Fleurianne Bertrand, Christian Clason ws 2016/17
Blatt 5

Numerische Mathematik für das Lehramt

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 07.12.2016, pünktlich zum Beginn der Übung)

H 5.1 *LR-Zerlegung für Bandmatrizen*

Es sei eine symmetrische Bandmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} = 0$ falls $|i-j| > m$ für eine vorgegebene *Bandbreite* $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Berechnen Sie den Aufwand der LR-Zerlegung.

H 5.2 *Symmetrisches Gauß–Seidel-Verfahren*

Gegeben sei eine symmetrische nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, zu der eine Zerlegung der Form $A = I + L + L^T$ existiere, wobei L eine echte untere Dreiecksmatrix und I die Einheitsmatrix sei. Das symmetrische Gauß–Seidel-Verfahren ist gegeben durch $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und

$$\begin{aligned}(I+L)\,x^{(k+\frac{1}{2})} &= b - L^T x^{(k)},\\ (I+L^T)\,x^{(k+1)} &= b - L\,x^{(k+\frac{1}{2})},\end{aligned}$$

also durch abwechselndes Hintereinanderausführen des (Vorwärts-)Gauß–Seidel-Verfahrens und des Rückwärts-Gauß–Seidel-Verfahrens.

Zeigen Sie:

a) Das symmetrische Gauß–Seidel-Verfahren ist ein lineares Iterationsverfahren der Form

$$x^{(k+1)} = M^{-1}\left(b + N\,x^{(k)}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

(Geben Sie M und N an.)

b) Die Iterationsmatrix $G = M^{-1}N$ hat die Form

$$G = (I+L^T)^{-1}L(I+L)^{-1}L^T.$$

c) G ist ähnlich zu BB^T mit $B = (I+L)^{-1}L$ (Zwei Matrizen M_1 und M_2 heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix S gibt, sodass $M_1 = S^{-1}M_2S$ gilt).

d) $I - BB^T$ ist genau dann positiv definit, wenn $(I+L)^{-1}A(I+L)^{-T}$ positiv definit ist.

e) Das Verfahren konvergiert für alle Startvektoren $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn A positiv definit ist.

Bitte Rückseite betrachten.

Programmieraufgaben (Abgabe bis 21.12.2016 per email an `fleurianne.bertrand@uni-due.de`)

Hinweis: Die abgegebenen Programme **müssen** komplett fehlerfrei laufen. **Nicht laufende Programme werden nicht bewertet.** Befehle, die bei der Korrektur berücksichtigt werden sollen aber noch fehlerhaft sind, müssen auskommentiert werden.

P 5.1 *Symmetrisches Gauß–Seidel-Verfahren*

In dieser Aufgabe sollen Sie sukzessive das so symmetrische Gauß–Seidel-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ implementieren. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

a) Das Vorwärts-Gauß–Seidel-Verfahren (kurz: vGS) ist durch die Vorschrift

$$x^{(k+1)} = (D + L)^{-1} \left(b - Rx^{(k)}\right)$$

festgelegt. Schreiben Sie eine Routine `xnew=vGS(A,b,xold)`, welche die neue Iterierte `xnew` aus der alten Iterierten `xold` nach dieser Verfahrensvorschrift berechnet.

b) Das Rückwärts-Gauß–Seidel-Verfahren (kurz: rGS) ist durch die Vorschrift

$$x^{(k+1)} = (D + R)^{-1} \left(b - Lx^{(k)}\right)$$

festgelegt. Schreiben Sie eine Routine `xnew=rGS(A,b,xold)`, welche die neue Iterierte `xnew` aus der alten Iterierten `xold` nach dieser Verfahrensvorschrift berechnet.

c) Das symmetrische Gauß–Seidel-Verfahren (kurz: sGS) führt die Verfahren vGS und rGS zur Bestimmung der Iterierten $x^{(k+1)}$ aus $x^{(k)}$ abwechselnd aus. Die Verfahrensvorschrift beim sGS lautet

$$\begin{aligned} x^{(k+\frac{1}{2})} &= (D + L)^{-1} \left(b - Rx^{(k)}\right), \\ x^{(k+1)} &= (D + R)^{-1} \left(b - Lx^{(k+\frac{1}{2})}\right), \end{aligned}$$

wobei $x^{(k+\frac{1}{2})}$ eine Zwischeniterierte bezeichnet.

Schreiben Sie nun ein Programm `[x,iter]=lgssGS(A,b,x_0,tol,maxiter)` zur Lösung von $Ax = b$, welches die Verfahrensvorschrift, ausgehend von einem Startvektor `x_0`, des sGS so lange ausführt, bis der relative Fehler $\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_2}{\|x^{(k)}\|_2}$ kleiner als die vorgegebene Toleranz `tol` ist. Die Routine soll ebenfalls abbrechen, wenn die vorgegebene maximale Anzahl `maxiter` an Iterationsschritten überschritten wurde. Die Ausgabevariable `iter` soll die Anzahl der Iterationsschritte angeben.

Hinweise: Sie können die neuen Iterierten jeweils komponentenweise berechnen oder obige Verfahrensvorschriften direkt benutzen. Bei der zweiten Möglichkeit ist das Invertieren von Matrizen jedoch verboten.