Christian Clason | SS 2017
Blatt 1

Nichtglatte Analysis und Optimierung

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 23.5.2017)

H 1.1 *Unterhalbstetigkeit von charakteristischen Funktionen*

Sei X ein Banachraum und $A \subset X$. Die *charakteristische Funktion* von A ist definiert für alle $x \in X$ durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) χ_A ist unterhalbstetig genau dann, wenn A offen ist;

b) χ_A ist oberhalbstetig genau dann, wenn A abgeschlossen ist.

H 1.2 *Supremum stetiger Funktionen*

Finden Sie ein Beispiel für eine Familie $\{F_i\}_{i\in I}$ von stetigen Funktionen, für die das punktweise Supremum $F := \sup_{i\in I} F_i$ nicht stetig ist.

H 1.3 *Integralfunktionale*

Zeigen Sie, dass für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{4}(t-1)^2(t+1)^2$, das zugehörige Integralfunktional $F : L^1(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$, $u \mapsto \int_\Omega f(u(t))\,dt$, nicht schwach unterhalbstetig ist.

Hinweis: Konstruieren Sie eine geeignete Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, die schwach gegen 0 konvergiert, für die aber $F(u_n) \neq \frac{1}{4}$ konstant ist.

H 1.4 *Differenzierbarkeit von Superpositionsoperatoren*

Zeigen Sie, dass für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin(t)$ und $1 \leqslant p < \infty$, der zugehörige Superpositionsoperator $F : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ in $u = 0$ nicht differenzierbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie $h_n = \chi_{[0,1/n]}$.

H 1.5 *Konvexe Funktionen und ihre Subniveaumengen*

Sei X ein normierter Raum und $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$F_\lambda := \{x \in X : F(x) \leqslant \lambda\}$$

die *Subniveaumenge* von F. Zeigen Sie:

a) F_λ ist konvex für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn F konvex ist; die Umkehrung gilt aber nicht.

b) F ist (schwach) unterhalbstetig genau dann, wenn F_λ (schwach) abgeschlossen ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

H 1.6 *Konvexitätserhaltende Operationen*

Seien X, Y Banachräume und sei $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konvex. Zeigen Sie:

a) $\varphi \circ F$ ist konvex für $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ konvex und monoton steigend;

b) $F \circ A$ ist konvex für $A \in L(Y, X)$;

c) $x \mapsto \sup_{i\in I} F_i(x)$ ist konvex für eine beliebige Indexmenge I und F_i konvex für alle $i \in I$.