Sei $\mathfrak{P}$ das maximale Ideal von B. Der k_A-Vektorraum $B/\mathfrak{P}^e$ besitzt die endliche Filtration

$$0 \subset \mathfrak{P}^{e-1}/\mathfrak{P}^e \subset \ldots \subset \mathfrak{P}/\mathfrak{P}^e \subset B/\mathfrak{P}^e \quad ;$$

aufgrund der kanonischen Identitäten $(\mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^e)/(\mathfrak{P}^{i+1}/\mathfrak{P}^e) = \mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^{i+1}$ besteht folglich die Gleichung

$$\dim_k B/\mathfrak{P}^e = \sum_{i=0}^{e-1} \dim_k \mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^{i+1} \quad .$$

Da B integer ist, berechnet sich der Kern des durch Multiplikation mit π_B^i gegebenen surjektiven A-Homomorphismus $B \to \mathfrak{P}^i \to \mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^{i+1}$ zu $\mathfrak{P}$; somit identifiziert sich $\mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^{i+1}$ kanonisch mit $B/\mathfrak{P}$, und insbesondere ist $\dim_k \mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^{i+1}$ gleich $\dim_k B/\mathfrak{P} = f$. Folglich ist n gleich ef, wie behauptet. □

6.3.7 Korollar. *Sei K ein vollständig diskret bewerteter Körper, und sei L ein endlicher Erweiterungskörper von K, versehen mit der eindeutigen Bewertung, welche die Bewertung auf K fortsetzt. Seien n, e und f der Grad, der Verzweigungsindex und der Restklassengrad von L über K; dann ist n gleich ef.*

Beweis. Nach Satz 6.3.4 genügt die zu L/K gehörige Erweiterung diskreter Bewertungsringe den Voraussetzungen von Satz 6.3.6. □

6.4 Konstruktion des Néron-Modells eines Torus

Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Wir konstruieren zunächst das Néron-Modell der multiplikativen Gruppe $\mathbb{G}_{m,K}$. Ist $a \in K^*$ ein K-wertiger Punkt von $\mathbb{G}_{m,K}$, so existiert eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, derart daß sich $\pi^n a$ in R enthalten ist und sich $\pi^n a$ somit zu einem Punkt von $\mathbb{G}_{m,R}$ ausdehnt. Hiermit ist die Aussage des folgenden Lemmas plausibel:

6.4.1 Satz. *Sei π ein uniformisierendes Element von R. Für $n \in \mathbb{Z}$ setzen wir $\pi^n \cdot \mathbb{G}_{m,R} := \mathbb{G}_{m,R}$; wir verkleben die Schemata $\pi^n \cdot \mathbb{G}_{m,R}$ entlang generischer Fasern vermöge der durch Multiplikation mit π^n gegebenen Isomorphismen. Dann ist*

$$\mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}} := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \pi^n \cdot \mathbb{G}_{m,R}$$

ein Néron-Modell von $\mathbb{G}_{m,K}$ über R, und seine maximale beschränkte Untergruppe identifiziert sich mit $\pi^0 \cdot \mathbb{G}_{m,R}$.

Beweis. Bei $\mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}}$ und der offenen Untergruppe $\pi^0 \cdot \mathbb{G}_{m,R}$ handelt es sich offenbar um glatte separierte R-Modelle von $\mathbb{G}_{m,K}$; es ist zu zeigen, daß $\mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}}$ die Néronsche Abbildungseigenschaft besitzt, derart daß beschränkte Punkte über $\pi^0 \cdot \mathbb{G}_{m,R}$ faktorisieren. Offenbar dehnt sich jeder K-wertige Punkt von $\mathbb{G}_{m,K}$ zu einem R-wertigen Punkt von $\mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}}$ aus, wobei die Ausdehnungen beschränkter Punkte in $\pi^0 \cdot \mathbb{G}_{m,R}$ liegen. Ist R' ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K' und ist $R \to R'$ ein lokaler Homomorphismus vom Verzweigungsindex 1, so identifiziert sich $\mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}} \otimes_R R'$ nach Konstruktion mit dem zu R' und dem uniformisierenden Element $\pi \in R'$ gebildeten Schema $\mathbb{G}_{m,R'}^{\mathrm{NR}}$; insbesondere setzt sich auch jeder K'-wertige Punkt von $\mathbb{G}_{m,K}$ zu einem R'-wertigen Punkt von $\mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}}$ fort, wobei wiederum Fortsetzungen beschränkter Punkte über $\pi^0 \cdot \mathbb{G}_{m,R}$ faktorisieren. Sei $\underline{Z}$ ein glattes R-Schema mit generischer Faser Z, und sei $a \in \mathbb{G}_{m,K}(Z)$ ein Z-wertiger Punkt von $\mathbb{G}_{m,K}$; es ist zu zeigen, daß sich a eindeutig zu einem $\underline{Z}$-wertigen Punkt $\underline{a}$ von $\mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}}$ ausdehnt und daß dieser, falls a beschränkt ist, über $\pi^0 \cdot \mathbb{G}_{m,R}$ faktorisiert. Da Z aufgrund der Flachheit von $\underline{Z}$ über R in $\underline{Z}$ schematisch dicht liegt, existiert höchstens eine Ausdehnung von a. Sei η ein generischer Punkt der speziellen Faser $\underline{Z}_0$ von $\underline{Z}$; nach Lemma 6.2.5 ist $\mathcal{O}_{\underline{Z},\eta}$ ein diskreter Bewertungsring, dessen Bewertungsideal von π erzeugt wird. Somit dehnt sich der durch a gegebene Morphismus $\operatorname{Spec} \operatorname{Frac}(\mathcal{O}_{Z,\eta}) \to \mathbb{G}_{m,K}$ eindeutig zu einem Morphismus $\underline{a}_\eta : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Z,\eta} \to \mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}}$ aus, wobei $\underline{a}_\eta$ über $\pi^0 \cdot \mathbb{G}_{m,R}$ faktorisiert, falls a beschränkt ist. Sei $\operatorname{Spec} A_\eta$ eine offene affine Umgebung von $\underline{a}_\eta$ in $\mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}}$ beziehungsweise $\pi^0 \cdot \mathbb{G}_{m,R}$. Nach Konstruktion ist $\mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}}$ über R von lokal endlichem Typ; sei $\boldsymbol{f}$ ein endliches System algebraischer Erzeuger von A_η über R. Die Komponenten des Pullbacks $\underline{a}_\eta^* \boldsymbol{f}$ dehnen sich zu lokalen Schnitten bei η aus, und die Pullbacks der endlich vielen Relationen, welchen die Komponenten $\boldsymbol{f}$ genügen, veschwinden in einer Umgebung von η; folglich ist $\underline{a}_\eta$ bereits auf einer offenen Umgebung $\underline{U}_\eta \subset \underline{Z}$ von η definiert. Ist η' ein weiterer generischer Punkt von $\underline{Z}_0$ und $\underline{U}_{\eta'}$ eine offene Umgebung von η', derart daß sich

a zu einem auf $\underline{U}_{\eta'}$ definierten Morphismus $\underline{a}_{\eta'}$ fortsetzt, so stimmen $\underline{a}_\eta$ und $\underline{a}_{\eta'}$ auf $\underline{U}_{\eta,\eta'} := \underline{U}_\eta \cap \underline{U}_{\eta'}$ überein, da die generische Faser von $\underline{U}_{\eta,\eta'}$ in $\underline{U}_{\eta,\eta'}$ schematisch dicht liegt. Wir setzen $\underline{U} := Z \cup \bigcup_\eta \underline{U}_\eta$, wo η alle generischen Punkte von $\underline{Z}_0$ durchläuft; dann ist $\underline{U}$ in $\underline{Z}$ offen, $\underline{U}$ liegt über R faserweise in $\underline{Z}$ dicht, und es existiert eine Fortsetzung von a zu einem Morphismus $\underline{a}_{\underline{U}}$ von $\underline{U}$ nach $\mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}}$ beziehungsweise $\pi^0 \cdot \mathbb{G}_{m,R}$. Sei F das Komplement von $\underline{U}$ in $\underline{Z}$, und sei z ein Punkt in $\underline{Z}_0$ mit $\dim \mathcal{O}_{\underline{Z},z} \leq 1$. Als Integritätsring besitzt $\mathcal{O}_{\underline{Z},z}$ keine nichttrivialen Nullteiler. Das uniformisierende Element π kann in $\mathcal{O}_{\underline{Z},z}$ nicht trivial sein, da ansonsten die generischen Faser von $\underline{Z}$ in einer Umgebung von z leer wäre, im Widerspruch zur Flachheit von $\underline{Z}$; ferner ist π in $\mathcal{O}_{\underline{Z},z}$ keine Einheit, da z in der speziellen Faser von $\underline{Z}$ liegt. Somit ist π in $\mathcal{O}_{Z,z}$ weder Nullteiler noch Einheit; also ist $\dim \mathcal{O}_{Z,z}$ gleich 1, und $\mathcal{O}_{\underline{Z}_0,z} = \mathcal{O}_{\underline{Z},z}/\pi\mathcal{O}_{\underline{Z},z}$ ist als lokaler Integritätsring der Dimension 0 ein Körper. Folglich ist z als generischer Punkt von $\underline{Z}_0$ nicht in F enthalten; da F höchstens Punkte der speziellen Faser von $\underline{Z}$ enthält, beinhaltet F also keinen Punkt z in $\underline{Z}$, welcher der Ungleichung $\dim \mathcal{O}_{\underline{Z},z} \leq 1$ genügt, und es folgt $\operatorname{codim}(F, \underline{Z}) \geq 2$. Die durch $\underline{a}_{\underline{U}}$ erklärte R-rationale Abbildung $\underline{a} : \underline{Z} \dashrightarrow \mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}}$ ist also in Kodimension 1 definiert; nach dem Weilschen Fortsetzungssatz für relativ rationale Abbildungen von einem glatten Schema in ein glattes separiertes Gruppenschema über einer normalen Basis ([BLR] 4.4/1) ist $\underline{a}$ somit bereits überall definiert. Faktorisiert $\underline{a}_{\underline{U}}$ über $\pi^0 \cdot \mathbb{G}_{m,R}$, so zeigt Weils Fortsetzungssatz, daß sich $\underline{a}_{\underline{U}}$ bereits nach $\pi^0 \cdot \mathbb{G}_{m,R}$ ausdehnt, wie gewünscht. □

Wir können nun für Tori über vollständig diskret bewerteten Körpern ein explizites Verfahren zur Konstruktion von Néron-Modellen und ihren maximalen beschränkten Untergruppen angeben. Zunächst geben wir eine Definition von Tori; für Einzelheiten siehe [Wa] 7.3.

6.4.2 Bemerkung und Definition. *Sei K ein Körper, und sei K_s ein separabel algebraischer Abschluß von K. Unter einem K-Torus verstehen wir eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe Λ zusammen mit einer zu $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ isomorphen proendlichen Gruppe G, welche stetig auf Λ operiert. Zu jedem Torus $T = (G, \Lambda)$ assoziieren wir den K-Gruppenfunktor $T(\cdot)$, welcher in K-Algebren C durch die Zuordnung*

$$T(C) := (\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} C^*)^G$$

definiert sei. Die Aktion von G faktorisiert über die Aktion der Galois-Gruppe einer endlichen galoischen Erweiterung L/K, und der Funktor $T \otimes_K L$ identifiziert sich kanonisch mit dem Torus (G, Λ), dessen Γ-Aktion auf Λ trivial ist. Tori mit trivialer Aktion heißen entfaltet; sie sind durch Potenzen der mutliplikativen Gruppe repräsentierbar. Die Repräsentierbarkeit nicht notwendig entfalteter Tori folgt hieraus mit Hilfe von Galois-Descent. Entfaltete Tori sind in natürlicher Weise über beliebigen Basisschemata erklärt. Unter der Dimension eines Torus T verstehen wir den Rang der zugehörigen Gruppe Λ; letztere heißt die Kocharaktergruppe von T.

Bemerkung. Man kann auch nicht notwendig entfaltete Tori über beliebigen Basen S betrachten: Ein S-Schema G heißt ein Torus, wenn es lokal bezüglich der étalen Topologie auf S zu entfalteten Tori isomorph ist. Ist S das Spektrum eines Körpers, so ist dies Definition 6.4.2, denn die zusammenhängenden étalen Schemata über einem Körper K sind die Spektren separabler Erweiterungskörper von K.

6.4.3 Bemerkung. *Néron-Modelle respektieren Produkte und Gruppenstrukturen; somit stimmt das Néron-Modell eines entfalteten K-Torus $T = (G, \Lambda)$ der Dimension d mit dem R-Gruppenfunktor $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}}$ überein, welcher durch das d-fache über R gebildete Faserprodukt von $\mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}}$ repräsentiert ist, wobei $\mathbb{G}_{m,R}^{\mathrm{NR}}$ einerseits die* *betrachtete kanonische Garbe und andererseits das in Satz 6.4.1 konstruierte Schema bezeichnet. Analog identifiziert sich* $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ *kanonisch mit dem* R*-Gruppenfunktor* $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_{m,R}$*, welcher durch* $\mathbb{G}^d_{m,R}$ *repräsentiert ist.*

6.4.4 Korollar. *Sei* K *ein vollständig diskret bewerteter Körper mit Bewertungsring* R*, und sei* T *ein Torus über* K*. Wir fixieren eine endliche Galois-Erweiterung* L/K*, welche* T *entfaltet. Nach Satz 6.3.4 dehnt sich die Bewertung auf* K *eindeutig zu einer Bewertung auf* L *aus, derart daß die korrespondierende Erweiterung* R_L/R *diskreter Bewertungsringe endlich und frei ist. Sei* $\underline{w} : \mathrm{Spec}\ R_L \to \mathrm{Spec}\ R$ *der zugehörige Morphismus von Schemata; dann lassen sich* $\underline{T}^{\mathrm{NR}}$ *und* $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ *als Gruppenglättung des schematischen Abschlusses* $\underline{T}^0$ *von* T *in Weil-Restriktion* $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{w}_* \mathbb{G}^{\mathrm{NR}}_{m,R_L}$ *beziehungsweise* $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{w}_* \mathbb{G}_{m,R_L}$ *konstruieren.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Bemerkung 6.4.3 und Theorem 6.2.10. □

7. Kongruenzen von Néron-Modellen für Tori

Sei K ein vollständig diskret bewerteter Körper mit Bewertungsring R, sei T ein Torus über K, und sei $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ die maximale beschränkte Untergruppe seines Néron-modells. Wir definieren für $m \geq 0$ die m-te Reduktion $\mathrm{red}_m T$ von T und zeigen, daß zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $m \gg 0$ existiert, derart daß $\underline{T}_n^{\mathrm{NR},b}$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist. Da $\mathrm{red}_m T$ nur über den abgeschnittenen Bewertungsring R_m von R abhängt, liefert dieses Resultat die Möglichkeit, Aussagen über vollständig bewertete Körper in gemischter Charakteristik auf den Fall gleicher positiver Charakteristik zu übertragen.

Sei L/K eine endliche Galois-Erweiterung, welche T entfaltet, sei R_L der ganze Abschluß des Bewertungsrings R von K in L, und sei $\underline{T_L}^{\mathrm{NR},b}$ die maximale beschränkte Untergruppe des Néron-Modells von $T_L := T \otimes_K L$ über R_L. Nach Satz 6.3.4 ist R_L über R endlich und frei. Sei $\underline{T}^0$ der schematische Abschluss von T in der Weil-Restriktion von $\underline{T_L}^{\mathrm{NR},b}$; dann identifiziert sich $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ nach Korollar 6.4.4 mit der Gruppenglättung von $\underline{T}^0$. Das Schema $\underline{T_L}^{\mathrm{NR},b}$ ist ein entfalteter Torus über R_L, und der Weil-Restriktionsfunktor kommutiert mit Basiswechsel; um das Reduktionsverhalten von $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ zu untersuchen genügt es also, einerseits die Reduktion von $\underline{T}^0$ zu studieren und andererseits den Prozeß der Gruppenglättung von $\underline{T}^0$ zu kontrollieren.

7.1 Notationen

Wir erklären im folgenden die in der Einleitung dieses Kapitels verwendeten Notationen. Zu jedem vollständig diskret bewerteten Körper K und jedem K-Torus $T = (G, \Lambda)$ fixieren wir eine endliche Galois-Erweiterung L/K, welche T entfaltet. Sei R der Bewertungsring von K, sei R_L der ganze Abschluß von R in L, und sei Γ der Quotient von G, welcher unter dem fixierten Isomorphismus $G \cong \mathrm{Gal}(K_s/K)$ zu der Galoisgruppe von L über K korrespondiert; dann agiert Γ auf R_L über R. Unter einem Torusdatum verstehen wir ein 4-Tupel $(R, R_L, \Gamma, \Lambda)$, wo R, R_L und Γ durch eine endliche Galois-Erweiterung eines vollständig bewerteten Körpers induziert sind und es sich bei Λ um eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe handelt, auf welcher Γ operiert. Jedes Torusdatum induziert eines Torus, und zu jedem Torus existiert ein Torusdatum. Wir werden im folgenden in ungenauer Sprechweise oft nicht zwischen Tori und Torusdaten unterscheiden.

Notation. Unter der n-ten Reduktion eines Objekts über R_L verstehen wir stets die n-te Reduktion bezüglich eines uniformisierenden Elements aus R.

7.1.1 Definition. *Sei $T = (R, R_L, \Gamma, \Lambda)$ ein Torus, und sei $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Das 4-Tupel*

$$\mathrm{red}_m T := (R_m, R_{L,m}, \Gamma, \Lambda)$$

heißt die m-te Reduktion von T; ein derartiges 4-Tupel, welches als Reduktion eines Torus realisiert ist, bezeichnen wir als reduziertes Torusdatum.

Bemerkung. Wir verzichten darauf, die jeweiligen Kategorien zu spezifizieren, in welchen die betrachteten 4-Tupel anzusiedeln sind.

Bemerkung. Wir werden, falls es die Umstände erfordern, gelegentlich auch die m-te Reduktion anderer Objekte in der Form $\mathrm{red}_m(\cdot)$ schreiben, anstatt sie mit dem Subskript $\cdot_m$ zu versehen.

7.1.2 Definition. *Sei $i \in \{1, 2\}$. Unter einem Isomorphismus reduzierter Torusdaten $(R^i_m, R^i_{L,m}, \Gamma^i, \Lambda^i)$ verstehen wir einen Isomorphismus $\Gamma^1 \cong \Gamma^2$ zusammen mit einem äquivarianten Isomorphismus $R^1_{L,m} \cong R^2_{L,m}$, welcher sich zu einem Isomorphismus $R^1_m \cong R^2_m$ beschränkt, und einem äquivarianten Isomorphismus $\Lambda^1 \cong \Lambda^2$.*

7.1.3 Definition. *Sei T ein Torus, und sei $F(T)$ ein T in funktorieller Weise zugeordnetes Objekt. Ist $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so heißt $F(T)$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert, falls zu jedem Torus T' mit zugeordnetem Objekt $F(T')$ und zu jedem Isomorphismus $\mathrm{red}_m T \cong \mathrm{red}_m T'$ in kanonischer Weise ein Isomorphismus $F(T) \cong F(T')$ existiert.*

Ist insbesondere T ein Torus, ist $\underline{T}$ ein T in funktorieller Weise zugeordnetes Schema über dem Bewertungsring R von T und sind $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen, so heißt $\underline{T}_n$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert, falls zu jedem Torus T' mit zugeordnetem Schema $\underline{T}'$ über dem Bewertungsring R' von T' und zu jedem Isomorphismus $\mathrm{red}_m T \cong \mathrm{red}_m T'$ in kanonischer Weise ein Isomorphismus $\underline{T}_n \cong \underline{T}'_n$ über dem gegebenen Isomorphismus $R_n \cong R'_n$ existiert.

Notation. Sei $e_{L/K}$ der Verzweigungsindex von L über K.

Bemerkung. Der Verzweigungsindex $e_{L/K}$ ist aus trivialen Gründen durch $\mathrm{red}_0 T$ determiniert.

7.2 Kongruenzen von $\underline{T}^0$

Sei $T = (R, R_L, \Gamma, \Lambda)$ ein Torus, sei $\underline{w}$ der durch T gegebene Morphismus $\underline{w}$: Spec $R_L \to$ Spec R, und sei w : Spec $L \to$ Spec K seine generische Faser. Ferner sei $T_L := w^*T$ der durch Λ gegebene entfaltete L-Torus, und sei $\underline{T}^\dagger := \underline{T_L}^{\mathrm{NR},b}$ die maximale beschränkte Untergruppe seines Néron-Modells über R_L. Nach Satz 6.3.4 ist $\underline{w}$ endlich und frei; sei $\underline{T}^0$ der schematische Abschluss von T in der Weil-Restriktion $\underline{w}_*\underline{T}^\dagger$. Wir wollen zeigen, daß zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ exisistiert, derart daß $\underline{T}^0_n$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert ist.

Nach Anwendung eines elementaren Descentargument genügt es nachzuweisen, daß die n-te Reduktion von $\underline{w}^*\underline{T}^0$ für $m \gg 0$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist. Hierzu konstruieren wir über R_L eine abgeschlossene Einbettung von $\underline{w}^*\underline{T}^0$ in ein affines R_L-Gruppenschema $\underline{T}'$, dessen Reduktionsverhalten trivial ist und dessen generische Faser mit T_L übereinstimmt. Da T_L in $\underline{w}^*\underline{T}^0$ schematisch dicht liegt, identifiziert sich $\underline{w}^*\underline{T}^0$ mit dem schematischen Abschluß der generischen Faser von $\underline{T}'$; nach Korollar 4.5.2 können wir somit $(\underline{w}^*\underline{T}^0)_n$ als schematischen Abschluß derjenigen Punkte von $\underline{T}'$ rekonstruieren, welche sich als n-te Reduktion von Punkten mit Werten in lokalen endlichen vollständigen Durchschnitten über R realisieren lassen. Sei $h := \lceil h(\underline{T}'/R_L)/e_{L/K} \rceil$, wo $h(\underline{T}'/R_L)$ die in Abschnitt 5.2 definierte Invariante bezeichnet; nach Lemma 5.2.10 ist $\min(h, m+1)$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert. Das Schema $\underline{T}'$ genügt aufgrund seiner expliziten Gestalt der ersten Bedingung in Korollar 5.3.3; folglich ist die betrachtete Punktmenge für $m \geq \max(n+h, 2h)$ durch die Menge derjenigen Punkte von $\underline{T}'$ gegeben, welche sich als n-te Reduktion von Punkten mit Werten in solchen lokalen endlichen vollständigen Durchschnitten über $R_{L,m}$ realisieren lassen, die durch lokale endliche vollständige Durchschnitte über R_L induziert sind. Da nach Lemma 2.3.11 jeder lokale endliche vollständige Durchschnitt über $R_{L,m}$ durch einen lokalen endlichen vollständigen Durchschnitt über R_L gegeben ist, beschreibt sich $(\underline{w}^*\underline{T}^0)_n$ in $\underline{T}'$ somit als schematischer Abschluß der n-ten Reduktion einer Menge von Punkten, welche durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist.

7.2.1 Konstruktion von $\underline{T}'$

Wir konstruieren nun das R_L-Schema $\underline{T}'$; hierfür erweist es sich als hilfreich, Tori und ihre Weil-Restriktionen als Funktoren zu betrachten und unabhängig von der Wahl konkreter Darstellungen zu arbeiten. Bei dem Funktor $\underline{T}^\dagger$ handelt es sich nach Satz 6.4.1 um den durch Λ gegebenen entfalteten R_L-Torus; seine Punkte in R_L-Algebren $\underline{C}$ sind also durch die Gleichung

$$\underline{T}^\dagger(\underline{C}) = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{C}^*$$

gegeben. Wir erklären die repräsentierbaren kommutativen R_L-Gruppenfunktoren $\underline{F}^\dagger$, $\underline{F}'$ in R_L-Algebren $\underline{C}$ durch die Zuordnungen

$$\begin{array}{rcl} \underline{F}^\dagger(\underline{C}) & := & \mathrm{Maps}(\Gamma, \Lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{C}^* \\ \underline{F}'(\underline{C}) & := & \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} (\underline{C} \otimes_R R_L)^* \quad . \end{array}$$

Bei $\underline{F}^\dagger$ handelt es sich um einen gespaltenen R_L-Torus, und $\underline{F}'$ identifiziert sich kanonisch mit dem Pullback $\underline{w}^*\underline{w}_*\underline{T}^\dagger$ der Weil-Restriktion von $\underline{T}^\dagger$ unter $\underline{w}$; insbesondere sind $\underline{F}^\dagger$ und $\underline{F}'$ tatsächlich repräsentierbar. Die Gruppenobjekte $\underline{T}^\dagger$, $\underline{F}^\dagger$ und $\underline{F}'$ sind in kanonischer Weise in T funktoriell, und die generische Faser $\underline{T}^\dagger_L$ von $\underline{T}^\dagger$ stimmt mit T_L überein.

Die Diagonaleinbettung $\Lambda \to \mathrm{Maps}(\Gamma, \Lambda)$ induziert eine abgeschlossene Immersion $d : \underline{T}^\dagger \to \underline{F}^\dagger$ von R_L-Gruppenfunktoren, welche in T funktoriell ist. Für $\lambda \in \Lambda$,

$\sigma \in \Gamma$ sei $\lambda_\sigma \in \mathrm{Maps}(\Gamma, \Lambda)$ die Abbildung, welche σ auf λ und alle weiteren Elemente in Γ auf die Null schickt. Der kanonische in R_L-Algebren $\underline{C}$ funktorielle Homomorphismus

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} (\underline{C} \otimes_R R_L)^* & \to & \mathrm{Maps}(\Gamma, \Lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{C}^* \\ & \lambda \otimes (c \otimes r) & \mapsto & \sum\limits_{\sigma \in \Gamma} \lambda_\sigma \otimes c\sigma(r) \end{array}$$

erklärt einen kanonischen Homomorphismus $\varphi : \underline{F}' \to \underline{F}^\dagger$, welcher offenbar in T funktoriell ist. Die generische Faser φ_L von φ identifiziert sich offenbar kanonisch mit dem in L-Algebren C funktoriellen Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \varphi_L : \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} (C \otimes_K L)^* & \to & \mathrm{Maps}(\Gamma, \Lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} C^* \\ \lambda \otimes (c \otimes l) & \mapsto & \sum\limits_{\sigma \in \Gamma} \lambda_\sigma \otimes c\sigma(l) \quad . \end{array}$$

Die folgende Bemerkung läßt sich durch eine unmittelbare Rechnung verifizieren:

7.2.1 Bemerkung. *Wir gewinnen φ durch Bassiwechsel und natürliche Identifizierungen aus dem kanonischen Morphismus*

$$\Gamma \times_{\mathrm{Spec}\, R} \mathrm{Spec}\, R_L \to \mathrm{Spec}\, R_L \times_{\mathrm{Spec}\, R} \mathrm{Spec}\, R_L \quad , \quad (\sigma, s) \mapsto (\sigma(s), s) \quad ,$$

wobei wir Γ mit dem zugehörigen konstanten R-Gruppenschema identifizieren.

7.2.2 Korollar. *Insbesondere geht φ_L durch Basiswechsel und natürliche Identitäten aus dem kanonischen Morphismus*

$$\Gamma \times_{\mathrm{Spec}\, K} \mathrm{Spec}\, L \to \mathrm{Spec}\, L \times_{\mathrm{Spec}\, K} \mathrm{Spec}\, L \quad , \quad (\sigma, s) \mapsto (\sigma(s), s)$$

hervor, wobei Γ hier das durch Γ gegebene konstante Gruppenschema über K bezeichnet. Da L über K galoisch ist, handelt es sich bei φ_L folglich um einen Isomorphismus.

Bemerkung. Ist R_L über R unverzweigt und $\underline{w}$ damit eine Galois-Überdeckung, so zeigt Bemerkung 7.2.1, daß bereits φ ein Isomorphismus ist.

Wir definieren nun das R_L-Gruppenschema $\underline{T}'$ vermöge des durch die kanonischen Morphismen φ, d aufgespannten kartesischen Diagramms

$$\begin{tikzcd} \underline{T}' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, hook, "d'"'] & \underline{T}^\dagger \arrow[d, hook, "d"] \\ \underline{F}' \arrow[r, "\varphi"] & \underline{F}^\dagger \end{tikzcd} \qquad (*) \qquad .$$

7.2.2 Eigenschaften von $\underline{T}'$

Wir bemerken zunächst, daß das Reduktionsverhalten von $\underline{T}'$ trivial ist:

7.2.3 Bemerkung. *Die n-te Reduktion des zu T assoziierten kartesischen Diagramms $(*)$ ist durch $\mathrm{red}_n(T)$ determiniert.*

Beweis. Das Diagramm $(*)$ ist in T funktoriell. Für die entfalteten Objekte $\underline{T}^\dagger$, $\underline{F}^\dagger$ ist die Aussage trivial; für und $\underline{F}' = \underline{w}^* \underline{w}_* \underline{T}^\dagger$ folgt sie unmittelbar aus der Tatsache, dass der Weil-Restriktionsfunktor mit Basiswechsel kommutiert. □

7.2.4 Bemerkung und Definition. *Sei $h(\underline{T}'/R_L)$ die in Definition 5.2.8 erklärte Invariante von $\underline{T}'$. Wir setzen*

$$h := h(T) := \left\lceil \frac{h(\underline{T}'/R_L)}{e_{L/K}} \right\rceil \quad ;$$

dann ist h die kleinste natürliche Zahl, für welche π^h in dem Jacobi-Ideal von $\underline{T}'$ enthalten ist, wo π ein uniformisierendes Element von R bezeichnet. Nach Lemma 5.2.10 ist die natürliche Zahl $\min(h(\underline{T}'/R_L), e_{L/K} \cdot m + 1)$ durch $\underline{T}'_m$ determiniert; folglich ist auch $\min(h, m+1)$ durch $\underline{T}'_m$ determiniert. Nach Bemerkung 7.2.3 ist $\underline{T}'_m$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert; somit erklärt die Zuordnung

$$h(\mathrm{red}_m(T)) := h_m(T) := \min(h, m+1)$$

einen Invariantenfunktor auf der Kategorie der reduzierten Torusdaten.

Wir zeigen nun, daß sich der Pullback $\underline{w}^*\underline{T}^0$ von $\underline{T}^0$ in natürlicher Weise mit dem schematischen Abschluß der generischen Faser von $\underline{T}'$ identifiziert:

7.2.5 Lemma. *Sei $\underline{T}^0$ der schematische Abschluß von T in $\underline{w}_*\underline{T}^\dagger$; dann ist $\underline{w}^*\underline{T}^0$ in $\underline{T}'$ enthalten; insbesondere identifiziert sich $\underline{w}^*\underline{T}^0$ kanonisch mit dem schematischen Abschluß der generischen Faser von $\underline{T}'$.*

Beweis. Da die Bildung des schematischen Abschlusses mit flachem Basiswechsel kommutiert, identifiziert sich $\underline{w}^*\underline{T}^0$ mit dem schematischen Abschluß von w^*T in $\underline{w}^*\underline{w}_*\underline{T}^\dagger$. Sei $(*)_L$ die generische Faser des Diagramms $(*)$, und sei $j : T \hookrightarrow w_*T_L$ die kanonische abgeschlossene Immersion, welche wir der Definition von $\underline{T}^0$ zugrundelegen; es ist zu zeigen, daß das durch den Pulllback $w^*j : w^*T \hookrightarrow w^*w_*T_L$ von j in $(*)_L$ aufgespannte rechte obere Dreieck kommutiert. In der Tat, nach Definition von j ist w^*j in L-Algebren C durch den kanonischen Homomorphismus

$$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} C^* \to \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} (C \otimes_K L)^*$$

gegeben, und die Komposition

$$\begin{array}{rcl} \varphi_L \circ w^*j : \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} C^* & \to & \mathrm{Maps}(\Gamma, \Lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} C^* \\ \lambda \otimes c & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in \Gamma} \lambda_\sigma \otimes c \end{array}$$

stimmt mit der generischen Faser d_L der Diagonaleinbettung d überein, wie gewünscht. □

7.2.6 Korollar. *Die Invariante $h(\underline{T}^0/R)$ ist durch $h(T)$ beschränkt.*

Beweis. Wir fixieren eine Darstellung $\underline{w}^*\underline{T}^0 \subset \underline{T}' \subset \mathbb{A}^N_{R_L}$, gegeben durch Ideale $I' \subset I \subset R_L[T]$ mit assoziierten Jacobi-Idealen $J' \subset J \subset R_L[T]$; hier bezeichne T ein System von N Variablen. Der natürliche Homomorphismus

$$J' \cdot A/I' \to J \cdot A/I$$

zeigt, daß $h(\underline{w}^*\underline{T}^0/R_L)$ durch $h(\underline{T}'/R_L)$ beschränkt ist. Nun fixieren wir eine Darstellung $\underline{T}^0 \subset \mathbb{A}^M_R$; sei T ein System von M Variablen, sei $I \subset R[T]$ das zu der gewählten Darstellung gehörige Ideal, und sei $J \subset R[T]$ ein assoziiertes Jacobi-Ideal. Die induzierte Darstellung $\underline{w}^*\underline{T}^0 \subset \mathbb{A}^M_{R_L}$ ist durch das Ideal $I \cdot R_L[T]$ gegeben, und $J \cdot R_L[T]$ ist ein zugehöriges Jacobi-Ideal; der kanonische Homomorphismus

$$J \cdot R[T]/I \to J \cdot R_L[T]/IR_L[T]$$

zeigt nun die Ungleichung $e_{L/K} \cdot h(\underline{T}^0/R) \leq h(\underline{w}^*\underline{T}^0/R_L)$. Somit besteht die Ungleichung

$$h(\underline{T}^0/R) \leq \frac{h(\underline{T}'/R_L)}{e_{L/K}} \leq \left\lceil \frac{h(\underline{T}'/R_L)}{e_{L/K}} \right\rceil = h(T) \quad ,$$

wie behauptet. □

Abschließend zeigen wir, daß $\underline{T}'$ der Bedingung (i) aus Korollar 5.3.3 genügt:

7.2.7 Lemma. *Für $N \gg 0$ existiert eine Einbettung von $\underline{T}'$ in den affinen Raum $\mathbb{A}^N_{R_L}$, welche durch $N - \dim T$ Gleichungen gegeben ist.*

Beweis. Wir schreiben $d := \dim T$. Der Funktor $\underline{T}^\dagger \cong \mathbb{G}^d_{m,R_L}$ läßt sich durch d Gleichungen als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{A}^{2d}_{R_L}$ repräsentieren. Sei $r := [L : K]$ der Rank von R_L über R; in Anbetracht der expliziten Konstruktion von Weil-Restriktionen affiner Schemata ([BLR] 7.6/2, 7.6/4) ist folglich $\underline{F}'$ durch rd Gleichungen als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{A}^{2dr}_{R_L}$ repräsentierbar. Als diagonal eingebetterer Untertorus läßt sich $\underline{T}^\dagger$ innerhalb von $\underline{F}^\dagger$ durch $rd - d$ Gleichungen realisieren; als Pullback von $\underline{T}^\dagger$ unter φ läßt sich folglich $\underline{T}'$ innerhalb von $\underline{F}'$ durch $rd - d$ Gleichungen beschreiben. Somit ist $\underline{T}'$ durch $rd + (rd - d) = 2rd - d$ Gleichungen in $\mathbb{A}^{2rd}_{R_L}$ repräsentierbar, wie gewünscht. □

7.2.3 Rekonstruktion von $\underline{T}^0_n$

Wir können nun wie angekündigt beweisen, daß $\underline{T}^0_n$ für $m \geq \max(n + h, 2h)$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist. Zunächst zeigen wir dies für $\underline{w}^*\underline{T}^0$:

7.2.8 Satz. *Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, und sei m eine natürliche Zahl größer oder gleich $\max(n + h, 2h)$. Dann ist $(\underline{w}^*\underline{T}^0)_n$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller lokalen endlichen vollständigen Durchschnitte über R_L, sei $\mathcal{C}_m$ die Menge aller lokalen endlichen vollständigen Durchschnitte über $R_{L,m}$, und sei $\mathcal{C}'_m$ die Menge aller Elemente in $\underline{C}_m$, welche durch Elemente in $\mathcal{C}$ induziert sind. Nach Lemma 7.2.5 identifiziert sich $\underline{w}^*\underline{T}^0$ mit dem schematischen Abschluß der generischen Faser von $\underline{T}'$; nach Korollar 4.5.2 können wir somit $(\underline{w}^*\underline{T}^0)_n$ als schematischen Abschluß derjenigen Punkte von $\underline{T}'$ rekonstruieren, welche sich als n-te Reduktion von Punkten mit Werten in Elementen aus $\mathcal{C}$ realisieren lassen. Nach Lemma 7.2.7 genügt $\underline{T}'$ der ersten Bedingung in Korollar 5.3.3; folglich ist die betrachtete Punktmenge für $m \geq \max(n + h, 2h)$ durch die Menge derjenigen Punkte von $\underline{T}'$ gegeben, welche sich als n-te Reduktion von Punkten mit Werten in

Elementen aus $\mathcal{C}'_m$ realisieren lassen. Da nach Lemma 2.3.11 die Mengen $\mathcal{C}'_m$ und $\mathcal{C}_m$ übereinstimmen, beschreibt sich $(\underline{w}^*\underline{T}^0)_n$ in $\underline{T}'_m$ somit als schematischer Abschluß der n-ten Reduktion einer Menge von Punkten, welche durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist. Da nach Bemerkung 7.2.3 auch $\underline{T}'_m$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist, folgt somit, daß $(\underline{w}^*\underline{T}^0)_n$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist, wie behauptet. □

Um aus Satz 7.2.8 zu folgern, daß auch $\underline{T}^0_n$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert ist, benötigen wir ein elementares Descentargument:

7.2.9 Lemma. *Sei A ein Ring, sei A' eine treuflache A-Algebra, sei $f : X_2 \to X_1$ ein Morphismus von A-Schemata, und seien $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$ abgeschlossene Unterschemata. Beschränkt sich $f \otimes \mathrm{id}_{A'}$ zu einem Morphismus von $Y_2 \otimes_A A'$ nach $Y_1 \otimes_A A'$, so beschränkt sich f bereits über A zu einem Morphismus von Y_2 nach Y_1.*

Beweis. Die Aussage ist lokal zu verifizieren, so daß wir ohne Einschränkung die X_i als affin ansehen dürfen, $X_i = \mathrm{Spec}\, B_i$; sei $\mathfrak{b}_i \subset B_i$ das zu Y_i korrespondierende Ideal, und sei $\psi : B_1 \to B_2$ der zu f assoziierte Homomorphismus von A-Algebren. Nach Voraussetzung liegt das Bild von $\mathfrak{b}_1 \otimes_A A'$ unter $\psi \otimes \mathrm{id}_{A'} : B_1 \otimes_A A' \to B_2 \otimes_A A'$ in $\mathfrak{b}_2 \otimes_A A'$. Da A' über A treuflach ist, sind die Zeilen des kanonischen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{b}_2 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathfrak{b}_2 \otimes_A A' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, hook] & \mathfrak{b}_2 \otimes_A A' \otimes_A A' \arrow[d, hook] \\
B_2 \arrow[r] & B_2 \otimes_A A' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B_2 \otimes_A A' \otimes_A A'
\end{tikzcd}$$

exakt, so daß $B_2 \cap (\mathfrak{b}_2 \otimes_A A')$ mit $\mathfrak{b}_2$ übereinstimmt. Folglich wird $\mathfrak{b}_1$ unter ψ nach $\mathfrak{b}_2$ abgebildet, wie gewünscht. □

7.2.10 Korollar. *Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, und sei m eine natürliche Zahl größer oder gleich $\max(n + h, 2h)$. Dann ist $\underline{T}^0_n$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert.*

Beweis. Nach Lemma 7.2.5 ist $\underline{w}^*\underline{T}^0 \subset \underline{w}^*\underline{T}^\dagger$ in $\underline{T}'$ enthalten, und nach Satz 7.2.8 rekonstruieren wir $(\underline{w}^*\underline{T}^0)_n = \underline{w}_n^*\underline{T}^0_n$ durch eine Punkmenge von $\underline{T}'_n$, welche durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist. Sind also T^1, T^2 bewertete Tori und ist $\mathrm{red}_m(T^1) \cong \mathrm{red}_m(T^2)$ ein Isomorphismus, so identifiziert der induzierte Isomorphismus $\psi : \underline{T}^{\dagger,1}_n \cong \underline{T}^{\dagger,2}_2$ nach Pullback unter $\underline{w}_n^*$ die abgeschlossenen Unterschemata $\underline{w}_n^*\underline{T}^{0,1}_n$ und $\underline{w}_n^*\underline{T}^{0,2}_n$. Mit $\underline{w}$ ist auch $\underline{w}_n$ treuflach; nach Lemma 7.2.9 beschränkt sich ψ somit zu einem Isomorphismus $\underline{T}^{0,1}_n \cong \underline{T}^{0,2}_n$, wie gewünscht. □

7.3 Kontrolle des Glättungsprozesses

Nach Theorem 6.2.10 identifiziert sich $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ mit der Gruppenglättung von $\underline{T}^0$; ihre Konstruktion erfolgt nach Satz 6.2.4 durch Anwendung des Néronschen Glättungsprozesses. Dieser erzeugt eine Folge von Dilatationen

$$\dots \underline{T}^{i+1} \to \underline{T}^i \to \dots \to \underline{T}^0 \quad ;$$

hierbei ist $\underline{T}^{i+1} \to \underline{T}^i$ die Dilatation von Z^i auf $\underline{T}^i$, wo Z^i als der schematische Abschluß der Spezialisierung der R^{sh}-wertigen Punkte von $\underline{T}^i$ definiert ist. Nach Satz 6.2.4 stimmt $\underline{T}^i$ für $i \geq \delta(\underline{T}^0)$ mit $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ überein.

7.3.1 Kontrolle des Glattheitsdefekts

Wir werden zeigen, daß eine obere Schranke δ von $\delta(\underline{T}^0)$ existiert, derart daß $\min(\delta, m)$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist. Hierfür beweisen wir zunächst, daß $\delta(\underline{T}^0)$ bis auf den Verzweigungsindex $e_{L/K}$ von L über K, welcher aus trivialen Gründen durch $\mathrm{red}_0 T$ determiniert ist, durch $\delta(\underline{w}^*\underline{T}^0)$ beschränkt ist. Wir führen den Beweis in einem allgemeineren Rahmen:

7.3.1 Definition. *Seien A, B lokale Ringe, sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A, und sei $A \to B$ ein lokaler Homomorphismus. Die nicht notwendig endliche Zahl*

$$e_{B/A} := \mathrm{length}_B(B/\mathfrak{m}B)$$

heißt der Verzweigungsindex von B über A.

Bemerkung. Offenbar stimmt diese Festlegung mit Definition 6.3.5 überein, falls es sich bei A und B um diskrete Bewertungsringe handelt.

7.3.2 Lemma. *Seien A, B lokale Ringe, sei $A \to B$ ein lokaler Homomorphismus von endlichem Verzweigungsindex, und sei M ein A-Modul endlicher Länge. Dann besteht die Ungleichung*

$$\mathrm{length}_B(M \otimes_A B) \leq e_{B/A} \cdot \mathrm{length}_A(M) \quad .$$

Ist B über A flach, so gilt sogar Gleichheit.

Beweis. Der Fall $M = 0$ ist trivial; sei also $n := \mathrm{length}_A(M) > 0$. Wir fixieren eine Kette $0 = M_0 \subset \dots M_n = M$ von Untermoduln von M, deren Quotienten M_i/M_{i-1} die Länge 1 besitzen $(1 \leq i \leq n)$. Die exakte Sequenz

$$0 \to M_{n-1} \to M \to M/M_{n-1} \to 0$$

induziert eine exakte Sequenz

$$M_{n-1} \otimes_A B \to M \otimes_A B \to M/M_{n-1} \otimes_A B \to 0 \quad ,$$

wobei der linke Homomorphismus im Fall der Flachheit von B über A sogar injektiv ist. Da die Länge von Moduln in kurzen exakten Sequenzen additiv ist, genügt es, die Behauptung für den Fall $n = 1$ zu beweisen; der Allgemeinfall folgt dann mit Induktion nach n. Sei also $\mathrm{length}_A M$ gleich 1, und sei $x \in M$ nicht das Nullelement. Dann ist M bereits durch x erzeugt; sei $\alpha : A \to M$ der durch $a \mapsto a \cdot x$ gegebene surjektive Homomorphismus. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \ker\,\alpha \to A \xrightarrow{\alpha} M \to 0 \quad .$$

Der Kern von α ist ein echtes Ideal von A, denn M ist nicht der Nullmodul. Wäre $\ker \alpha$ echt in dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von A enthalten, so wäre $A/\mathfrak{m}$ ein echter von Null verschiedener Quotient von $M \cong A/\ker \varphi$, im Widerspruch dazu, daß $\mathrm{length}_A M$ gleich 1 ist. Folglich stimmt $\ker \alpha$ mit $\mathfrak{m}$ überein, und die induzierte exakte Sequenz

$$0 \to \ker \alpha \cdot B \to B \stackrel{\alpha \otimes 1}{\to} M \otimes_A B \to 0$$

zeigt somit, daß sich $M \otimes_A B$ mit $B/\mathfrak{m}B$ identifiziert. Folglich besteht die Gleichung

$$\mathrm{length}_B(M \otimes_A B) = \mathrm{length}_B(B/\mathfrak{m}B) = e_{B/A} \quad ,$$

wie gewünscht. □

7.3.3 Korollar. *Der Glattheitsdefekt $\delta(\underline{T}^0)$ genügt der Gleichung*

$$\delta(\underline{w}^* \underline{T}^0) = e_{L/K} \cdot \delta(\underline{T}^0) \quad .$$

Beweis. Seien e, e_L die neutralen Elemente der Gruppen $\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}})$ und $\underline{w}^*\underline{T}^0(R_L^{\mathrm{sh}})$, sei $\underline{w}^{\mathrm{sh}} : \mathrm{Spec}\, R_L^{\mathrm{sh}} \to \mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{sh}}$ der kanonische treuflache Morphismus, und sei $p : \underline{w}^*\underline{T}^0 \to \underline{T}^0$ die Projektion. Offenbar ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\, R_L^{sh} \arrow[r, "e_L"] \arrow[d, "\underline{w}^{\mathrm{sh}}"'] & X \otimes_R R_L \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{Spec}\, R^{sh} \arrow[r, "e"] & X \end{tikzcd}$$

kommutativ. Ist M ein endlicher Modul über einem Hauptidealring A und ist $A \to B$ ein Homomorphismus von Hauptidealringen, so stimmt $\mathrm{Tor}_B(M \otimes_A B)$ nach dem Hauptsatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen mit $\mathrm{Tor}_A(M) \otimes_A B$ überein. Nach Lemma 7.3.2 bestehen also Gleichungen:

$$\begin{aligned} \delta(\underline{w}^*\underline{T}^0) &= \mathrm{length}_{R_L^{sh}}(\mathrm{Tor}(e_L^*(\Omega^1_{\underline{w}^*\underline{T}^0/R_L}))) \\ &= \mathrm{length}_{R_L^{sh}}(\mathrm{Tor}(e_L^* p^* \Omega^1_{\underline{T}^0/R})) \\ &= \mathrm{length}_{R_L^{sh}}(\mathrm{Tor}(\underline{w}^{\mathrm{sh},*} e^* \Omega^1_{\underline{T}^0/R})) \\ &= \mathrm{length}_{R_L^{sh}}(\underline{w}^{\mathrm{sh},*} \mathrm{Tor}(e^* \Omega^1_{\underline{T}^0/R})) \\ &= e_{R_L^{sh}/R^{sh}} \cdot \mathrm{length}_{R^{sh}}(\mathrm{Tor}(e^* \Omega^1_{\underline{T}^0/R})) \\ &= e_{R_L/R} \cdot \delta(\underline{T}^0) \quad , \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Da sich $\underline{w}^*\underline{T}^0$ mit dem schematischen Abschluß der generischen Faser von $\underline{T}'$ identifiziert, ist $\delta(\underline{w}^*\underline{T}^0)$ durch $\delta(\underline{T}')$ beschränkt. Zum Beweis dieser Tatsache benötigen wir wiederum ein einfaches Lemma:

7.3.4 Lemma. *Sei A ein Hauptidealring mit Quotientenkörper K, und seien M, N endlich erzeugte A-Moduln gleichen Rangs. Ferner sei $\varphi : M \to N$ ein surjektiver Homomorphismus. Dann ist auch der durch φ induzierte Homomorphismus*

$$\mathrm{Tor}_A(M) \to \mathrm{Tor}_A(N)$$

der Torsionsuntermoduln surjektiv.

Beweis. Sei $M \cong F_A(M) \oplus \mathrm{Tor}_A(M)$ eine Zerlegung von M, wo $F_A(M)$ über A frei sei. Zu einem Element t in $\mathrm{Tor}_A(N)$ wählen wir ein φ-Urbild $f+s$ mit $f \in F_A(M)$, $s \in \mathrm{Tor}_A(M)$. Da Torsion unter Homomorphismen auf Torsion abgebildet wird, liegt $\varphi(s)$ in $\mathrm{Tor}_A(N)$, und somit ist $\varphi(f) = \varphi(f+s-s) = t - \varphi(s)$ ebenfalls in $\mathrm{Tor}_A(N)$ enthalten; das Bild von $f \otimes 1 \in M \otimes_A K$ unter $\varphi \otimes \mathrm{id}_K$ ist folglich trivial. Da $\varphi \otimes \mathrm{id}_K : M \otimes_A K \to N \otimes_A K$ als surjektiver Homomorphismus von K-Vektorräumen gleicher Dimension notwendig injektiv ist, folgt $f \otimes 1 = 0$. Da $F_A(M)$ keine A-Torsion besitzt, ist der kanonische Homomorphismus $F_A(M) \to F_M \otimes_R K$ ebenfalls injektiv; somit folgt $f = 0$, und wir sehen, daß das Urbild $f+s$ von t in $\mathrm{Tor}_A(M)$ enthalten ist. □

Wir sehen nun, daß unter abgeschlossenen Immersionen, welche Isomorphismen generischer Fasern induzieren, der Glattheitsdefekt des kleineren durch den des größeren Schemas beschränkt ist:

7.3.5 Lemma. *Sei R ein beliebiger diskreter Bewertungsring, seien $\underline{X}$, $\underline{X}'$ R-Schemata von lokal endlichem Typ mit glatten generischen Fasern, sei $i : X \hookrightarrow X'$ eine abgeschlossene R-Immersion, welche einen Isomorphismus generischer Fasern induziert, und sei $a : \mathrm{Spec}\, R^{sh} \to X$ ein R^{sh}-wertiger Punkt von X. Dann besteht die Ungleichung*

$$\delta(X, a) \leq \delta(X', i \circ a) \quad .$$

Beweis. Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X'}$ die zu i korrespondierende Idealgarbe; die kanonische exakte Sequenz

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to i^*\Omega^1_{X'/R} \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{X/R} \to 0$$

beinhaltet einen kanonischen surjektiven Homomorphismus $\alpha : i^*\Omega^1_{X'/R} \to \Omega^1_{X/R}$. Aufgrund der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts ist der unter a zurückgezogene Homomorphismus $a^*\alpha : (i \circ a)^*\Omega^1_{X'/R} \to a^*\Omega^1_{X/R}$ von R^{sh}-Moduln ebenfalls surjektiv. Bei der generischen Faser von $a^*\alpha$ handelt es sich nach Voraussetzung um einen Isomorphismus; nach Lemma 7.3.4 ist folglich auch der durch $a^*\alpha$ induzierte Homomorphismus der Torsionsuntermoduln surjektiv, und es folgt

$$\mathrm{length}_{R^{sh}}(\mathrm{Tor}(a^*\Omega^1_{X/R})) \leq \mathrm{length}_{R^{sh}}(\mathrm{Tor}((i \circ a)^*\Omega^1_{X'/R})) \quad ,$$

wie behauptet. □

7.3.6 Korollar und Definition. *Nach Korollar 7.3.3 und Lemma 7.3.5 ist die T zugeordnete Invariante*

$$\delta(T) := \left\lfloor \frac{\delta(e, \underline{T}')}{e(L/K)} \right\rfloor$$

eine obere Schranke von $\delta(\underline{T}^0)$.

Es ist interessant zu bemerken, daß $\delta(T)$ durch $h(T)$ beschränkt ist. Diese Tatsache wird es uns ermöglichen, die Zahlen m, für welche $\underline{T}_n^{\mathrm{NR},b}$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist, lediglich in Abhängigkeit von h anzugeben.

7.3.7 Bemerkung. *Die Invarianten $\delta(T)$, $h(T)$ genügen der Ungleichung*

$$\delta(T) \leq h(T) \quad .$$

Beweis. Wir fixieren für $N \gg 0$ eine Darstellung von $\underline{T}'$ als abgeschlossenes Unterschema des affinen Raums $\mathbb{A}^N_{R_L}$. Sei $\pi \in R$ ein uniformisierendes Element, sei d die Dimension von T, und sei h die Zahl $h(T)$. Ferner sei $Y := Y_1, \ldots, Y_n$ ein System von Variablen, sei $I \subset R_L[Y]$ das zu $\underline{T}' \subset \mathbb{A}^n_{R_L}$ korrespondierende Ideal, sei B der

Quotient $R_L[Y]/I$, und sei $J \subset R_L[Y]$ das Jacobi-Ideal, welches von der Menge $\triangle$ aller $(N-d)$-Minoren der zu der gewählten Darstellung assoziierten Jacobi-Matrix erzeugt ist. Sei ν_L die durch R_L gegebene Bewertung auf L. Da π^h nach Definition von h in $J \cdot B$ enthalten ist, existiert eine Darstellung $\pi^h = \sum_i b_i \Delta_i$ mit Elementen $b_i \in B$ und $(N-d)$-Minoren $\Delta_i \in \triangle$. Pullback unter dem neutralen Element $e \in \underline{T}'(R_L)$ liefert die Gleichung $\pi^h = \sum_i e^*(b_i) \cdot e^*(\Delta_i)$, und es folgt

$$e(L/K) \cdot h = \nu_L(\pi^h) \geq \min_i(\nu_L(e^* b_i) + \nu_L(e^*\Delta_i)) \geq \min_{\Delta \in \triangle} \nu_L(e^*\Delta) \quad .$$

Nach [BLR] 3.3/2 berechnet sich $\delta(\underline{T}')$ jedoch gerade zu $\min_{\Delta\in\triangle} \nu_L(e^*\Delta)$; folglich ist $\delta(\underline{T}')$ durch $e(L/K) \cdot h$ beschränkt, wie behauptet. □

Wir wissen bereits, daß $\min(h, m+1)$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist. Um die Zahlen m, für welche $\underline{T}_n^{\mathrm{NR},b}$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist, mit möglichst hoher Genauigkeit anzugeben, zeigen wir nun eine analoge Aussage für die Invariante $\delta(T)$:

7.3.8 Lemma. *Sei $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, für welche $\delta(\underline{T}')$ echt durch $(m+1) \cdot e(L/K)$ beschränkt ist. Dann ist $\delta(\underline{T}')$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert.*

Beweis. Wir berechnen den Glattheitsdefekt von $\underline{T}'$ bei dem neutralen Element $e \in \underline{T}'(R^{\mathrm{sh}})$ unter Verwendung der in Abschnitt 7.2.1 erklärten Einbettung $d' : \underline{T}' \hookrightarrow \underline{F}'$. Sei r der Rang von R_L über R. Das korrespondierende $\mathcal{O}_{\underline{F}'}$-Ideal ist durch die φ-Pullbacks der kanonischen globalen Schnitte $f_1, \ldots, f_{rd-d} \in \mathcal{O}_{\underline{F}^\dagger}(\underline{F}^\dagger)$, welche die Diagonaleinbettung $\underline{T}^\dagger \hookrightarrow \underline{F}^\dagger$ erklären, erzeugt. Da die generische Faser von $\underline{T}'$ bei e über K glatt von relativer Dimension d ist, berechnet sich $\delta(\underline{T}')$ nach [BLR] 3.3/2 als das Minimum der ν_L Ordnungen von $e^*\Delta$, wo Δ die Menge $\triangle$ aller $(rd-d)$-Minoren der Jacobimatrix

$$J = \left(\frac{\partial(\varphi^* f_i)}{\partial z_j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq rd-d \\ 1 \leq j \leq rd}}$$

durchläuft; hier bezeichnet $z_1, \ldots, z_n r$ das kanonische Koordinatensystem von $\underline{F}^\dagger$, und ν_L ist die durch R_L^{sh} gegebene Bewertung auf L^{sh}. Nach Bemerkung 7.2.3 ist die m-te Reduktion des zu T assoziierten kartesischen Diagramms $(*)$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert; folglich gilt selbiges für die Matrix $\mathrm{red}_m(e^*J)$. Da der abgeschnittene diskrete Bewertungsring $\mathrm{red}_n(R_L)$ die Länge $(m+1)e(L/K)$ besitzt, ist somit $\delta(\underline{T}')$ für $\delta(\underline{T}') < (m+1)e(L/K)$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert, wie behauptet. □

7.3.9 Bemerkung und Definition. *Nach Lemma 7.3.8 ist die natürliche Zahl $\min(\delta(T), m+1)$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert; somit erklärt die Zuordnung*

$$\delta(\mathrm{red}_m(T)) := \delta_m(T) := \min(\delta(T), m+1)$$

einen Invariantenfunktor auf der Kategorie der reduzierten Torusdaten.

7.3.2 Definition der $\underline{F}^i$

Wir wollen das Reduktionsverhalten der Folge von Dilatationen

$$\ldots \underline{T}^{i+1} \to \underline{T}^i \to \ldots \to \underline{T}^0$$

studieren, wo das Zentrum Z^i von $\underline{T}^{i+1} \to \underline{T}^i$ als der schematische Abschluß der Spezialisierung der R^{sh}-wertigen Punkte von $\underline{T}^i$ definiert ist. Das Reduktionsverhalten von Dilatationen nicht-glatter Schemata ist nicht unmittelbar zugänglich; wir betrachten daher die gegebene abgeschlossene Immersion von $\underline{T}^0$ in das glatte R-Schema $\underline{F}^0 := \underline{w}_* \underline{T}^\dagger$ und betrachten die induktiv definierte Folge von Dilatationen

$$\ldots \underline{F}^{i+1} \to \underline{F}^i \to \ldots \to \underline{F}^0 \quad ,$$

wobei das Zentrum $W^i \subset \underline{F}^i$ von $\underline{F}^{i+1} \to \underline{F}^i$ durch den schematischen Abschluß der Menge der Spezialisierungen der R^{sh}-wertigen Punkte von $\underline{T}^0$ gegeben sei.

Bemerkung. Aufgrund der universellen Eigenschaft der Dilatation induziert die Inklusion $\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \subset \underline{F}^0(R^{\mathrm{sh}})$ eine Inklusion $\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}})$; somit sind die Zentren W^i wohldefiniert.

Nach Lemma 6.2.3 handelt es sich bei den Zentren W^i um glatte k-Schemata; nach Satz 6.1.4 sind somit die Schemata $\underline{F}^i$ über R glatt. Wir werden im folgenden Abschnitt sehen, daß hiermit $\underline{F}^{i+1}_n$ durch $\underline{F}^i_{n+1}$ und W^i determiniert ist. Zunächst wollen wir zeigen, daß sich die Schemata $\underline{T}^i$ aus den $\underline{F}^i$ rekonstruieren lassen:

7.3.10 Lemma. *Der schematische Abschluß von T in $\underline{F}^i$ identifiziert sich mit $\underline{T}^i$.*

Beweis. Wir schließen mit Induktion nach i. Der Fall $i = 0$ ist nach Definition von $\underline{T}^0$ trivial; sei also $i > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\underline{T}^{i-1}$ ein abgeschlossenes Untergruppenschema von $\underline{F}^{i-1}$; folglich stimmt W^{i-1} mit Z^{i-1} überein. Nach [BLR] 3.2/2 (c),(d) kann $\underline{T}^i$ somit als abgeschlossenes Untergruppenschema von $\underline{F}^i$ realisiert werden. Da $\underline{T}^i$ als Dilatation über R flach ist, liegt die generische Faser T von $\underline{T}^i$ in $\underline{T}^i$ schematisch dicht, so daß sich $\underline{T}^i$ mit dem schematischen Abschluss von T in $\underline{F}^i$ identifiziert, wie behauptet. □

7.3.3 Kongruenzen von Dilatationen glatter Schemata

Wir zeigen nun wie angekündigt, daß $\underline{F}^{i+1}_n$ durch $\underline{F}^i_{n+1}$ und W^i determiniert ist. Wir werden allgemeiner folgende Aussage beweisen: Ist R ein beliebiger diskreter Bewertungsring, ist $\underline{X}$ ein glattes R-Schema, ist W ein glattes abgeschlossenes Unterschema der speziellen Faser von $\underline{X}$, ist $\underline{X}' \to \underline{X}$ die Dilatation von W auf X und ist $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so ist $\underline{X}'_n$ durch $\underline{X}_{n+1}$ determiniert.

Notation. Wir fixieren die in diesem Abschnitt verwendeten Notationen: Die Zahl i variiere stets in der Menge $\{1, 2\}$. Sei R^i ein diskreter Bewertungsring, sei $\underline{X}^i$ ein R^i-Schema, sei W^i ein Unterschema der speziellen Faser von $\underline{X}^i$, sei $\underline{X}'^i \to \underline{X}^i$ die Dilatation von W^i auf $\underline{X}^i$, sei $n \geq 0$ eine natürliche Zahl, und sei

$$\psi_{n+1} : \underline{X}^1_{n+1} \to \underline{X}^2_{n+1}$$

ein Isomorphismus, welcher sich zu einem Isomorphismus $W^1 \cong W^2$ beschränkt.

Wir konstruieren eine kanonische Einbettung von $\underline{X}'^i$ in ein Schema $\mathrm{Bl}'(\underline{X}^i, W^i)$. Ist $\underline{X}^i$ über R^i flach, so induziert ψ_{n+1} in kanonischer Weise einen Isomorphismus

$$\mathrm{Bl}'(\psi_{n+1}) : \mathrm{Bl}'(\underline{X}^1, W^1)_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bl}'(\underline{X}^2, W^2)_n \quad .$$

In Satz 6.1.4 untersuchten wir die lokale Struktur von Dilatationen glatter Schemata; die Kenntnis dieser Struktur ermöglich es uns zu zeigen, daß sich $\mathrm{Bl}'(\psi_{n+1})$, falls die Schemata $\underline{X}^i$ und W^i glatt sind, zu einem Isomorphismus $\underline{X}'^1_n \cong \underline{X}'^2_n$ einschränkt.

7.3.11 Definition. *Sei $\underline{X}$ ein Schema, sei $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_{\underline{X}}$-Modul, und sei $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_{\underline{X}}}(\mathcal{F})$ die symmetrische Algebra von $\mathcal{F}$. Wir bezeichnen das Schema*

$$\mathrm{Bl}'(\underline{X}, \mathcal{F}) := \mathrm{Proj}\ \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_{\underline{X}}}(\mathcal{F})$$

als die symmetrische Aufblasung von $\mathcal{F}$ auf $\underline{X}$. Ist $W \subset \underline{X}$ ein abgeschlossenes Unterschema und $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\underline{X}}$ die korrespondierende quasi-kohärente Idealgarbe, so setzen wir $\mathrm{Bl}'(\underline{X}, W) := \mathrm{Bl}'(\underline{X}, \mathcal{I})$.

Bemerkung. Aufgrund der universellen Eigenschaft der symmetrischen Algebra ist die Bildung von $\mathrm{Bl}'(\underline{X}, \mathcal{F})$ mit Basiswechsel verträglich; ist insbesondere $\underline{X}$ über einem diskreten Bewertungsring R definiert, so existieren kanonische Isomorphismen

$$\mathrm{Bl}'(\underline{X}, \mathcal{F})_n \cong \mathrm{Bl}'(\underline{X}_n, \mathcal{F} \otimes_R R_n) \quad .$$

Der kanonische Epimorphismus $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_{\underline{X}}}(\mathcal{F}) \to \bigoplus_{t \geq 0} \mathcal{I}^t$ erklärt die Aufblasung von W auf $\underline{X}$ in natürlicher Weise als abgeschlossenes Unterschema von $\mathrm{Bl}'(\underline{X}, W)$.

7.3.12 Lemma. *Sei $\underline{X}^i$ über R^i flach; dann induziert ψ_{n+1} in kanonischer Weise einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Bl}'(\psi_{n+1}) : \mathrm{Bl}'(\underline{X}^1, W^1)_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bl}'(\underline{X}^2, W^2)_n \quad .$$

Beweis. Sei π_i ein uniformisierendes Element von R^i, und sei $\mathcal{I}^{(i)} \subset \mathcal{O}_{\underline{X}^i}$ die zu W^i korrespondierende quasi-kohärente Idealgarbe. Da sich ψ_{n+1} zu einem Isomorphismus $\psi_n : \underline{X}^1_n \xrightarrow{\sim} \underline{X}^2_n$ beschränkt und sich $\mathrm{Bl}'(\underline{X}^i, W^i)_n$ in natürlicher Weise mit $\mathrm{Bl}'(\underline{X}^i_n, \mathcal{I}^i \otimes_{R^i} R^i_n)$ identifiziert, genügt es nachzuweisen, daß ψ_{n+1} in kanonischer Weise einen Isomorphismus $\mathcal{I}^{(1)} \otimes_{R^i} R^i_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^{(2)} \otimes_{R^i} R^i_n$ induziert; dies ist lokal auf $\underline{X}^i_n$ zu verifizieren. Sei $\underline{U}^i = \mathrm{Spec}\ A^i$ ein offenes affines Unterschemata von $\underline{X}^i$, derart daß sich die spezielle Faser von $\underline{U}^1$ unter ψ_{n+1} mit der speziellen Faser von $\underline{U}^2$ identifiziert, und sei $I^{(i)} \subset A^i$ das zu $\mathcal{I}^{(i)}$ auf $\underline{U}^{(i)}$ korrespondierende Ideal. Da W^i in der speziellen Faser von $\underline{X}^i$ liegt, ist π_i in $I^{(i)}$ enthalten. Bezeichnet (π_i^m) für $m \in \mathbb{N}$ das von π_i^m in A^i erzeugte Ideal, so ist also (π_i^m) in $I^{(i)}$ enthalten, und $I^{(i)} \cdot A^i/(\pi_i^m)$ ist kanonisch zu $I^{(i)}/(\pi_i^m)$ isomorph. Da sich W^1 unter ψ_{n+1} mit W^2 identifiziert, induziert ψ_{n+1} in kanonischer Weise Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} I^{(2)}/(\pi_2^{n+2}) & \xrightarrow{\sim} & I^{(1)}/(\pi_1^{n+2}) \\ I^{(2)}/(\pi_2) & \xrightarrow{\sim} & I^{(1)}/(\pi_1) \quad . \end{array}$$

Aufgrund der Inklusion $\pi_i \in I^{(i)}$ existiert ein kanonischer surjektiver Homomorphismus

$$I^{(i)}/(\pi_i^{n+2}) \to I^{(i)}/\pi_i^{n+1} I^{(i)} \quad ;$$

sein Kern $(\pi_i^{n+1} I^{(i)})/(\pi_i^{n+2})$ identifiziert sich mit $I^{(i)}/(\pi_i)$, denn da A^i als flache R-Algebra triviale π_i-Torsion besitzt, ist der durch Multiplikation mit π_i^{n+1} induzierte surjektive Homomorphismus

$$I^{(i)}/(\pi_i) \to (\pi_i^{n+1} I^{(i)})/(\pi_i^{n+2})$$

auch injektiv. Wir erhalten das folgende kanonische kommutative Diagramm mit exakten Zeilen, wo die vertikalen Isomorphismen kanonisch durch ψ_{n+1} induziert sind:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I^{(2)}/(\pi_2) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & I^{(2)}/(\pi_2^{n+2}) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & I^{(2)}/\pi_2^{n+1}I^{(2)} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\sim"', "\tau_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^{(1)}/(\pi_1) \arrow[r] & I^{(1)}/(\pi_1^{n+2}) \arrow[r] & I^{(1)}/\pi_1^{n+1}I^{(1)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad .$$

Da sich $I^{(i)} \otimes_{R^i} R^i_n$ kanonisch mit $I^{(i)}/\pi_i^{n+1}I^{(i)}$ identifiziert, handelt es sich bei τ_n um den gesuchten kanonischen Isomorphismus. $\square$

7.3.13 Lemma. *Sei X^i über R^i glatt, und sei W^i glatt über dem Restklassenkörper von R^i. Dann beschränkt sich* $\mathrm{Bl}'(\psi_{n+1})$ *zu einem Isomorphismus*

$$\psi'_{n+1} : \underline{X'}^1_n \xrightarrow{\sim} \underline{X'}^2_n \quad .$$

Beweis. Die Behauptung ist lokal auf $\underline{X}^i_n$ zu verifizieren, so daß wir $\underline{X}^i$ als affin annehmen dürfen, $\underline{X}^i = \operatorname{Spec} A^i$. Sei $I^{(i)} \subset A^i$ das zu W^i korrespondierende Ideal. Wir betrachten Punkte x_i in der speziellen Faser von $\underline{X'}^i$, derart daß sich die Projektion x_1 von x'_1 in $\underline{X}^1$ unter ψ_{n+1} mit der Projektion x_2 von x'_2 in $\underline{X}^2$ identifiziert. Sei r die Dimension von W^i bei x_i, und sei s die Dimension der speziellen Faser von $\underline{X}^i$ bei x_i. Nach dem Beweis von Satz 6.1.4 existiert bei x_i ein System $\boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{g}^i = f_1^{(i)}, \ldots, f_r^{(i)}, g_{r+1}^{(i)}, \ldots, g_s^{(i)}$ lokaler Koordinaten auf $\underline{X}^i$, derart daß $I^{(i)}$ bei x_i durch $\pi, \boldsymbol{g}^i$ erzeugt ist. Indem wir X^i verkleinern, dürfen wir annehmen, daß es sich bei $\boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{g}^i$ um ein globales Koordinatensystem von X^i und bei $\pi, \boldsymbol{g}^i$ um ein globales Erzeugendensystem von $I^{(i)}$ handelt. Nach dem Beweis von Satz 6.1.4 läßt sich das System $\boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{g}^i$ so wählen, daß die Restriktion von $\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{g}^1$ auf $\underline{X}^1_{n+1}$ unter ψ_{n+1} mit der Restriktion von $\boldsymbol{f}^2, \boldsymbol{g}^2$ auf $\underline{X}^2_{n+1}$ übereinstimmt. Sei $T^{(i)} := T_{r+1}^{(i)}, \ldots, T_s^{(i)}$ ein System von Variablen; wir setzen

$$B^i := A^i[T^{(i)}]/(\pi_i T^{(i)} - \boldsymbol{g}^i) \quad .$$

Die Dilatation $\underline{X'}^i$ von W^i auf $\underline{X}^i$ ist zu dem Spektrum von $B^i/(\pi\text{-Torsion})$ isomorph. Nach Lemma 6.1.5 dürfen wir nach Verkleinern der betrachteten Umgebung von x_i annehmen, daß B^i bereits frei von π-Torsion ist und folglich $\underline{X'}^i$ über $\underline{X}^i$ durch $\operatorname{Spec} B^i$ gegeben ist. Der Isomorphismus ψ_{n+1} beinhaltet einen Isomorphismus $R^2_{n+1} \cong R^1_{n+1}$; das Element $\psi_{n+1}(\pi_2) \in R^1_{n+1}$ stimmt also bis auf eine Einheit $\varepsilon \in R^1_{n+1}$ mit $\pi_1 \in R^1_{n+1}$ überein, $\pi_1 = \varepsilon \cdot \psi_{n+1}(\pi_2)$. Der durch ψ_{n+1} gegebene Isomorphismus $A^2_n \xrightarrow{\sim} A^1_n$ setzt sich also nach Wahl von $\boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{g}^i$ durch die Zuordnung $T_j^{(2)} \mapsto \varepsilon T_j^{(1)}$ zu einem Isomorphismus $B^2_n \xrightarrow{\sim} B^1_n$ fort. Es bleibt zu zeigen, daß dieser durch den kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Bl}'(\psi_{n+1}) : \mathrm{Bl}'(\underline{X}^1, W^1)_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bl}'(\underline{X}^2, W^2)_n$$

induziert ist. Die homogenen Lokalisierung

$$\left(\bigoplus_{t \geq 0} \operatorname{Sym}^t_{A^i} I^{(i)} \right)_{(\pi_i)}$$

ist als A^i-Algebra durch das System $\pi_i^{-1}\boldsymbol{g}^i$ erzeugt, wo π_i und die Komponenten von $\boldsymbol{g}^i$ als homogene Elemente im Grad 1 anzusehen sind. Ihr Spektrum bildet eine offene Umgebung von $\operatorname{Spec} B^i$ in $\mathrm{Bl}'(\underline{X}^i, W^i)$, wobei die kanonische abgeschlossene Immersion durch den Epimorphismus

$$\Big(\bigoplus_{t \geq 0} \operatorname{Sym}^t_{A^i} I^{(i)}\Big)_{(\pi_i)} \to A^i[T^{(i)}]/(\pi_i T^{(i)} - \boldsymbol{g}^i)$$

gegeben ist, welche die Erzeuger $\pi_i^{-1}\boldsymbol{g}^i$ auf $T^{(i)}$ abbildet. Das kanonische durch φ_{n+1} induzierte Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{t\geq 0} \mathrm{Sym}^t_{A_n^2}(I^{(2)} \otimes_{R^2} R_n^2))_{(\pi_2)} & \longrightarrow & A_n^2[T^{(2)}]/(\pi_i T^{(2)} - \boldsymbol{g}^2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\bigoplus_{t\geq 0} \mathrm{Sym}^t_{A_n^1}(I^{(1)} \otimes_{R^1} R_n^1))_{(\pi_1)} & \longrightarrow & A_n^1[T^{(1)}]/(\pi_1 T^{(1)} - \boldsymbol{g}^1) \end{array}$$

ist wie gewünscht kommutativ, da das System $\boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{g}^i$ so gewählt wurde, daß die Restriktion von $\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{g}^1$ auf $\underline{X}_{n+1}^1$ unter ψ_{n+1} mit der Restriktion von $\boldsymbol{f}^2, \boldsymbol{g}^2$ auf $\underline{X}_{n+1}^2$ übereinstimmt. □

7.3.14 Korollar. *Sei $i \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl; dann ist $\underline{F}_n^{i+1}$ durch $\underline{F}_{n+1}^i$ und $W^i \subset \mathrm{red}_{n+1}(\underline{F}^i)$ determiniert.*

Beweis. Dies ist die Aussage von Lemma 7.3.13, angewendet auf das glatte R-Schema $\underline{F}^{i+1}$ und das über dem Restklassenkörper von R glatte Zentrum W^i. □

7.3.4 Kongruenzen der $\underline{F}^i$

Sei $i \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl; wir werden induktiv zeigen, daß $\underline{F}_{m-i}$ für $m \geq \max(2h+i, 3h)$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert ist. Nach Korollar 7.3.14 bleibt im wesentlichen das Zentrum W^i von $\underline{F}^{i+1} \to \underline{F}^i$ zu beschreiben, welches als schematischer Abschluß der Spezialisierung der Menge der R^{sh}-wertigen Punkte von $\underline{T}^0$ definiert ist. Korollar 5.3.3 zeigt, daß die n-te Reduktion von $\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}})$ für bereits durch $\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}_{n+h})$ determiniert ist:

7.3.15 Lemma. *Sei n eine natürliche Zahl größer oder gleich $h = h(T)$. Dann dehnt sich jeder R_n^{sh}-wertige Punkt von $\underline{T}^0$, welcher durch einen R^{sh}_{n+h}-wertigen Punkt induziert ist, zu einem R^{sh}-wertigen Punkt aus. Mit anderen Worten, die Punktmengen*

$$\mathrm{im}\,(\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{T}^0(R_n^{\mathrm{sh}})) \quad \text{und} \quad \mathrm{im}\,(\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}_{n+h}) \to \underline{T}^0(R_n^{\mathrm{sh}}))$$

stimmen überein.

Beweis. Als schematischer Abschluß von T in $\underline{w}_*\underline{T}^\dagger$ ist $\underline{T}^0$ über R flach und somit nach Lemma 4.1.9 ein affines flaches R-Gruppenschema von endlichem Typ; nach Satz 4.5.1 ist folglich $\underline{T}^0$ über R ein vollständiger Durchschnitt. Der Ring R^{sh} ist lokal, π-torsionsfrei und π-adisch vollständig ist; ferner ist $h(\underline{T}^0/R)$ nach Korollar 7.2.6 durch h beschränkt; somit folgt die Behauptung unmittelbar aus Korollar 5.3.3. □

Wie das folgende Lemma zeigt, ist die n-te Reduktion der eindeutigen Fortsetzung eines R^{sh}-wertigen Punkts von $\underline{T}^0$ nach $\underline{F}^i$ bereits durch Kenntnis der $n+i$-ten Reduktion dieses Punkts festgelegt; diese Tatsache beruht auf der lokalen Struktur von Dilatationen. Nach Lemma 7.3.15 ist folglich insbesondere W^i in $\underline{F}^i$ durch eine geeignete Reduktion von $\underline{T}^0$ und somit nach Korollar 7.2.10 für $m \gg 0$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert.

7.3.16 Lemma. *Sei $i \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Sind zwei R^{sh}-wertige Punkte von $\underline{T}^0$ modulo π^{n+i} kongruent, so stimmen ihre eindeutigen Fortsetzungen nach $\underline{F}^i$ modulo π^n überein. Insbesondere ist die Punktmenge*

$$\mathrm{im}\,(\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{F}^i(R_n^{\mathrm{sh}})) \quad \textit{durch} \quad \mathrm{im}\,(\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}_{i+n}))$$

festgelegt.

Beweis. Sei a ein R^{sh}-wertiger Punkt von $T^0(R^{\mathrm{sh}})$, und für $j \in \mathbb{N}$ sei $a_j \in \underline{F}^j(R^{\mathrm{sh}})$ die eindeutige Fortsetzung von a nach $\underline{F}^j$. Sei B^j der Ring der globalen Schnitte von $\underline{F}^j$. Wir zeigen mit Induktion nach i, daß für alle $i \geq 0$ und alle $n \geq 0$ die Reduktion $\mathrm{red}_n(a_i)$ durch $\mathrm{red}_{i+n}(a_0)$ festgelegt ist. Der Fall $i = 0$ ist trivial; sei also $i > 0$, und sei $n \geq 0$ beliebig gegeben. Die B^{i-1}-Algebra B^i besitzt eine Darstellung

$$B^i = (B^{i-1}[Y]/(\pi Y - \boldsymbol{g}))/(\pi\text{-Torsion}) \quad ,$$

wobei $Y = Y_1, \ldots, Y_m$ ein System von Variablen bezeichnet und es sich bei $\boldsymbol{g} = g_1, \ldots, g_m$ um ein System globaler Schnitte in B^{i-1} handelt, welche zusammen mit π das zu $W^{i-1} \subset \underline{F}^{i-1}$ korrespondierende Ideal erzeugen. Wir bezeichnen das System der Klassen von Y in suggestiver Weise mit $\pi^{-1}\boldsymbol{g}$. Ein Punkt y von $\underline{F}^i$ mit Werten in einer R-Algebra C ist durch seine Projektion auf $\underline{F}^{i-1}$ und die Angabe geeigneter zusätzlicher Koordinaten $\pi^{-1}\boldsymbol{g}(y)$ festgelegt. Da a_{i-1} über W^{i-1} faktorisiert, verschwindet $\boldsymbol{g}(a_{i-1}) = a_{i-1}^*\boldsymbol{g}$ modulo π; folglich existieren Gleichungen $\boldsymbol{g}(a_{i-1}) = \pi\boldsymbol{r}$ mit einem m-Tupel $\boldsymbol{r}$ von Elementen in R^{sh}. Da R^{sh} triviale π-Torsion besitzt, ist $\boldsymbol{r}$ eindeutig bestimmt, und a_i genügt notwendig der Gleichung $\pi^{-1}\boldsymbol{g}(a_i) = \boldsymbol{r}$. Da die Klasse von $\boldsymbol{r}$ modulo π^{n+1} aufgrund der π-Torsionsfreiheit von R^{sh} durch die Klasse von $\pi\boldsymbol{r}$ modulo π^{n+2} festgelegt ist, folgt somit, daß $\mathrm{red}_n(a_i)$ durch $\mathrm{red}_{n+1}(a_{i-1})$ determiniert ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathrm{red}_{n+1}(a_{i-1})$ jedoch durch $\mathrm{red}_{(i-1)+(n+1)}(a_0) = \mathrm{red}_{i+n}(a_0)$ festgelegt, wie gewünscht. □

Wir können nun zeigen, daß $\underline{F}^i_{m-i}$ für $m \gg 0$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert ist:

7.3.17 Satz. *Sei $h := h(T)$, und seien $n, i \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Dann gelten folgende Aussagen:*

(*i*) *Für $m \geq \max(n+h, 2h)$ ist $\underline{T}^0_n$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert.*

(*ii*) *Für $m \geq \max(2h+i, 3h)$ ist $\underline{F}^i_{m-i}$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert.*

(*iii*) *Für $m \geq \max(2h+i, 3h)$ ist W^i durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die erste Aussage; sei also m größer oder gleich $\max(n+h, 2h)$. Aufgrund der Ungleichung $m \geq 2h$ ist $\underline{T}^0_{m-h}$ nach Korollar 7.2.10 durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert, insbesondere also auch $\underline{T}^0_n$, denn n ist durch $m-h$ beschränkt.

Wir zeigen die Aussagen (*ii*) und (*iii*) simultan durch Induktion nach i. Ist l eine natürliche Zahl, so schreiben wir $(ii)_l$ für Aussage (*ii*), wo wir i gleich l setzen, entsprechend für Aussage (*iii*). Sei zunächst $i = 0$; Aussage $(ii)_0$ ist trivial, denn $\underline{F}^0$ ist gleich $\underline{w}_*\underline{T}^\dagger$, $\underline{T}^\dagger$ ist entfaltet, und der Weil-Restriktionsfunktor kommutiert mit Basiswechsel. Nach Definition ist $W^0 \subset \underline{F}^0$ der schematische Abschluß der Punktmenge im $(\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{T}^0(R_0^{\mathrm{sh}}))$; diese ist aus trivialen Gründen durch die Spezialisierung der Punktmenge

$$\mathrm{im}\,(\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{T}^0(R_h^{\mathrm{sh}})) \qquad (\dagger)$$

gegeben. Aufgrund der trivialen Ungleichung $h \geq h$ stimmt die Punktmenge (†) nach Lemma 7.3.15 mit der Punktmenge

$$\mathrm{im}\,(\underline{T}^0(R_{2h}^{\mathrm{sh}}) \to \underline{T}^0(R_h^{\mathrm{sh}})) \qquad (\dagger\dagger)$$

überein, und diese ist nach (*i*) für $m \geq 3h$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert. Nach $(ii)_0$ ist $\underline{F}^0_0$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert, somit ist W^0 als schematischer Abschluß der Spezialisierung von (††) in $\underline{F}^0_0$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert; dies ist Aussage $(iii)_0$.

Sei nun $i > 0$ und sei m größer oder gleich $\max(2h+i, 3h)$; wir zeigen zunächst Aussage $(ii)_i$. Da m insbesondere den Voraussetzungen von $(\mathrm{ii})_{i-1}$ und $(\mathrm{iii})_{i-1}$ genügt, sind $\underline{F}^{i-1}_{m-i+1}$ und W^{i-1} nach Induktionsvoraussetzung durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert. Nach Korollar 7.3.14 ist folglich $\underline{F}^i_{m-i}$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert; dies ist Aussage $(ii)_i$.

Zeigen wir nun Aussage $(iii)_i$. Mit $\underline{F}^i_{m-i}$ ist insbesondere $\underline{F}^i_0$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert. Das Schema W^i ist als schematischer Abschluß der Punktmenge

$$\mathrm{im}\,(\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{F}^i(R^{\mathrm{sh}}_0))$$

definiert, und letztere ist nach Lemma 7.3.16 durch die Punktmenge

$$\mathrm{im}\,(\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}_i)) \qquad (\dagger\dagger\dagger)$$

festgelegt; folglich genügt es zu zeigen, daß die Menge $(\dagger\dagger\dagger)$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist. Nach Lemma 7.3.15 besteht für $m - 2h \geq h$ die Gleichung

$$\mathrm{im}\,(\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}_{m-2h})) = \mathrm{im}\,(\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}_{m-h}) \to \underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}_{m-2h})) \quad .$$

Nach Aussage (i) ist $\underline{T}^0_{m-h}$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert; aufgrund der Ungleichung $m - 2h \geq i$ ist mit $\mathrm{im}\,(\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}_{m-2h}))$ folglich auch $\mathrm{im}\,(\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}_i))$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert, wie gewünscht. □

7.4 Kongruenzen von $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$

Wir können nun beweisen, daß $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}_n$ für $m \gg 0$ durch $\mathrm{red}_m T$ determiniert ist. Zunächst zeigen wir das Hilfsresultat, daß die Reduktionen der R^{sh}-wertigen Punkte eines glatten R-Schemas $\underline{X}$ in allen Reduktionen von $\underline{X}$ schematisch dicht liegen; man beachte die Analogie zu Lemma 2.3.8. Diese Tatsache wird es uns ermöglichen, $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}_n$ in $\underline{F}^{\delta}_n$ als schematischen Abschluß der Menge jener R^{sh}_n wertigen Punkte von $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ zu rekonstruieren, welche durch R^{sh}-wertige Punkte induziert sind.

7.4.1 Lemma. *Sei R ein diskreter Bewertungsring, und sei $\underline{X}$ ein glattes Schema über R; dann liegt die Punktmenge*

$$\mathrm{im}\,(\underline{X}(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{X}(R^{\mathrm{sh}}_n))$$

in $\underline{X}_n$ schematisch dicht.

Beweis. Die Aussage ist lokal auf $\underline{X}$ zu verifizieren, so daß wir $\underline{X}$ als affin annehmen dürfen, $\underline{X} = \mathrm{Spec}\, A$. Sei k der Restklassenkörper von R, und sei k_s der separal algebraische Abschluß von k. Nach [BLR] 2.3/5 ist die kanonische Abbildung $\underline{X}(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{X}(k_s)$ surjektiv, und nach [BLR] 2.2/13 liegt $\underline{X}(k_s)$ in der speziellen Faser von $\underline{X}$ schematisch dicht. Wir schließen mit Induktion nach n; der Fall $n = 0$ ist nunmehr klar. Sei also $n > 0$, und sei $f \in A_n$ ein Element, derart daß $f(a_n) \in R^{\mathrm{sh}}_n$ für alle $a \in \underline{X}(R^{\mathrm{sh}})$ verschwindet; es ist zu zeigen, daß f trivial ist. Nach dem Fall $n = 0$ verschwindet f in der speziellen Faser von $\underline{X}$; somit existiert ein Element $g \in A_n$, welches der Gleichung $f = \pi \cdot g$ genügt. Das Bild von g in A_{n-1} verschwindet dann in allen Punkten $\{a_{n-1}\,;\, a \in \underline{X}(R^{\mathrm{sh}})\}$; nach Induktionsvoraussetzung liegt g folglich in $\pi^n A_n$. Somit folgt $f \in \pi^{n+1} A_n$, also $f = 0$, wie gewünscht. □

Wir beweisen nun das zentrale Theorem [CY] 8.5:

7.4.2 Theorem. *Sei T ein Torus, sei $\delta_m := \delta_m(T)$, sei $h_m := h_m(T)$, sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, und sei $m \in \mathbb{N}$ größer oder gleich* $\max(n + \delta_m + 2h_m, 3h_m)$. *Dann ist $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}_n$ durch* $\mathrm{red}_m(T)$ *determiniert.*

Beweis. Wir setzen $\delta := \delta(T)$, $h := h(T)$. Es bestehen Gleichungen $\delta_m = \delta$ und $h_m = h$, denn aufgrund der Ungleichungen $m \geq n + \delta_m$, $m \geq n + h_m$ sind die Möglichkeiten $\delta_m = m + 1$, $h_m = m + 1$ ausgeschlossen. Nach Korollar 7.3.6 ist $\delta(\underline{T}^0)$ durch δ beschränkt; nach Lemma 7.3.10 identifiziert sich $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ folglich mit dem schematischen Abschluß von T in $\underline{F}^\delta$. Sei $Y := \mathrm{im}\ (\underline{T}^{\mathrm{NR},b}(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{F}^\delta(R_n^{\mathrm{sh}}))$ die n-te Reduktion der Menge der R^{sh}-wertigen Punkte von $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$, aufgefaßt als Punktmenge in $\underline{F}_n^\delta$. Da $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ über R glatt ist, identifiziert sich $\underline{T}_n^{\mathrm{NR},b}$ nach Lemma 7.4.1 mit dem schematischen Abschluß von Y in $\underline{F}_n^\delta$. Aufgrund der Ungleichung $m \geq \max(2h+\delta, 3h)$ ist $\underline{F}_{m-\delta}^\delta$ nach Satz 7.3.17 (ii) durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert; die Ungleichung $m-\delta \geq n$ zeigt somit, daß insbesondere $\underline{F}_n^\delta$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert ist. Es genügt also nachzuweisen, daß auch Y durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert ist. Nach Definition von $\underline{T}^0$ stimmt $\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}})$ kanonisch mit $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}(R^{\mathrm{sh}})$ überein, und nach Lemma 7.3.16 ist $Y = \mathrm{im}\ (\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{F}^\delta(R_n^{\mathrm{sh}}))$ durch die Punktmenge

$$\mathrm{im}\ (\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{T}^0(R_{\delta+n}^{\mathrm{sh}})) \quad ,$$

also insbesondere durch die Punktmenge

$$\mathrm{im}\ (\underline{T}^0(R^{\mathrm{sh}}) \to \underline{T}^0(R_{\max(\delta+n,h)}^{\mathrm{sh}}))$$

festgelegt. Nach Lemma 7.3.15 stimmt diese Punktmenge mit

$$\mathrm{im}\ (\underline{T}^0(R_{\max(n+\delta,h)+h}^{\mathrm{sh}}) \to \underline{T}^0(R_{\max(\delta+n,h)}^{\mathrm{sh}}))$$

überein, und nach Korollar 7.2.10 ist $\underline{T}^0_{\max(N+\delta,h)+h}$ durch die $\max(n+\delta,h)+2h)$-te Reduktion von T, also durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert. Hiermit ist das Theorem bewiesen. □

7.4.3 Bemerkung. *Nach Bemerkung 7.3.7 ist die Ungleichung*

$$m \geq \max(n + \delta_m + 2h_m, 3h_m)$$

erfüllt, falls m größer oder gleich $n + 3h_m$ ist.

7.4.4 Korollar. *Sei T ein Torus, und sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann ist $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ für $m \gg 0$ durch $\mathrm{red}_m(T)$ determiniert.*

Beweis. Für $m \gg 0$ gilt $\delta_m(T) = \delta(T)$, $h_m(T) = h(T)$; somit läßt sich die Bedingung $m \geq \max(n + \delta_m + 2h_m, 3h_m)$ für $m \gg 0$ stets realisieren. □

7.5 Anwendungen

Sei K ein vollständig diskret bewerteter Körper, und sei $T = (R, R_L, \Gamma, \Lambda)$ ein Torus über K. Die maximale beschränkte Untergruppe $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ des Néron-Modells von T kommutiert genau dann mit Erweiterung des Grundkörpers K, wenn sich T bereits über K entfaltet. Ein Maß für die Änderung der Größe von $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ bei Erweiterung des Grundkörpers ist durch eine Invariante $c(T)$ von T gegeben. Diese berechnet sich zu der Hälfte des Artin-Führers der Galois-Darstellung von $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, wenn und nur dann wenn sie unter Isogenie invariant ist. Chai und Yu beweisen die Isogenieinvarianz von $c(T)$ zunächst für den Fall, daß die Charakteristik von K gleich Null ist ([CY] 11). Um dieses Resultat auf den Fall gleicher positiver Charakteristik auszudehnen, stützen sie sich auf Theorem 7.4.2 sowie auf Delignes Theorie zur Approximation lokaler Körper in positiver Charakteristik durch lokale Körper in Charakteristik Null ([D]). Die Frage nach der Isogenieinvarianz von $c(T)$ im Fall gleicher positiver Charakteristik bildete den Ausgangspunkt der Überlegungen von Chai und Yu, welche zur Entdeckung von Theorem 7.4.2 führten.

In diesem Abschnitt geben wir eine Zusammenfassung der Kapitel 9 – 12 aus [CY], ohne näher auf die Beweise einzugehen. Wir beginnen mit einem Überblick über Delignes Theorie ([D]), wobei wir die Aussage von Theorem 7.4.2 neu formulieren.

7.5.1 Delignes Theorie zur Approximation lokaler Körper

Notationen. Ein vollständig diskret bewerteter Körper mit perfektem Restklassenkörper heißt lokal. Sei K ein lokaler Körper, und sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Nach Satz 6.3.4 trägt L eine eindeutige diskrete Bewertung, welche die auf K gegebene Bewertung fortsetzt, derart daß sich der zugehörige Bewertungsring R_L von L mit dem ganzen Abschluß von R in L identifiziert; offenbar ist L unter dieser Bewertung lokal. Sei nun L über K zusätzlich galoisch; dann operiert die Galois-Gruppe $\Gamma := \mathrm{Gal}(L/K)$ von L über K auf R_L über R, wobei sich jeder durch $\sigma \in \Gamma$ gegebene Automorphismus von R_L über R zu einem Automorphismus des Bewertungsideals $\mathfrak{p}_L$ von R_L beschränkt und somit ein uniformisierendes Element π_L aus R_L auf ein uniformisierendes Element $\sigma(\pi_L)$ von R_L abbildet. Für $i \geq 0$ sei $\Gamma_i \subset \Gamma$ die Untergruppe der Elemente $\sigma \in \Gamma$, welche auf dem Quotienten R_L/π_L^{i+1} die Identität induzieren; ferner sei Γ_{-1} gleich Γ. Die Γ_i bilden eine absteigende Filtrierung von Γ. Ist u eine reelle Zahl größer oder gleich -1, so schreiben wir Γ_u für $\Gamma_{\lceil u \rceil}$. Die reelle Funktion $\varphi : [-1, \infty) \to [-1, \infty)$, definiert durch

$$\varphi(u) := \int_0^u \frac{dt}{(\Gamma_0 : \Gamma_t)} \quad ,$$

ist offensichtlich invertierbar; wir bezeichnen ihre Umkehrfunkion mit ψ, und für $v \geq -1$ setzen wir $\Gamma^v := \Gamma_{\psi(v)}$. Die Gruppen Γ_i, Γ^i heißen die Verzweigungsgruppen von L über K; die Verzweigungsgruppen einer nicht notwendig endlichen Galois-Erweiterung definieren sich in natürlicher Weise als projektive Limiten der Verzweigungsgruppen endlicher galoischer Teilerweiterungen.

Bemerkung. In dem Anhang der Arbeit [D] verallgemeinert Deligne die Theorie der Verzweigungsgruppen auf den Fall separabler Körpererweiterungen, welche nicht notwendig galoisch sind.

7.5.1 Definition. *Sei K ein lokaler Körper mit Bewertungsring R und Bewertungsideal $\mathfrak{p}$, und sei $e \geq 0$ eine natürliche Zahl. Unter der e-ten Reduktion von K verstehen wir das Tripel*

$$\mathrm{Tr}_e K := (R/\mathfrak{p}^{e+1}, \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{e+2}, \varepsilon) \quad ,$$

wo ε den kanonischen Homomorphismus von $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{e+2}$ nach $R/\mathfrak{p}^{e+1}$ bezeichnet.

Deligne betrachtet die Reduktionen $\mathrm{Tr}_e K$ als Objekte einer Kategorie, welche aus Tripeln $S = (S, M, \varepsilon)$ besteht, wo S einen abgeschnittenen diskreten Bewertungsring, M einen freien S-Modul vom Rang 1 und ε einen Epimorphismus von M auf das maximale Ideal von S bezeichnen.

7.5.2 Bemerkung. *Die Isomorphieklasse des Tripels $S = (S, M, \varepsilon)$ ist durch die Isomorphieklassen des abgeschnittenen Bewertungsrings S determiniert.*

Beweis. Sei $S' = (S', M', \varepsilon')$ ein weiteres Tripel, und sei $u : S \xrightarrow{\sim} S'$ ein Isomorphismus abgeschnittener Bewerttungsringe. Wir fixieren ein erzeugendes Element π von M und wählen unter ε' eine Liftung π' von $u(\varepsilon(\pi))$ in M'. Nach Nakayamas Lemma handelt es sich hierbei um einen Erzeuger von M', denn ist die Länge l von S' echt größer als 1, so identifiziert sich das maximale Ideal $\mathfrak{m}'$ von S' unter ε' mit $M'/(\mathfrak{m}')^{l-1}M'$. Wir erhalten nun die gesuchte Fortsetzung von u zu einem Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} M'$, indem wir π mit π' identifizieren. □

7.5.3 Bemerkung. *Jedes Tripel $S = (S, M, \varepsilon)$ ist zu einer Reduktion $\mathrm{Tr}_e K^0$ eines lokalen Körpers K^0 der Charakteristik 0 isomorph.*

Beweis. Nach dem Struktursatz von Cohen in der Form von Korollar 1.3.25 ist der abgeschnittene Bewertungsring S als Quotient eines regulären vollständigen lokalen noetherschen Rings B von Charakteristik 0 darstellbar; nach Bemerkung 1.4.6 dürfen wir annehmen, daß die Krulldimension von B gleich 1 ist und es sich bei B folglich um einen diskreten Bewertungsring handelt. Die Behauptung folgt nun mit Bemerkung 7.5.2. □

7.5.4 Definition. *Sei $e \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir definieren $(\mathrm{ext}\ K)^e$ als die Kategorie der endlichen separablen Körpererweiterungen L/K, für welche die $(e+1)$-te Verzweigungsgruppe $\mathrm{Gal}(L'/K)^{e+1}$ der normalen Hülle L' von L über K trivial ist.*

7.5.5 Definition. *Deligne definiert zu einem Tripel $S = (S, M, \varepsilon)$ eine Kategorie $(\mathrm{ext}\ S)^e$ von Erweiterungen von S; für die Einzelheiten siehe [D] 2.7.*

7.5.6 Theorem. *Sei K ein lokaler Körper. Der Reduktionsfunktor erklärt eine kanonische Äquivalenz von Kategorien*

$$(\mathrm{ext}\ K)^e \to (\mathrm{ext}\ \mathrm{Tr}_e K)^e \quad .$$

Beweis. Siehe [D] 2.8. □

7.5.7 Korollar. *Sind K^0, K lokale Körper mit Bewertungsringen R^0, R und ist $\alpha : R^0_e \xrightarrow{\sim} R_e$ ein Isomorphismus, so dehnt sich dieser nach Bemerkung 7.5.2 zu einem Isomorphismus $\mathrm{Tr}_e K^0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tr}_e K$ aus und induziert folglich nach Theorem 7.5.6 eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\mathrm{ext}\ K^0)^e \xrightarrow{\sim} (\mathrm{ext}\ K)^e \quad .$$

Insbesondere existiert also zu jeder Galois-Erweiterung L/K, für welche die Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K)^{e+1}$ trivial ist, eine Erweiterung L^0/K^0, derart daß sich α zu einem Isomorphismus $R^0_{L,e} \xrightarrow{\sim} R_{L,e}$ der reduzierten Bewertertungsringe von L^0 beziehungsweise L fortsetzt.

Bemerkung. Ist L über K total verzweigt, so läßt sich L^0 wie folgt konstruieren (siehe [D] 1.3): Sei π_L ein uniformisierendes Element von L, sei π ein uniformisierendes Element von R, sei X eine Variable, und sei

$$P(X) = X^n + \pi \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \quad \in R[X]$$

eine Eisenstein-Gleichung für π_L über R mit Koeffizienten a_i in R. Wir wählen Liftungen $a_i^0 \in R^0$ der Bilder der a_i unter α; dann erklärt die Eisenstein-Gleichung $P^0(X) = X^n + \pi^0 \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 X^i \in R^0[X]$ die Erweiterung L^0/K^0, wobei π^0 ein uniformisierendes Element von R^0 bezeichnet. Da $\mathrm{Gal}(L/K)^{e+1}$ verschwindet, ist die Erweiterung L^0 von der Wahl der Liftungen a_i^0 unabhängig.

7.5.8 Satz. *Sei $e \geq 0$ eine natürliche Zahl. Die Gruppe*

$$\Gamma(\mathrm{Tr}_e K) := \mathrm{Gal}(K_s/K)/\mathrm{Gal}(K_s/K)^{e+1}$$

zusammen mit ihrer Filtration durch die Verzweigungsgruppen ist durch $\mathrm{Tr}_e K$ determiniert.

Beweis. Siehe [D] 3.4, 3.5. □

Wir fixieren zu jedem Tripel $S = (S, M, \varepsilon)$ einen geeigneten lokalen Körper K sowie einen Isomorphismus $S \cong \mathrm{Tr}_e K$ und setzen $\Gamma(S) := \Gamma(\mathrm{Tr}_e K)$. Sei Λ ein endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul, auf welchem $\Gamma(S)$ stetig operiert, und sei Γ das endliche Bild von $\Gamma(S)$ in $\mathrm{Aut}(\Lambda)$. Ist K irgendein lokaler Körper und $S \cong \mathrm{Tr}_e K$ ein Isomorphismus, so sei L der zu dem durch Γ induzierten Quotienten Γ' von $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ korrespondierende endliche galoische Erweiterungskörper von K. Dann ist L ein Entfaltungskörper des durch Γ' und Λ gegebenen Torus $T := (R, R_L, \Gamma', \Lambda)$. Nach den zitierten Resultaten ist $\mathrm{red}_e T = (R_e, R_{L,e}, \Gamma', \Lambda)$ durch das Paar (S, Λ) determiniert. Definieren wir $h(S, \Lambda) := h_e(T)$, so erhalten wir nun eine alternative Formulierung von Theorem 7.4.2:

7.5.9 Theorem. *Sei $S = (S, M, \varepsilon)$ ein Tripel des betrachteten Typs, sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von S, und sei Λ ein endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul, auf welchem $\Gamma(S)$ stetig operiert; ferner sei sei n in $\mathbb{N}$ beliebig, und sei e eine natürliche Zahl größer oder gleich $n + 3h(S, \Lambda)$. Dann existiert in kanonischer Weise ein glattes $S/\mathfrak{m}^n$-Gruppenschema $\mathcal{T}_n(S, \Lambda)$, derart daß für jeden lokalen Körper K mit Bewertungsring R und jeden Isomorphismus $S \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tr}_e K$ in kanonischer Weise ein Isomorphismus*

$$\mathcal{T}_n(S, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \underline{T}_n^{\mathrm{NR},b}$$

über dem gegebenen Isomorphismus $S/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\sim} R_n$ existiert, wobei $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ zu dem durch $S \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tr}_e K$ induzierten Torus gebildet sei.

Beweis. Siehe [CY] 9.3. □

Wir können also jedem Datum (S, Λ) in natürlicher Weise ein Objekt $\mathcal{T}_n(S, \Lambda)$ zuordnen, welches sich nach Wahl eines Isomorphismus zwischen S und der Reduktion eines lokalen Körpers K mit der Reduktion des Néron-Modells des induzierten Torus identifiziert. Es gilt sogar:

7.5.10 Satz. *Die Zuordnung $\Lambda \mapsto \mathcal{T}_n(S, \Lambda)$ ist funktoriell. Ist also $\Lambda \to \Lambda'$ ein $\Gamma(S)$-äquivarianter Homomorphismus, so induziert dieser in kanonischer Weise einen Morphismus $\mathcal{T}_n(S, \Lambda) \to \mathcal{T}_n(S, \Lambda')$ von $S/\mathfrak{m}^n$-Gruppenschemata.*

Beweis. Siehe [CY] 9.4. □

7.5.2 Die Invariante c(T)

Sei $T = (R, R_L, \Gamma, \Lambda)$ ein Torus. Die Invariante $c(T)$, welche die Änderung von $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ unter Erweiterung des Grundkörpers charakterisiert, ist anhand der Lie-Algebra von $\underline{T}^{\mathrm{NR},b}$ erklärt.

7.5.11 Bemerkung und Definition. *Sei X ein glattes Schema über einem Basisschema S. Das zu $\Omega^1_{X/S}$ duale Vektorbündel $T_{X/S}$ heißt das Tangentialbündel von X/S. Ist $s : S \to X$ ein Schnitt von X/S, so heißt $s^*T_{X/S}$ der Tangentialraum von X längs des Schnittes s. Ist X ein S-Gruppenschema mit Einsschnitt e, so trägt $e^*T_{X/S}$ die Struktur einer Lie-Algebra über S; ihre globalen Schnitte identifizieren sich nach [BLR] 4.2 mit den translationsinvarianten Vektorfeldern auf X. Wir definieren*

$$\mathrm{Lie}(X/S) := e^*T_{X/S} \quad .$$

Nach Definition ist $\mathrm{Lie}(X/S)$ *mit Basiswechsel verträglich.*

7.5.12 Bemerkung und Definition. *Sei $T = (R, R_L, \Gamma, \Lambda)$ ein Torus, und sei L der Quotientenkörper von R_L. Nach Definition des Funktors $(\underline{T \otimes_K L})^{\mathrm{NR},b}$ existiert ein kanonischer Morphismus*

$$\mathrm{can}_{T,L} : \underline{T}^{NR,b} \otimes_R R_L \to (\underline{T \otimes_K L})^{\mathrm{NR},b} \quad ,$$

welcher sich auf generischen Fasern zur Identität beschränkt. Wie im Beweis von Lemma 3.3.3 sehen wir, daß der induzierte Homomorphismus der Lie-Algebren trivialen Kern besitzt. Wir setzen nun

$$c(T) := \frac{1}{e_{L/K}} \cdot \mathrm{length}_{R_L} \frac{\mathrm{Lie}((\underline{T \otimes_K L})^{\mathrm{NR},b})}{(\mathrm{can}_{T,L})_* \mathrm{Lie}(\underline{T}^{\mathrm{NR},b} \otimes_R R_L)} \quad ,$$

wo die Lie-Algebren jeweils über R_L gebildet sind und $e_{L/K}$ den Verzweigungsindex von L über K bezeichnet.

Bemerkung. Die Invariante $c(T)$ ist von der Wahl von L unabhängig. Um dies zu sehen, betrachten wir eine weitere Körpererweiterung L'/K, welche T entfaltet, bilden das Kompositum von L und L' über K und verwenden die Tatsache, daß Lie-Algebren und Néron-Modelle entfalteter Tori mit Basiswechsel kommutieren.

Chai und Yu zitieren zunächst ein Resultat von Gross und Gan ([GG]), welches besagt, daß $c(T)$ mit der Hälfte des Artin-Führers der Galois-Darstellung von $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ übereinstimmt, falls $c(T)$ unter Isogenie invariant ist. Eine Isogenie ist ein endlicher surjektiver Homomorphismus von Gruppenschemata.

7.5.13 Definition. *Sei G eine proendliche Gruppe, sei V eine endlich-dimensionale rationale Darstellung von G, und sei L der Fixkörper des Kerns des gegebenen Homomorphismus $G \to \mathrm{Gl}(V)$. Für jede ganze Zahle $i \geq -1$ sei Γ_i die i-te Verzweigungsgruppe von L über K; wir setzen $g_i := \mathrm{card}\,\Gamma_i$. Dann heißt die Zahl*

$$a(V) = \sum_{i \geq 0} \frac{g_i}{g_0} \dim(V/V^{\Gamma_i})$$

der Artin-Führer der gegebenen Darstellung.

Bemerkung. Die Gruppen $I := \Gamma_0$ und Γ_1 heißen die Trägheitsgruppe beziehungsweise die wilde Trägheitsgruppe von L über K. Der Artin-Führer $a(V)$ schreibt sich in der Form $a(V) = \dim(V/V^I) + b(V)$, wo $b(V)$ ein Maß dafür ist, wie stark die Darstellung V wild verzweigt ist.

7.5.14 Satz. *Sei K ein lokaler Körper. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(*i*) *Sind T^1, T^2 zwei Tori über K, derart daß eine Isogenie $T^1 \to T^2$ existiert, so stimmen die Invarianten $c(T^1)$ und $c(T^2)$ überein.*

(*ii*) *Ist T ein Torus über K mit Kocharaktergruppe Λ, so besteht die Gleichung*

$$c(T) = \frac{1}{2} a(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \quad ,$$

wobei wir Λ als $\mathrm{Gal}(K_s/K)$-Modul ansehen und auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ die induzierte Aktion betrachten.

Beweis. Siehe [CY] 10.2. □

Chai und Yu zeigen, daß die äquivalenten Bedingungen von Satz 7.5.14 für beliebige lokale Körper K erfüllt sind. In Kapitel 11 untersuchen sie zunächst den Fall, daß die Charakteristik von K gleich Null ist. Ist auch der Restklassenkörper k von Charakteristik Null, so ist jede Erweiterung von L über K zahm verzweigt, und die gewünschte Aussage folgt durch Anwendung von [Ed] Theorem 4.2. Ist char K gleich 0 und ist k von Charakteristik $p > 0$, so stützen sich Chai und Yu auf die Theorie der Galois-Kohomologie lokaler Körper; siehe [CY] 11.4, 11.5. In Kapitel 12 schließlich behandeln sie den Fall gleicher Charakteristik $p > 0$, welchen sie mit Hilfe von Theorem 7.4.2 auf den Fall gemischter Charakteristik zurückführen:

7.5.15 Theorem. *Sei K ein lokaler Körper von gleicher Charakteristik p, und sei T ein Torus über K. Dann besteht die Gleichung*

$$c(T) = \frac{1}{2} a(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \quad ,$$

wo Λ die Kocharaktergruppe von T bezeichnet.

Beweis. Da die Bildung der Lie-Algebra mit Basiswechsel kommutiert, ist $c(T)$ für $m \gg 0$ durch den via $\mathrm{can}_{T,L}$ induzierten Homomorphismus

$$\underline{T}^{\mathrm{NR},b} \otimes_R R_{L,m} \to (\underline{T \otimes_K L})^{\mathrm{NR},b}_m$$

determiniert. Nach Theorem 7.5.9 ist folglich $c(T)$ für $e \gg 0$ durch $(\mathrm{Tr}_e K, \Lambda)$ determiniert. Wir fixieren eine solche Zahl e und wählen einen lokalen Körper K^0 in Charakteristik Null, für welchen $\mathrm{Tr}_e K$ zu $\mathrm{Tr}_e K^0$ isomorph ist; ein solcher existiert nach Bemerkung 7.5.3. Sei T^0 der durch $(\mathrm{Tr}_e K^0, \Lambda)$ gegebene Torus über K^0; nach [CY] 11.3 ist $c(T^0) = c(T)$ gleich der Hälfte des Artin-Führers a^0 von $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, wo wir Λ als $\mathrm{Gal}(K^0_s/K^0)$-Modul ansehen. Sei Γ das Bild von $\Gamma(\mathrm{Tr}_e K)$ in $\mathrm{Aut}\Lambda$; nach Definition ist a^0 durch die Verzweigungsgruppen von Γ determiniert. Nach dem Theorem von Herbrand ([Se] IV §3 Proposition 14) stimmt die oben indizierte Filtrierung von Γ mit dem Bild der oben indizierten Filtrierung von $\Gamma(\mathrm{Tr}_e K^0)$ überein, so daß a^0 nach Satz 7.5.8 durch $\Gamma(\mathrm{Tr}_e K^0)$ determiniert ist. Aus analogen Gründen ist der Artin-Führer a des $\mathrm{Gal}(K_s/K)$-Moduls $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ durch $\Gamma(\mathrm{Tr}_e K)$ determiniert. Folglich stimmt $c(T) = c(T^0)$ mit $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a^0$ überein, wie behauptet. □

Bemerkung. Sei π_L ein uniformisierendes Element von L. Bei den π_L-Ordnungen der Elementarteiler des Torsionsmoduls

$$\frac{\mathrm{Lie}((\underline{T \otimes_K L})^{\mathrm{NR},b})}{(\mathrm{can}_{T,L})_* \mathrm{Lie}(\underline{T}^{\mathrm{NR},b} \otimes_R R_L)} \quad ,$$

dividiert durch $e_{L/K}$, handelt es sich um Invarianten von T, welche nach 7.5.9 für $e \gg 0$ durch $(\mathrm{Tr}_e K, \Lambda)$ determiniert sind.

Literatur

[BH] Bruns, W.; Herzog, J.; *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge University Press (1993)

[BGR] Bosch, S.; Güntzer, U.; Remmert, R.; *Non-Archimedean Analysis*, Springer-Verlag (1984)

[BLR] Bosch, S.; Lütkebohmert, W.; Raynaud, M.: *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 21, Springer-Verlag (1990)

[B1] Bosch, S.; *Algebra*, 4. Auflage, Springer-Verlag (2001)

[B2] Bosch, S.; *Vorlesungsskript zur Algebraischen Geometrie* WWU Münster SS03-WS03/04

[B3] Bosch, S.; *Lectures on formal and rigid geometry*, WWU Münster SS04-WS0405, SFB-Preprint Heft 378

[Bou] Bourbaki, N.; *Commutative Algebra*, Elements of Mathematics, Hermann Verlag (1972)

[Ca] Cartan, H.; Chevalley, C.; *Séminaire de l'Ècole Normale Supérieure*, 8^{e} année (1955-56), *Géométrie algébrique*

[Co] Conrad, B.; *A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups*, *http://www.math.lsa.umich.edu/∼bdconrad/*

[CY] Chai, C.-L.; Yu, J.-K.; *Congruences of Néron models for Tori and the Artin conductor*, Annals of Mathematics, **154** (2001), 347-382

[D] Deligne, P.; *Les corps locaux de caractéristique p, limites de corps locaux de caractéristique 0*, 119-157, Hermann, Paris (1984)

[Ed] Edixhoven, B.; *Néron models and tame ramification*, Compositio Math. **81** (1992), 291-306

[EGA I] Grothendieck, A.: *Le langage des schémas*, Éléments de Géométrie Algébrique, Publ. Math. IHES 4 (1960)

[EGA IV] Grothendieck, A.: *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Éléments de Géométrie Algébrique, Publ. Math. IHES 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967)

[SGA 3] Grothendieck, A. et al.; *Schémas en groupes*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie (1962/64)

[Eis] Eisenbud, D.; *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer-Verlag (1995)

[Elk] Elkik, R.; *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **6** (1973), 553-604

[F] Fulton, W.; *Intersection Theory*, Springer-Verlag (1998)

[GM] van der Geer, G.; Moonen, B.; *Abelian Varieties* preliminary version, *http://turing.wins.uva.nl/∼bmoonen/boek/BookAV.html*

[GG] B. H. Gross; W.T. Gan; *Haar measure and the Artin conductor*, Trans. A. M. S. **351** (1999), 1691-1704

[Hal] Halmos, P. R.; *How to write mathematics*, L'Enseignement mathém. **16**, fasc. 2, 123-152 (1970)

[Har] Hartshorne, R.; *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977)

[Ho] Hochster, M.; *Math 615, Winter 2004*, unpublished lecture notes on commutative algebra, *http://www.math.lsa.umich.edu/∼hochster/615/615.html*

[KPR] Kurke, H.; Pfister, G.; Roczen, M.; *Henselsche Ringe und algebraische Geometrie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (1974)

[L] Liu, Q.; *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford University Press (2002)

[Ma] Matsumura, H.; *Commutative Algebra*, W. A. Benjamin, Inc., New York (1970)

[Mi] Milne, J. S.; *Étale Cohomology*, Princeton University Press (1980)

[Mu] Mumford, D.: *Abelian Varieties*, Tata institute of fundamental research, Bombay, Oxford University Press (1970)

[NX] Nart, C.; Xarles, X.; *Additive reduction of algebraic tori*, Arch. Math., Vol. **57**, 460-466 (1991)

[N] Neukirch, J.; *Algebraische Zahlentheorie*, Springer-Verlag (1992)

[Sa] Samuel, M.P.; *Algèbre locale*, Mémorial des sciences mathématiques, Fascicule CXXIII, Gauthier-Villars (1953)

[Se] Serre, J.P.; *Corps locaux*, 4$^{\text{ème}}$ édition, Hermann Verlag (1968)

[T] Tamme, G.: *Vorlesungen über Abelsche Schemata*, WWU Münster WS03/04, SS04

[W] Wahle, C.: *Der Néronsche Glättungsprozess*, Diplomarbeit, WWU Münster (2005)

[Wa] Waterhouse, W. C.; *Introduction to affine group schemes*, Springer-Verlag (1979)

[We] Weibel, C. A.; *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press (1994)

[X] Xarles, X.; *The scheme of connected components of the Néron model of an algebraic torus*, J. reine angew. Math. **437** (1993), 167-179