

## NUMERISCHE MATHEMATIK FÜR DAS LEHRAMT

**Hausaufgaben** (Bearbeitung bis 21.12.2016, pünktlich zum Beginn der Übung)**H 7.1** CG-VerfahrenGegeben sei ein lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  mit der Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und der rechten Seite  $b = (0, -1, -1, 0)^T$ .Führen Sie, ausgehend vom Startvektor  $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T$ , zwei Schritte des CG-Verfahrens durch.**H 7.2** Ein Modell für die Computertomographie

In der Computertomographie soll die Dichteverteilung im Inneren eines Körpers durch den Intensitätsverlust von Röntgenstrahlen, die aus möglichst vielen Richtungen durch den Körper geschickt werden, rekonstruiert werden. Anhand dieser Dichtefunktion können dann einzelne Bestandteile (Knochen, Organe) identifiziert werden. Mathematisch wird dies wie folgt modelliert:

Der infinitesimale Intensitätsverlust  $dI$  an einer Stelle  $s$  im Körper ist proportional zur Dichte  $\rho(s)$  und Intensität  $I$  an dieser Stelle, sowie zur infinitesimalen Länge  $ds$ :

$$dI = -\rho(s)I ds$$

Durch Integration über den Strahl  $S = [a, b]$  kann daraus der komplette Intensitätsverlust  $\frac{I(a)}{I(b)} =: \frac{I_0}{I_1}$  innerhalb des Körpers bestimmt werden:

$$\ln \frac{I_1}{I_0} = \int_{I_0}^{I_1} \frac{dI}{I} = - \int_a^b \rho(s) ds,$$

d.h.

$$(1) \quad \int_a^b \rho(s) ds = \ln \frac{I_0}{I_1} =: V_S.$$

$I_0$  und  $I_1$  können für beliebige Strahlen  $S$  durch Messgeräte bestimmt werden, woraus eine Näherung für  $\rho$  berechnet werden kann. Wir wollen hier eine sehr vereinfachte Form betrachten.

Dazu nehmen wir ein Quadrat  $Q$ , das in neun Teilquadrate  $Q_j$  der Kantenlänge 1 und konstanter Dichte  $\rho_j$  eingeteilt ist. Um diese neun Werte  $\rho_j$  zu bestimmen, setzen wir neun Strahlen  $S_i$  an, die  $Q$  durchqueren (siehe Abbildung 1). Sie sollen nun diese einfache Computertomographie berechnen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Bestimmen Sie für diesen einfachen Fall den gesamten Intensitätsverlust  $V_i$  von Strahl  $S_i$  mit Hilfe von Formel (1).
- Schreiben Sie dies als lineares Gleichungssystem  $L\rho = V$  für die Unbekannten  $\rho_j$ , und stellen Sie die zugehörige Matrix  $L$  auf.
- Lösen Sie schliesslich mit der passenden Zerlegungsmethode das Gleichungssystem für die "Messwerte"

$$V = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 3, 3, 3\sqrt{2}, 4, 3, 2\sqrt{2}, 3)^T$$

bitte wenden!

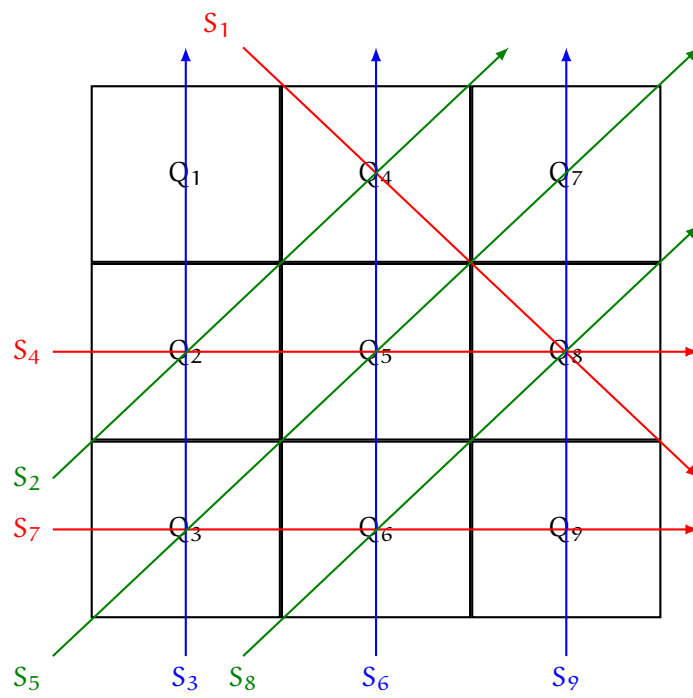


Abbildung 1: Geometrie des Modellproblems