Christian Clason SS 2015
Blatt 1

Mathematische Bildverarbeitung

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 30.4.2015)

H 1.1 *Unterhalbstetigkeit von charakteristischen Funktionen*

Sei X ein Banachraum und $A \subset X$. Die *charakteristische Funktion* von A ist definiert für alle $x \in X$ durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) χ_A ist unterhalbstetig genau dann, wenn A offen ist;

b) χ_A ist oberhalbstetig genau dann, wenn A abgeschlossen ist.

H 1.2 *Unterhalbstetigkeit der Integration*

Sei $X = L^2(\Omega)$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, und $F : L^2(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$F(u) = \int_\Omega \varphi(u(x))\,dx,$$

wobei das Integral nicht existieren muss; in diesem Fall ist $F(u) = \infty$. Zeigen Sie:

a) Für φ konvex und unterhalbstetig ist F konvex und schwach unterhalbstetig ist.

b) Für $\varphi(t) = \frac{1}{4}(t-1)^2(t+1)^2$ ist F *nicht* schwach unterhalbstetig.

Hinweis: Konstruieren Sie eine geeignete Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, die schwach gegen* 0 *konvergiert, aber für die* $F(u_n) \neq 0$ *konstant ist.*

H 1.3 *Supremum stetiger Funktionen*

Finden Sie ein Beispiel für eine Familie $\{F_i\}_{i\in I}$ von stetigen Funktionen, für die $F := \sup_{i\in I} F_i$ nicht stetig ist.

H 1.4 *Konvexe Funktionen und ihre Subniveaumengen*

Sei X ein normierter Raum und $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$F_\lambda := \{x \in X : F(x) \leqslant \lambda\}$$

die *Subniveaumenge* von F. Zeigen Sie:

a) F_λ ist konvex für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn F konvex ist, die Umkehrung gilt aber nicht.

b) F (schwach) unterhalbstetig genau dann, wenn F_λ (schwach) abgeschlossen ist.

H 1.5 *Konvexe Funktionen und ihre Epigraphen*

Sei X ein normierter Raum und $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit Epigraph

$$\operatorname{epi} F = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : F(x) \leqslant t\}.$$

Zeigen Sie:

a) F ist konvex genau dann, wenn $\operatorname{epi} F$ konvex ist;

b) F ist konvex und schwach unterhalbstetig genau dann, wenn $\operatorname{epi} F$ konvex und abgeschlossen ist.

H 1.6 *Konvexitätserhaltende Operationen*

Seien X, Y Banachräume und sei $F : X \to \bar{\mathbb{R}}$ konvex. Zeigen Sie:

a) $\varphi \circ F$ ist konvex für $\varphi : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ konvex und monoton steigend (ist φ strikt konvex, so auch $\varphi \circ F$);

b) $F \circ A$ ist konvex für $A \in L(Y, X)$;

c) $x \mapsto \sup_{i\in I} F_i(x)$ ist konvex für eine beliebige Indexmenge I und F_i konvex für alle $i \in I$.