Fleurianne Bertrand, Christian Clason WS 2016/17
Blatt 11

Numerische Mathematik für das Lehramt

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 01.02.2017, pünktlich zum Beginn der Übung)

H 11.1 *Mittelpunktregel*

Leiten Sie die Newton–Cotes-Formel für $n = 0$ her. Bestimmen Sie dafür das Gewicht w_0 und die Stützstelle x_0 so, dass die Formel exakt ist für Polynome vom Höchstgrad 1.

H 11.2 *Newton–Cotes-Quadratur*

Berechnen Sie jeweils mit Hilfe der Trapez- und der Simpson-Regel das Integral $\int_0^2 f(x)dx$ für folgende Funktionen:

a) $f(x) = x^2$,

b) $f(x) = x^4$,

c) $f(x) = e^x$,

d) $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem exakten Wert.

H 11.3 *Summierte Quadraturformeln*

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Berechnen Sie

a) $\int_0^1 f(x)\,dx$ exakt.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx$ näherungsweise mit Hilfe der Trapez-Regel auf $[0, 1]$ und mit Hilfe der summierten Trapez-Regel auf den Teilintervallen $[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]$.

c) $\int_0^1 f(x)\,dx$ näherungsweise mit Hilfe der Simpson-Regel auf $[0, 1]$ und mit Hilfe der summierten Simpson-Regel auf den Teilintervallen $\mathcal{T} = [0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]$.

H 11.4 *Quadraturformeln und Ableitungen*

Betrachten Sie zur näherungsweisen Berechnung von $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$ mit $f \in C^n([0, 1])$ und $n \geqslant 2$ die Quadraturformel

$$\tilde{I}(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f'(0) + \lambda_2 f''(0).$$

a) Wie sind die Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ zu wählen, so dass alle Polynome vom Grad 2 exakt integriert werden? Zeigen Sie, dass Polynome vom Grad 3 mit dieser Formel nicht mehr exakt integriert werden können.

b) Modifizieren Sie die Quadraturformel so, dass auch Polynome vom Grad n exakt integriert werden können. Die Quadraturformel soll hierbei die Form

$$\tilde{I}(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^{(i)}(0)$$

haben. Sind die berechneten Gewichte λ_i eindeutig?