Christian Clason SS 2017
Blatt 2

Nichtglatte Analysis und Optimierung

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 6.7.2017)

H 2.1 *Subdifferentiale können leer sein*

Zeigen Sie, dass $\partial f(0) = \emptyset$ gilt für $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$,

a) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \geqslant 0, \\ \infty & \text{sonst;} \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x = 0, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$

H 2.2 *Subdifferenzierbare Funktionen sind konvex*

Sei $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie: Ist $\partial F(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X$, so ist F konvex.

H 2.3 *Subdifferentiale von Normen*

Geben Sie eine explizite Darstellung von $\partial(\|\cdot\|_X)$ an für

a) $X = (\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$;
b) $X = (\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty)$.

H 2.4 *Gegenbeispiele im Subdifferentialkalkül*

a) Finden Sie $f, g \in \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $\partial(f+g)(x) \neq \partial f(x) + \partial g(x)$.
b) Finden Sie $f \in \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $\partial(f \circ A)(x) \neq A^* \partial f(Ax)$.

H 2.5 *Fenchel-Konjugierte I*

Bestimmen Sie f^* und $\operatorname{dom} f^*$ für $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$,

a) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$;
b) $f(x) = e^x$;
c) $f(x) = \frac{1}{p}|x|^p$, $1 < p < \infty$. *Hinweis: Youngsche Ungleichung*

H 2.6 *Fenchel-Konjugierte II*

Zeigen Sie:

a) $\varphi(\|\cdot\|_X)^* = \varphi^*(\|\cdot\|_{X^*})$ für $\varphi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich und gerade;
b) $(\delta_U)^* = \delta_{U^\perp}$ für $U \subset X$ abgeschlossener Unterraum.

H 2.7 *Eigenschaften der Fenchel-Konjugierten*

Seien $F, G : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $F \leqslant G$. Zeigen Sie, dass gilt

a) $F^* \geqslant G^*$;
b) $F^{***} = F^*$.