

## MATHEMATISCHE BILDVERARBEITUNG

**Hausaufgaben** (Bearbeitung bis 21.5.2015)**H 2.1** *Subdifferenziale können leer sein*

Zeigen Sie, dass  $\partial f(0) = \emptyset$  gilt für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \geq 0, \\ \infty & \text{sonst;} \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x = 0, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

**H 2.2** *Subdifferenziale von Normen*

Geben Sie eine explizite Darstellung von  $\partial(\|\cdot\|_X)$  an für

- a)  $X = (\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$ ;  
b)  $X = (\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty)$ .

**H 2.3** *Gegenbeispiele im Subdifferentialkalkül*

- a) Finden Sie  $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\partial(f+g)(x) \neq \partial f(x) + \partial g(x)$ .  
b) Finden Sie  $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $A \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  und  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\partial(f \circ A)(x) \neq A^* \partial f(Ax)$ .

**H 2.4** *Fenchel-Konjugierte I*

Bestimmen Sie  $f^*$  und  $\text{dom } f^*$  für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,

- a)  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ;  
b)  $f(x) = e^x$ ;  
c)  $f(x) = \frac{1}{p}|x|^p$ ,  $1 < p < \infty$ . *Hinweis: Youngsche Ungleichung*

**H 2.5** *Fenchel-Konjugierte II*

Bestimmen Sie  $F^*$  für  $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,

- a)  $\varphi(\|\cdot\|_X)$  für  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eigentlich und gerade;  
b)  $\delta_U$  für  $U \subset X$  abgeschlossener Unterraum.

**H 2.6** *Eigenschaften der Fenchel-Konjugierten*

Seien  $F, G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit  $F \leq G$ . Zeigen Sie, dass gilt

- a)  $F^{**} \leq F^*$ ;  
b)  $F^* \geq G^*$ ;  
c)  $F^{***} = F^*$ .