Fleurianne Bertrand, Christian Clason ws 2016/17

Blatt 6

Numerische Mathematik für das Lehramt

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 14.12.2016, pünktlich zum Beginn der Übung)

H 6.1 *Kondition und relative Fehler*

Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0.00031 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

a) mit Gauß-Elimination ohne Pivotisierung und 4-stelliger Rechnung.

b) mit Gauß-Elimination mit Spaltenpivotsuche und 4-stelliger Rechnung.

Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit der exakten Lösung $x = (-4.001240\ldots, -2.998759\ldots)^T$ und berechnen Sie $\kappa_2(A)$.

H 6.2 *Fehlerentwicklung*

Die Iterationsmatrix $G \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eines linearen Iterationsverfahrens zur Lösung von $Ax = b$ besitze die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_3 = 0$ mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = (1, 0, 0)^T), \quad v_2 = (1, 1, 0)^T) \quad \text{und} \quad v_3 = (1, 1, 1)^T.$$

a) Der Startfehler sei $e^{(0)} = (3, 2, 1)^T$. Geben Sie den Fehler $e^{(3)}$ nach drei Iterationsschritten an.

b) Konvergiert das Verfahren für den Startvektor mit dem Startfehler aus a) gegen die Lösung x^* von $Ax = b$?

c) Konvergiert das Verfahren für jede beliebige rechte Seite und beliebige Startvektoren? Andernfalls geben Sie alle Startfehler an, für die das Verfahren konvergiert.

H 6.3 *Konvergenzuntersuchung von Relaxationsverfahren*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie jeweils zwei Schritte des Jacobi- und des Gauß–Seidel-Verfahrens für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit rechter Seite $b = (3, -2, -1)^T$ und dem Startvektor $x^{(0)} = 0$.

b) Konvergieren das Jacobi- und das Gauß–Seidel-Verfahren für alle Startvektoren $x^{(0)}$ gegen die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$?

c) Konvergiert das Gauß–Seidel-Verfahren für alle Startvektoren $x^{(0)}$ gegen die Lösung des linearen Gleichungssystems $Bx = b$?