

MATHEMATISCHE BILDVERARBEITUNG

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 16.7.2015)**H 4.1** L^2 -Entrauschen erhält Mittelwert

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $1 < p < \infty$, und $f \in L^2(\Omega)$ gegeben. Zeigen Sie: Die Lösung $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ von

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} \frac{1}{2} \|u - f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{p} |u|_{W^{1,p}}^p$$

erfüllt $\mu(\bar{u}) = \mu(f)$.

H 4.2 Diskrete Faltung

Zeigen Sie, dass für $k_h \in \mathbb{R}^{(2r+1)(2s+1)}$ der zu $A_h : u_h \mapsto k_h \star u_h$ adjungierte Operator gegeben ist durch

$$(A_h^* w_h)_{ij} = h \sum_{m=i-r}^{i+r} \sum_{n=j-s}^{j+s} w_{mn} k_{m-i, n-j}, \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M.$$

H 4.3 Duales L^2 -TV-Entfalten

Berechnen Sie das zu

$$\min_{u_h \in \mathbb{R}^{NM}} \frac{1}{2} \|K_h u_h - f_h\|_2^2 + \alpha \|\nabla_h u_h\|_1.$$

duale Problem nach dem Satz von Fenchel–Rockafellar für

- K_h invertierbar und $A = \nabla_h$;
- K_h nicht invertierbar und $A = (K_h, \nabla_h)^T$.

Programmieraufgaben (Abgabe bis 9.7.2014 per email an christian.clason@uni-due.de)**P 4.1** Primal-duale Verfahren für Entrauschen

- Implementieren Sie das primal-duale Extragradienten-Verfahren für das diskrete L^2 -TV Entrauschproblem

$$\min_{u \in \mathbb{R}^{NM}} \frac{1}{2} \|u - f\|_2^2 + \alpha \|\nabla_h u\|_1,$$

für gegebene $f \in \mathbb{R}^{NM}$ und $\alpha > 0$. (Sie können $h = 1$ festsetzen.) Vergleichen Sie für ein Bild, das Gaußsches Rauschen enthält, die L^2 -TV-Rekonstruktion mit der L^2 - H^1 -Rekonstruktion.

- Implementieren Sie das primal-duale Extragradienten-Verfahren für das diskrete L^1 -TV Entrauschproblem

$$\min_{u \in \mathbb{R}^{NM}} \|u - f\|_1 + \alpha \|\nabla_h u\|_1,$$

für gegebene $f \in \mathbb{R}^{NM}$ und $\alpha > 0$. (Sie können $h = 1$ festsetzen.) Vergleichen Sie für ein Bild, das Impuls-Rauschen enthält, die L^1 -TV-Rekonstruktion mit der L^2 -TV-Rekonstruktion.

Verwenden Sie das Testskript, das Sie [hier](#) herunterladen können. Realistische Testdaten können Sie [hier](#) herunterladen.