Fleurianne Bertrand, Christian Clason WS 2016/17

Blatt 9

Numerische Mathematik für das Lehramt

Probeklausur (Besprechung am 18.01.2017)

H 1 (2+2+2 Punkte)

Begründen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Die Gleitkomma-Addition ist kommutativ.

b) Wenn $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ gilt, gilt auch $f(x) = o(g(x))$.

c) Wenn das Gauß–Seidel Verfahren für eine Matrix A mit Rang n konvergiert, dann konvergiert für A auch das Jacobi-Verfahren.

H 2 (3 + 3 Punkte)

Sei $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig und

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & 2 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie D, U und L, so dass $A = L + D + U$ mit L strikt linke Dreiecksmatrix und U strikt rechte Dreiecksmatrix. Für welche γ gilt $\|D^{-1}(L+U)\|_1 < 1$?

b) Sei $\gamma = 4$ und $b = (1,0,0,0)^T$. Führen Sie einen Schritt der Gauß–Seidel-Iteration zur Lösung von $Ax = b$ mit dem Startvektor $x^{(0)} = 0$ durch.

H 3 (3 + 3 Punkte)

Sei $\gamma \in (1, \infty)$ und

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & 1 & 1 \\ 1 & \gamma & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass A symmetrisch positiv definit ist.

b) Führen Sie die Cholesky-Zerlegung von A durch.

H 4 (6 Punkte)

Sei $A = L+D+R$ streng diagonal dominant mit einer strikten unteren Dreiecksmatrix L, einer Diagonalmatrix D und einer strikten oberen Dreiecksmatrix R. Die *Rückwärts Gauß–Seidel-Iteration* bestimmt $x^{(k+1)}$ als Lösung von

$$(D + R)x^{(k+1)} = b - Lx^{(k)}.$$

Zeigen Sie, dass für A streng diagonal dominant diese Iteration für jeden Startwert $x^{(0)}$ konvergiert

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für jeden Eigenwert λ der Iterationsmatrix mit zugehörigem Eigenvektor v gilt $(\lambda D - \lambda L - R)v = 0$. Wählen Sie dabei den Eigenvektor so normiert, dass $\|v\|_\infty = 1$ ist.