Fleurianne Bertrand, Christian Clason WS 2016/17
Blatt 4

Numerische Mathematik für das Lehramt

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 30.11.2016, pünktlich zum Beginn der Übung)

H 4.1 *Symmetrisch positiv definite Matrizen*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit.

a) Zeigen Sie, dass $|a_{ij}| \leqslant \sqrt{a_{ii}a_{jj}} \leqslant \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj})$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ gilt.

b) Folgern Sie, dass $\max\limits_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |a_{ii}|$ gilt.

H 4.2 LR-*Zerlegung bei Blockstruktur*

Sei A wie folgt partitioniert:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

mit nichtsingulärem $A_{11} \in \mathbb{R}^{n-k\times n-k}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n-k\times k}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{k\times n-k}$ und $A_{22} \in \mathbb{R}^{k\times k}$.

a) Möchte man für A eine Block-LR-Zerlegung derart durchführen, dass gilt

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ L & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

so lassen sich S und L explizit berechnen. Wie sehen sie aus?

Bemerkung: Man bezeichnet S als Schur-Komplement von A_{11} in A.

b) Diese Zerlegung lässt sich nun nutzen um ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Seien also $x_1 \in \mathbb{R}^{n-k}$, $x_2 \in \mathbb{R}^k$, $b_1 \in \mathbb{R}^{n-k}$ und $b_2 \in \mathbb{R}^k$. Geben Sie mit Hilfe der Block-LR-Zerlegung von oben eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

an.

c) Sei A symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass dies dann auch für A_{11} und S gilt.

H 4.3 *Cholesky-Zerlegung*

a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & 6 & -2 \\ 3 & 6 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

symmetrisch und positiv definit ist, und berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung.

b) Lösen Sie mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Verwenden Sie die Matrix aus Teil a) und als rechte Seite $b = (9, 6, 0, 7)^T$.