Fleurianne Bertrand, Christian Clason WS 2016/17

Blatt 3

Numerische Mathematik für das Lehramt

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 23.11.2016, pünktlich zum Beginn der Übung)

H 3.1 *Konditionszahl*

a) Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal. Berechnen Sie: $\kappa_2(Q)$.

b) Sei $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ unitär. Berechnen Sie: $\kappa(U)$.

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie: $\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$.

H 3.2 *Matrixnormen*

a) Zeigen Sie: Wenn $\|\cdot\|_V$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist $\|\cdot\|_M$, definiert durch

$$\|A\|_M := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} \quad \left(= \sup_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V \right),$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$.

b) Zeigen Sie: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ und $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

c) Berechnen Sie die Zeilensummennorm, Spaltensummennorm, Spektralnorm und Frobeniusnorm für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

d) Zeigen Sie: für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\|A\|_2 \leqslant \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}.$$

H 3.3 *Frobeniusnorm*

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei die *Frobeniusnorm* definiert als

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Zeigen Sie: Die Frobeniusnorm ist

a) submultiplikativ:

$$\|AB\|_F \leqslant \|A\|_F \|B\|_F,$$

b) verträglich mit der Euklidischen Norm: Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_F \|x\|_2,$$

c) äquivalent mit der Spektralnorm:

$$\|A\|_2 \leqslant \|A\|_F \leqslant \sqrt{n}\|A\|_2.$$

Hinweis: $\|A\|_F^2 = \operatorname{spur} A^T A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, *wobei* λ_i *die Eigenwerte von* $A^T A$ *sind*